

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Ερώτηση θεωρίας 1

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} και c είναι μια πραγματική σταθερά, να δείξετε ότι: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), x \in \mathbf{R}$.

Λύση

Έστω $F(x) = c \cdot f(x)$

Έχουμε $F(x+h) - F(x) = c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x) = c[f(x+h) - f(x)]$

Για $h \neq 0$ έχουμε: $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = c \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Επομένως $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[c \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = cf'(x)$

Άρα $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.

Ερώτηση θεωρίας 2

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$.

β) Τι ορίζουμε στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού;

Λύση

α) Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h$

Για $h \neq 0$ έχουμε: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1$

Επομένως $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$

Άρα $(x)' = 1$

β) Την οριακή τιμή της μέσης ταχύτητας ενός κινητού την ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα του κινητού στη χρονική στιγμή t_0 ή απλώς ταχύτητα του κινητού στο t_0 , δηλαδή

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{h}$$

Ερώτηση θεωρίας 3

α) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες να δείξετε ότι:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

β) Τι εκφράζει η παράγωγος μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Λύση

α) Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$

Έχουμε $F(x+h) - F(x) = [f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)] =$

$$(f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))$$

Για $h \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{(f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))}{h} =$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$f'(x) + g'(x)$$

Άρα $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

β) Η παράγωγος μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x , όταν $x = x_0$.

Ερώτηση θεωρίας 4

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, όπου c πραγματική σταθερά, ισούται με μηδέν.

β) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

γ) Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$f(x) = (x+1)^3, \quad g(x) = x^8 + 5x^3, \quad h(x) = e^x \cdot \eta\mu x, \quad \varphi(x) = 5 \cdot x^4 + \ln 2 \quad \text{και} \quad s(x) = \frac{x}{\eta\mu x}.$$

Λύση

α) Έχουμε

$$f(x+h) - f(x) = c - c = 0$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0, \quad \text{οπότε και}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

$$\text{Άρα } (c)' = 0.$$

β) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A λέγεται συνεχής αν για κάθε $x_0 \in A$, ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$\gamma) f'(x) = \left((x+1)^3 \right)' = 3(x+1)^2 \cdot (x+1)' = 3(x+1)^2,$$

$$g'(x) = (x^8 + 5x^3)' = (x^8)' + (5x^3)' = 8x^7 + 15x^2,$$

$$h'(x) = (e^x \cdot \eta\mu x)' = (e^x)' \cdot \eta\mu x + e^x \cdot (\eta\mu x)' = e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x,$$

$$\varphi'(x) = (5 \cdot x^4 + \ln 2)' = (5 \cdot x^4)' + (\ln 2)' = 5 \cdot (x^4)' + 0 = 5 \cdot 4 \cdot x^3 = 20x^3,$$

$$s'(x) = \left(\frac{x}{\eta\mu x} \right)' = \frac{(x)' \cdot \eta\mu x - x \cdot (\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x} = \frac{\eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}.$$

Ερώτηση θεωρίας 5

Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Πότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_1 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Λύση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_1 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 .

Ερώτηση θεωρίας 6

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Λύση

Η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 .

Ερώτηση θεωρίας 7

Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Πώς ορίζεται η (πρώτη) παράγωγος της f ;

Λύση

Αν B είναι το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη τότε ορίζεται μια νέα

συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f και συμβολίζεται με f' .

Ερώτηση θεωρίας 8

α) Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

β) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι ίση με $f'(x) = 2x$.

Λύση

α) Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν το όριο

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Έχουμε

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = (2x+h)h.$$

Για $h \neq 0$, είναι $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(2x+h)h}{h} = 2x+h$.

Επομένως,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x.$$

Άρα $(x^2)' = 2x$.

Ερώτηση θεωρίας 9

Γράψτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) = x^\nu, \text{ όπου } \nu \text{ φυσικός}$$

$$g(x) = e^x, \text{ όπου } x \text{ πραγματικός}$$

$$h(x) = \ln x, \text{ όπου } x > 0$$

$$t(x) = \sin x, \text{ όπου } x \text{ πραγματικός}$$

Λύση

$$f'(x) = \nu x^{\nu-1},$$

$$g'(x) = e^x,$$

$$h'(x) = \frac{1}{x},$$

$$t'(x) = \cos x$$

Ερώτηση θεωρίας 10

Γράψτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$c \cdot f(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \text{ με } g(x) \neq 0 \text{ και } c = \text{σταθερά.}$$

Λύση

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x),$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2+4x}$. Να βρεθεί:

α) Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f .

β) Να αποδειχθεί ότι $f'(x) + (2x - 4)f(x) = 0$

γ) Να δείξετε ότι το μέγιστο της συνάρτησης f είναι το e^4 .

Λύση

α) $f'(x) = (e^{-x^2+4x})' = e^{-x^2+4x}(-x^2 + 4x)' = (-2x + 4)e^{-x^2+4x}$

β) $f'(x) + (2x - 4)f(x) = 0 \Leftrightarrow (-2x + 4)e^{-x^2+4x} + (2x - 4)e^{-x^2+4x} = 0 \Leftrightarrow$

$(-2x + 4 + 2x - 4)e^{-x^2+4x} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει

γ) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (-2x + 4)e^{-x^2+4x} = 0$ και επειδή $e^{-x^2+4x} \neq 0$, $-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Η παράγωγος γίνεται θετική όταν $-2x + 4 > 0 \Leftrightarrow -2x > -4 \Leftrightarrow x < 2$

και αρνητική όταν $-2x + 4 < 0 \Leftrightarrow -2x < -4 \Leftrightarrow x > 2$

Ο πίνακας προσήμων της παραγώγου διαμορφώνεται ως εξής:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'(x)	+	○	-
f(x)			

Από τον πίνακα φαίνεται ότι η συνάρτηση για $x = 2$ έχει μέγιστο το $f(2) = e^{-2^2+4 \cdot 2} = e^4$.

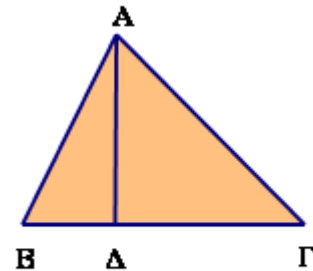
Άσκηση 2

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ μεταβάλλεται έτσι ώστε το άθροισμα της βάσης του ΒΓ και του ύψους του ΑΔ να είναι 20cm.

α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει της

βάσης του ΒΓ=x είναι $E(x) = 10x - \frac{1}{2}x^2$.

β) Να βρείτε το μήκος της βάσης του ΒΓ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου να είναι μέγιστο. Στην περίπτωση αυτή να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.



Λύση

α) Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E = \frac{1}{2}BG \cdot AD$

Αν ονομάσουμε τη βάση ΒΓ=x τότε επειδή ΒΓ+ ΑΔ=20 έχουμε x+ΑΔ=20, ΑΔ=20-x με $x > 0$ και $ΑΔ = 20 - x > 0 \Leftrightarrow 20 > x$ άρα $0 < x < 20$.

Οπότε το εμβαδόν γράφεται $E(x) = \frac{1}{2}x(20-x) = \frac{1}{2}(20x-x^2)$, άρα

$$E(x) = 10x - \frac{1}{2}x^2, x \in (0, 20)$$

β) Για να βρούμε το μήκος της βάσης ΒΓ του τριγώνου για το οποίο το εμβαδόν του είναι μέγιστο, πρώτα βρίσκουμε την παράγωγο της συνάρτησης E(x).

$$E'(x) = (10x - \frac{1}{2}x^2)', \quad E'(x) = 10 - x$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις ρίζες της παραγώγου, δηλαδή λύνουμε την εξίσωση $E'(x) = 0$

$$\text{Από την } E'(x) = 0 \Leftrightarrow 10 - x = 0 \Leftrightarrow x = 10 \text{ cm}$$

Κατόπιν φτιάχνουμε πίνακα προσήμων της παραγώγου

x	0	10	20
E'(x)	+	○	-
E(x)			

Από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται μέγιστο όταν η βάση του ΒΓ=x=10 cm.

Το εμβαδόν του τριγώνου στην περίπτωση αυτή είναι $E(10) = 10 \cdot 10 - \frac{1}{2}10^2 = 100 - 50 = 50 \text{ cm}^2$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha$ με $\alpha \in \mathbf{R}$.

α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε το α αν η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο ίσο με 5.

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το \mathbf{R}

$$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + \alpha)' = 3x^2 - 12x$$

$$\beta) f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 12) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 4$$

Το πρόσημο και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
f'(x)	+	○	○	+
f(x)				

Από τον πίνακα μεταβολών της f διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 4$, ίσο με $f(4)$.

$$\text{Όμως } f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + \alpha = 64 - 96 + \alpha \Leftrightarrow f(4) = -32 + \alpha$$

γ) Βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $f(4) = -32 + \alpha$

$$\text{Αλλά } f(4) = 5, \text{ οπότε } -32 + \alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = 37$$

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha \cdot x^2 - 5x + 2$, όπου $\alpha \in \mathbf{R}$.

α) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x - 2$, τότε να υπολογίσετε το α .

β) Αν $\alpha = 3$

- i. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$.
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Λύση

α) Η παράγωγος της συνάρτησης f ισούται με $f'(x) = 2 \cdot \alpha \cdot x - 5$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $f'(1) = 2 \cdot \alpha - 5$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $y = x - 2$ είναι ίσος με 1, οπότε ισχύει

$$f'(1) = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \alpha - 5 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 3.$$

β)

$$i. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1) \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) = 1$$

Στα προηγούμενα το τριώνυμο $3x^2 - 5x + 2$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και $\frac{2}{3}$ άρα

$$\text{παραγοντοποιείται ως εξής: } 3x^2 - 5x + 2 = 3(x-1) \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right).$$

ii. Έχουμε

$$f'(x) = (3x^2 - 5x + 2)' = 6x - 5,$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6},$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{6} \text{ και}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 6x - 5 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{6}.$$

X	$-\infty$	$\frac{5}{6}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$			
		$-\frac{1}{2}$	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{6}, +\infty\right)$, άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \frac{5}{6}$, το $f\left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{12}$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x \cdot (2x - 2), x \in \mathbf{R}$.

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

Λύση

α. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [e^x \cdot (2x - 2)] = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (2x - 2) = 1 \cdot (-2) = -2.$$

β. Έχουμε

$$f'(x) = (e^x \cdot (2x - 2))' = (e^x)' \cdot (2x - 2) + e^x \cdot (2x - 2)' =$$

$$e^x \cdot (2x - 2) + 2e^x = 2xe^x,$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2xe^x = 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x = 0,$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2xe^x > 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x > 0 \text{ και}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2xe^x < 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x < 0.$$

X	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	○	+
f(x)			

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$, το $f(0) = -2$.

γ. Έχουμε

$$f(1) = e \cdot (2 - 2) = 0 \text{ και}$$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot e = 2e .$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης έχει τη μορφή $y = \lambda x + \beta$, όπου το λ ισούται με το $f'(1)$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται:

$$y = 2e \cdot x + \beta . \quad (1)$$

Επίσης οι συντεταγμένες του σημείου επαφής $A(1,0)$ επαληθεύουν την εξίσωση (1), οπότε έχουμε:

$$0 = 2e \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -2e ,$$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται:

$$y = 2e \cdot x - 2e .$$

Άσκηση 6

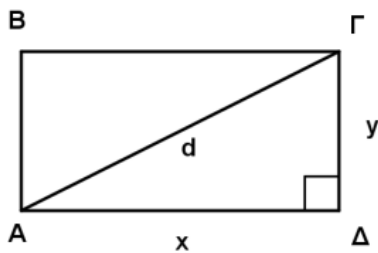
Με ένα σύρμα μήκους 100cm κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μήκους x και πλάτους y .

α. Να εκφράσετε τη διαγώνιο του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x .

β. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε το μήκος της διαγωνίου να γίνει ελάχιστο.

Λύση

Έχουμε το παρακάτω ορθογώνιο



Η περίμετρος ισούται με 100 cm, οπότε

$$2x + 2y = 100 \Leftrightarrow y = 50 - x \quad (1)$$

και επειδή τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι θετικοί αριθμοί, έχουμε

$$y > 0 \Leftrightarrow 50 - x > 0 \Leftrightarrow x < 50 \text{ και } x > 0, \text{ άρα}$$

$$x \in (0, 50).$$

Επίσης εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ και παίρνουμε

$$d^2 = x^2 + y^2 \quad (2)$$

και αντικαθιστώντας το y από την (1) στην (2) έχουμε

$$d^2 = x^2 + (50 - x)^2 \Leftrightarrow d = \sqrt{2x^2 - 100x + 2500}.$$

Άρα η συνάρτηση της διαγωνίου του ορθογωνίου είναι

$$d(x) = \sqrt{2x^2 - 100x + 2500} \text{ με } x \in (0, 50).$$

β. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση της διαγωνίου και έχουμε

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^2 - 100x + 2500}} (2x^2 - 100x + 2500)' = \frac{2x - 50}{\sqrt{2x^2 - 100x + 2500}}.$$

Επίσης

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 25,$$

$$d'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 25 \text{ και}$$

$$d'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 25. \text{ (αφού } \sqrt{2x^2 - 100x + 2500} > 0 \text{)}$$

x	0	25	50
d'(x)	-	○	+
d(x)			

Έτσι η d είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 25]$ και γνησίως αύξουσα στο $[25, 50)$, άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 25$. Τότε από την (1) έχουμε ότι $y = 25$, άρα η διαγώνιος του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη όταν $x = y$ δηλαδή όταν είναι τετράγωνο.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + k^2}$, $k > 0$. Αν το σημείο $M(1, \sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τότε:

α) Να δείξετε ότι $k = 1$.

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Λύση

α) Αφού το σημείο $M(1, \sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f θα ισχύει

$$f(1) = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{1^2 + k^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow (\sqrt{k^2 + 1})^2 = (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$$

$$k^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow k^2 = 1 \stackrel{k > 0}{\Leftrightarrow} k = 1$$

β) Για $k = 1$, έχουμε $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

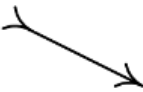

Πρέπει $x^2 + 1 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbf{R} .

Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbf{R}$.

γ) Έχουμε:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0 \stackrel{\sqrt{x^2 + 1} > 0}{\Leftrightarrow} x > 0$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

X	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$			

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f :

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Έχει ελάχιστο το $f(0) = \sqrt{0^2 + 1} = 1$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1}$.

δ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

Λύση

α) Πρέπει $x \geq 0$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $[0, +\infty)$.

β) Για τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$.

Για το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$, έχουμε $f(0) = \sqrt{0} - 1 = -1$.

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -1)$.

$$\begin{aligned} \gamma) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(x + 1)(\sqrt{x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2} - 1}{(x - 1)(x + 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)(\sqrt{x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x + 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{(1 + 1)(\sqrt{1} + 1)} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

δ) Το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι το $A(1, 0)$ (από το β ερώτημα).

Η εφαπτομένη είναι η $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$, με $\lambda = f'(x_0) = f'(1) = 1$.

Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = (\sqrt{x} - 1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Έτσι η σχέση (1) $\lambda = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

Επίσης το σημείο $A(1,0) \in \varepsilon$, άρα ισχύει $0 = \lambda \cdot 1 + \beta \Rightarrow \beta = -\lambda = -\frac{1}{2}$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A είναι

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x \cdot \ln x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Θεωρούμε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$, είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $B(1, 2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε την παράγωγο της f .

γ) Αποδείξτε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$.

δ) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$, να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Λύση

α) Πρέπει $x > 0$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $(0, +\infty)$.

β) Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = (\alpha x)' \cdot \ln x + \alpha x \cdot (\ln x)' = \alpha \ln x + \alpha x \cdot \frac{1}{x} = \alpha \ln x + \alpha$, $x > 0$.

γ) Αφού η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $B(1, 2)$, θα ισχύει:

- $\lambda = f'(1) \Rightarrow 1 = \alpha \ln 1 + \alpha \Rightarrow \alpha = 1$ και
- $B(1, 2) \in C_f \Leftrightarrow f(1) = 2 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1 \cdot \ln 1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 2$.

(ούτως ή άλλως το σημείο B ανήκει στην ευθεία).

δ) Αντικαθιστώντας τις τιμές των α και β που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, έχουμε $f(x) = x \cdot \ln x + 2$, $x > 0$ και $f'(x) = \ln x + 1$, $x > 0$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		○ 	
$f(x)$	↘ ο.ε. ↗		

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f :

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$.
- Έχει ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} + 2 = -\frac{1}{e} + 2$.

Άσκηση 10

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{2011}$.

α) Να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^{2011} - 1}{h}$.

β) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

γ) Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 2011x^{2009}}{x-1}$.

Λύση

α) Η συνάρτηση f ορίζεται στο $A = \mathbf{R}$.

Έχουμε $f(1) = 1^{2011} = 1$, οπότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^{2011} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1), \quad (1)$$

Όμως για κάθε $x \in \mathbf{R}$ είναι $f'(x) = 2011 \cdot x^{2010}$ και $f'(1) = 2011$, (2)

Άρα η (1) λόγω της (2) γίνεται $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^{2011} - 1}{h} = 2011$.

β) Έστω $y = \lambda \cdot x + \beta$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f .

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = f'(1) = 2011$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $y = 2011 \cdot x + \beta$.

Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $M(1, f(1))$, δηλαδή από το $M(1, 1)$, ισχύει η σχέση $1 = 2011 \cdot 1 + \beta$, οπότε $\beta = -2010$

Άρα η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι $y = 2011 \cdot x - 2010$.

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 2011x^{2009}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2011x^{2010} - 2011x^{2009}}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2011x^{2009}(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (2011x^{2009}) = 2011$$

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{g(x)}$, όπου g παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} . Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$ και η εφαπτομένη της στο A είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + 2011$ τότε:

α) Να βρεθεί το $f'(0)$.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(0, f(0))$.

Λύση

α) Αφού η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, θα ισχύει $g(0) = 1$. Αφού η εφαπτομένη της συνάρτησης g στο $A(0,1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) , τότε $g'(0) = \lambda_{\varepsilon} \Leftrightarrow g'(0) = 2$.

Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ είναι $f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$ και για $x = 0$, έχουμε $f'(0) = e^{g(0)} \cdot g'(0) = e^1 \cdot 2 = 2e$. Άρα $f'(0) = 2e$. (1)

β) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο $y = \alpha x + \beta, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, (2)

Για να την προσδιορίσουμε, αρκεί να υπολογίσουμε τους αριθμούς α, β .

Ξέρουμε ότι: $A = f'(0) = 2e$, (3) οπότε η (2) από (3) γίνεται: $y = 2ex + \beta$, (4)

Το σημείο επαφής είναι το $A(0, f(0))$ ή $A(0, e^{g(0)})$ ή $A(0, e^1)$. Επειδή το σημείο A ανήκει στην εφαπτομένη, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της (4), οπότε έχουμε: $e = 2e \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = e$. Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = 2ex + e$

Άσκηση 12

Η εφαπτομένη (ϵ) της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο της $M(1, \sqrt{3})$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 30° .

α) Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

β) Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ϵ).

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - \sqrt{3}}{h}$.

Λύση

α) Το σημείο $M(1, \sqrt{3})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , άρα ισχύει:

$$f(1) = \sqrt{3} \quad (1)$$

β) Η ευθεία (ϵ) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 30° , άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = f'(1) = \epsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

γ) Είναι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - \sqrt{3}}{h} \stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) \stackrel{(2)}{=} \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Ένας ποδοσφαιριστής αφού τοποθετήσει τη μπάλα στο έδαφος την κλωτσά με δύναμη προς τα πάνω. Η τροχιά που διαγράφει η μπάλα υποθέτουμε ότι δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = 18t - 5t^2 \quad (\text{όπου } t \text{ ο χρόνος σε sec}).$$

α) Να εκφράσετε την ταχύτητα της μπάλας συναρτήσει του χρόνου.

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα της μπάλας για $t = 1 \text{ sec}$ και $t = 2 \text{ sec}$.

Πως ερμηνεύετε τα πρόσημα;

γ) Σε ποια χρονική στιγμή η μπάλα ξαναβρίσκεται στο έδαφος;

δ) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος στο οποίο έφτασε η μπάλα;

Λύση

α) Η ταχύτητα u της μπάλας συναρτήσει του χρόνου t δίνεται από την παράγωγο της συνάρτησης $f(t)$.

$$u(t) = f'(t) = (18t - 5t^2)' \Leftrightarrow u(t) = 18 - 10t \quad (1)$$

β) Από την (1)

- για $t = 1$, έχουμε $u(1) = 18 - 10 \cdot 1 = 8 \text{ m/sec}$.

Το θετικό πρόσημο της ταχύτητας φανερώνει ότι η μπάλα τη χρονική στιγμή

$t = 1 \text{ sec}$ κινείται στη θετική κατεύθυνση (προς τα πάνω).

- για $t = 2$, έχουμε $u(2) = 18 - 10 \cdot 2 = -2 \text{ m/sec}$.

Το αρνητικό πρόσημο της ταχύτητας φανερώνει ότι η μπάλα τη χρονική στιγμή

$t = 2 \text{ sec}$ κινείται στην αρνητική κατεύθυνση (προς τα κάτω).

γ) Η μπάλα βρίσκεται στο έδαφος όταν $f(t) = 0$.

$$\text{Από την } f(t) = 0 \Leftrightarrow 18t - 5t^2 = 0 \Leftrightarrow t(18 - 5t) = 0, \quad t = 0 \text{ sec} \text{ ή}$$

$$18 - 5t = 0 \Leftrightarrow t = 3,6 \text{ sec}$$

Άρα η μπάλα βρίσκεται στο έδαφος στην αρχή του χρόνου, όταν δηλαδή $t = 0 \text{ sec}$, και μετά από $3,6 \text{ sec}$. Άρα $t \in [0, 3.6]$

δ) Για να βρούμε το μέγιστο ύψος στο οποίο έφτασε η μπάλα πρώτα θα βρούμε τις ρίζες της παραγώγου της συνάρτησης f . Δηλαδή θα λύσουμε την εξίσωση $f'(t) = 0$

$$\text{Από την } f'(t) = 0 \Leftrightarrow 18 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{18}{10} = 1,8 \text{ sec}$$

Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα προσήμων της παραγώγου λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο χρόνος που κινήθηκε η μπάλα ήταν από 0 έως $3,6 \text{ sec}$.

t	0	1,8	3,6
f'(t)	+	○	-
f(t)			

Από τον πίνακα φαίνεται ότι η μπάλα έφτασε στο μέγιστο ύψος όταν $t = 1,8\text{sec}$ και αυτό ήταν $f(1,8) = 18(1,8) - 5(1,8)^2 = 32,4 - 16,2 = 16,2\text{m}$

Άσκηση 2

Ο πληθυσμός μιας χώρας δίνεται για μια περίοδο 50 ετών από τη συνάρτηση

$\Pi(t) = -\frac{1}{200}t^2 + \frac{1}{5}t + 20$ (σε εκατομμύρια), όπου $t \in [0, 50]$ είναι ο χρόνος σε έτη και η χρονική στιγμή $t = 0$ αντιστοιχεί στην αρχή του έτους 1960.

- Πόσος ήταν ο πληθυσμός στην αρχή της περιόδου και πόσος στο τέλος;
- Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του πληθυσμού στην περίοδο αυτή των 50 ετών. Σε ποιο έτος προέκυψε αυτή;
- Ποιος ήταν ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού στα μέσα της χρονικής αυτής περιόδου δηλαδή όταν $t = 25$;

Λύση

α) Στην αρχή της περιόδου ($t = 0$) δηλαδή το 1960, ο πληθυσμός της χώρας ήταν

$$\Pi(0) = -\frac{1}{200} \cdot 0^2 + \frac{1}{5} \cdot 0 + 20 = 20 \text{ εκατομμύρια κάτοικοι}$$

Στο τέλος της περιόδου ($t = 50$) δηλαδή στην αρχή του 2010, ο πληθυσμός της χώρας ήταν

$$\Pi(50) = -\frac{1}{200} \cdot 50^2 + \frac{1}{5} \cdot 50 + 20 = 17,5 \text{ εκατομμύρια κάτοικοι}$$

β) Για να βρούμε τη μέγιστη τιμή του πληθυσμού βρίσκουμε πρώτα την παράγωγο της συνάρτησης $\Pi(t)$

$$\Pi'(t) = \left(-\frac{1}{200}t^2 + \frac{1}{5}t + 20 \right)' = -\frac{2}{200}t + \frac{1}{5} = -\frac{1}{100}t + \frac{1}{5},$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις ρίζες της παραγώγου. Δηλαδή λύνουμε την εξίσωση $\Pi'(x) = 0$

$$-\frac{1}{100}t + \frac{1}{5} = 0 \quad -\frac{1}{100}t = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow t = \frac{100}{5} = 20 \text{ έτη}$$

Η παράγωγος γίνεται θετική όταν $-\frac{1}{100}t + \frac{1}{5} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{100}t > -\frac{1}{5} \Leftrightarrow -5t > -100 \Leftrightarrow t < 20$ και αρνητική όταν $t > 20$

Κατόπιν φτιάχνουμε πίνακα προσήμων της παραγώγου λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η περίοδος του χρόνου κατά την οποία εξετάζουμε τη μεταβολή του πληθυσμού είναι από 0 έως 50 χρόνια, δηλαδή από το 1960 έως το 2010.

t	1960 0	1980 20	2010 50
$\Pi'(t)$	+	○	-
$\Pi(t)$			

Η μέγιστη τιμή του πληθυσμού προέκυψε όταν $t = 20$ δηλαδή, 20 χρόνια από την έναρξη της μέτρησης του χρόνου και αντιστοιχεί στην αρχή του 1980. Ο πληθυσμός της χώρας τότε ήταν:

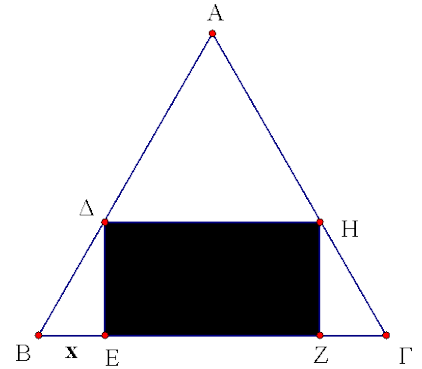
$$\Pi(20) = -\frac{1}{200}20^2 + \frac{1}{5}20 + 20 = -\frac{1}{200}400 + \frac{1}{5}20 + 20 = -2 + 4 + 20 = 22 \text{ εκατομμύρια.}$$

δ) Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού όταν $t = 25$ είναι η τιμή της παραγώγου της συνάρτησης $\Pi(t)$ για $t = 25$

$$\Pi'(25) = -\frac{1}{100}25 + \frac{1}{5} = -\frac{25}{100} + \frac{1}{5} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{-5+4}{20} = -\frac{1}{20}$$

Άσκηση 3

Σε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά $\alpha = 20\text{cm}$ εγγράφουμε ορθογώνιο ΔEZH όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $BE = x$



- Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΔEZH συναρτήσει του x .
- Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου όταν $x = 2$.
- Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν E του τριγώνου αυτού γίνεται μέγιστο.
- Ποιές είναι τότε οι διαστάσεις του ορθογωνίου και πόσο είναι το εμβαδόν του.

Λύση

α) Αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο οι γωνίες του θα είναι 60° .

$$\text{Άρα } \varepsilon\phi 60^\circ = \frac{\Delta E}{BE}, \quad \Delta E = BE \cdot \varepsilon\phi 60^\circ, \quad \Delta E = x \cdot \sqrt{3}.$$

Επειδή $BE = Z\Gamma = x$, $EZ = 20 - 2x$

Πρέπει $x > 0$ και επειδή $EZ > 0 \Leftrightarrow 20 - 2x > 0 \Leftrightarrow 10 > x$ άρα το πεδίο ορισμού είναι το $(0, 10)$

Το εμβαδόν E του ορθογωνίου ΔEZH συναρτήσει του x είναι:

$$E(x) = \sqrt{3}x \cdot (20 - 2x) = (20\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x^2) \text{cm}^2$$

β) Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου για $x = 2$ είναι

$$E'(x) = (20\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x^2)' = 20\sqrt{3} - 4\sqrt{3}x \quad \text{άρα}$$

$$E'(x) = 20\sqrt{3} - 4\sqrt{3}x \quad (1)$$

$$\text{Για } x = 2 \text{ είναι } E'(2) = 20\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού όταν $x = 2$ είναι $E'(2) = 12\sqrt{3}$

γ) Για να βρούμε για ποια τιμή του x το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο βρίσκουμε τις ρίζες της παραγώγου της συνάρτησης $E(x)$, δηλαδή λύνουμε την εξίσωση $E'(x) = 0$.

$$\text{Από την } E'(x) = 0 \Leftrightarrow 20\sqrt{3} - 4\sqrt{3}x = 0 \Leftrightarrow x = 5\text{cm}$$

Στη συνέχεια σχηματίζουμε πίνακα προσήμων της παραγώγου, με την υπενθύμιση ότι $0 < x < 10$.

x	0	5	10
$E'(x)$	+	○	-
$E(x)$			

Από τον πίνακα προκύπτει ότι το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $x = 5cm$.

- δ) Αφού το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο για $x = 5cm$, δηλαδή όταν $BE = ZΓ = 5cm$, η βάση του ορθογωνίου θα είναι τότε $EZ = \alpha - 2 \cdot 5 = 20 - 10 = 10cm$, το

δε ύψος του ορθογωνίου ΔE θα είναι $\Delta E = \frac{E(5)}{EZ} = \frac{50\sqrt{3}}{10} = 5\sqrt{3}cm$.

Το μέγιστο εμβαδόν είναι:

$$E(5) = 20\sqrt{3} \cdot 5 - 2\sqrt{3} \cdot 5^2 = 100\sqrt{3} - 50\sqrt{3} = 50\sqrt{3}cm^2$$

Άσκηση 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$ και $g(x) = \sqrt{x} - 1$.

- I. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι ίσες.
- II. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- III. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
- IV. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

Λύση

- I. Οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, το διάστημα $[0, +\infty)$.

Επίσης

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{\sqrt{x+1}} = \frac{(\sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x} - 1 = g(x),$$

άρα $f = g$.

- II. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} - \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1 - 1 = 0.$$

- III. Υπολογίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης f και έχουμε:

για $x > 0$,

$$f'(x) = (\sqrt{x} - 1)' = (\sqrt{x})' - (1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, το διάστημα $[0, +\infty)$.

- IV. Έχουμε

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = 1.$$

Άρα αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$, τότε ισχύει

$$\varepsilon\phi\omega = 1, \text{ άρα } \omega = \frac{\pi}{4}.$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 5x^2 + a \cdot x + 4$, $x \in \mathbb{R}$ όπου a μια πραγματική σταθερά .

- I. Να βρείτε το a ώστε ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x να μηδενίζεται για $x = \frac{1}{3}$.
- II. Για $a = 3$ Να βρείτε για ποια τιμή του x ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

Λύση

- I. Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι η παράγωγός της,

$$f'(x) = (x^3 - 5x^2 + a \cdot x + 4)' = 3x^2 - 10x + a ,$$

οπότε

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 10 \cdot \frac{1}{3} + a = 0 \Leftrightarrow a = 3 .$$

- II. Έχουμε

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3 ,$$

οπότε για να βρούμε σε ποιο σημείο γίνεται ελάχιστος θα πρέπει να βρούμε το ελάχιστο της f' .

Έτσι παραγωγίζουμε την f' και έχουμε:

$$f''(x) = (3x^2 - 10x + 3)' = 6x - 10 .$$

Επίσης

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} ,$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 10 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3} \text{ και } f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6x - 10 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{3} \text{ οπότε :}$$

η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$, άρα

παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \frac{5}{3}$.

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος στο $x = \frac{5}{3}$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$.

- I. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- II. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης f .
- III. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- IV. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$.

Λύση

- I. Για να ορίζεται η f πρέπει $x^2 - 2x + 3 > 0$.

Όμως το τριώνυμο $x^2 - 2x + 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$, άρα $x^2 - 2x + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το \mathbb{R} .

- II. Η συνάρτηση f προκύπτει αν στη συνάρτηση $h(x) = \ln x$ αντικαταστήσουμε το x με τη συνάρτηση $g(x) = x^2 - 2x + 3$, δηλαδή είναι $f(x) = h(g(x))$, οπότε για την παράγωγο έχουμε $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 3} \cdot (x^2 - 2x + 3)' = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3}$.

- III. Έχουμε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3} = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3} > 0 \Leftrightarrow x > 1 \quad (\text{αφού } x^2 - 2x + 3 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}) \text{ και}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3} < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

X	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$			

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, το $f(1) = \ln(1^2 - 2 \cdot 1 + 3) = \ln 2$

IV. Ισχύει

$$\frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \frac{2x - 2}{(x^2 - 2x + 3) \cdot (x^2 - 1)} = \frac{2(x-1)}{(x^2 - 2x + 3) \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \frac{2}{(x^2 - 2x + 3) \cdot (x+1)},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x^2 - 2x + 3) \cdot (x+1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x^2 + 12x + 12$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^3 + 8}$.

β) Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Λύση

α) Παραγοντοποιούμε την $f(x)$ με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος Horner και έχουμε:

$$f(x) = (x+2) \cdot (x^2 + 3x + 6) \text{ και}$$

1	5	12	12	$\rho = -2$
	-2	-6	-12	
1	3	6	0	

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^3 + 8} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2) \cdot (x^2 + 3x + 6)}{(x+2) \cdot (x^2 - 2x + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 6}{x^2 - 2x + 4} = \frac{(-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 6}{(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f σε οποιοδήποτε σημείο $M(x, f(x))$, δίνεται από τον τύπο $f'(x) = 3x^2 + 10x + 12$, $x \in \mathbb{R}$.

Συμβολίζουμε με $\lambda(x) = 3x^2 + 10x + 12$, $x \in \mathbb{R}$ τη συνάρτηση που εκφράζει το συντελεστή διεύθυνσης και μελετάμε τα ακρότατα της.

Η παράγωγος της συνάρτησης $\lambda(x)$ είναι $\lambda'(x) = 6x + 10$, $x \in \mathbb{R}$.

- $\lambda'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$.
- $\lambda'(x) > 0 \Leftrightarrow 6x + 10 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{3}$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της $\lambda(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

X	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	$+\infty$
$\lambda'(x)$	-	○	+
$\lambda(x)$			

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση $\lambda(x)$:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{5}{3}, +\infty\right)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right]$.
- Έχει ελάχιστο για $x = -\frac{5}{3}$.

Είναι

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3}\right)^3 + 5 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 12 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 12 = -\frac{125}{27} + \frac{125}{9} - 20 + 12 = \frac{-216 - 125 + 375}{27} = \frac{34}{27}$$

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f γίνεται

ελάχιστος στο σημείο $M\left(-\frac{5}{3}, f\left(-\frac{5}{3}\right)\right)$, δηλαδή στο $M\left(-\frac{5}{3}, \frac{34}{27}\right)$.

Άσκηση 8

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = x^3 + \alpha x^2 - \beta x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, στο σημείο της $M\left(-1, \frac{11}{2}\right)$, είναι παράλληλη

στον άξονα $x'x$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -\frac{3}{2}$ και $\beta = 6$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{f'(x) + 6x}$.

Λύση

α) Η παράγωγος της f είναι η $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x - \beta$, $x \in \mathbb{R}$.

Το σημείο $M\left(-1, \frac{11}{2}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , άρα

$$f(-1) = \frac{11}{2} \Rightarrow -1 + \alpha + \beta + 2 = \frac{11}{2} \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta = 9 \quad (1)$$

Αφού η εφαπτομένη στο σημείο $M\left(-1, \frac{11}{2}\right)$, είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, θα ισχύει

$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 3 \quad (2).$$

Αν λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτει $\beta = 6$ και $\alpha = -\frac{3}{2}$.

β) Αντικαθιστώντας τα α και β από το α) ερώτημα είναι $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ και

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 6 > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0 \quad (1)$

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 2$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x^2 - x - 2$	$+$	\circ	$-$	\circ	$+$

Άρα η ανίσωση (1) αληθεύει για $x < -1$ ή $x > 2$. Το ίδιο ισχύει και για την $f'(x) > 0$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

X	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	○	+
$f(x)$				

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f :

- Είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[2, +\infty)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 2]$.
- Έχει τοπικό μέγιστο το

$$f(-1) = (-1)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 2 = -1 - \frac{3}{2} + 6 + 2 = 7 - \frac{3}{2} = \frac{11}{2} \text{ και τοπικό ελάχιστο}$$

$$\text{το } f(2) = 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = 8 - 6 - 12 + 2 = -8.$$

γ) Παραγοντοποιούμε την $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 = \frac{2x^3 - 3x^2 - 12x + 4}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος Horner και έχουμε:

$$f(x) = \frac{(x+2) \cdot (2x^2 - 7x + 2)}{2}.$$

2	-3	-12	4	$\rho = -2$
	-4	14	-4	
2	-7	2	0	

Τότε είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{f'(x) + 6x} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2) \cdot (2x^2 - 7x + 2)}{2 \cdot (3x^2 + 3x - 6)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2) \cdot (2x^2 - 7x + 2)}{2 \cdot 3(x+2) \cdot (x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 7x + 2}{6 \cdot (x-1)} = \frac{2 \cdot (-2)^2 - 7 \cdot (-2) + 2}{6 \cdot (-2-1)} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Άσκηση 9

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x} + x$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις $f'(x)$ και $f''(x)$.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 1 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Για τη μικρότερη από τις τιμές του λ που βρήκατε στο β) ερώτημα, να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .

Λύση

α) Είναι $f'(x) = e^{\lambda x} \cdot (\lambda x)' + 1 = \lambda e^{\lambda x} + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και

$$f''(x) = \lambda e^{\lambda x} \cdot (\lambda x)' = \lambda^2 e^{\lambda x}, x \in \mathbb{R}.$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 1 - 2x \Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + 1 - 2(e^{\lambda x} + x) = 1 - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + 1 - 2e^{\lambda x} - 2x = 1 - 2x \Leftrightarrow (\lambda^2 + \lambda - 2)e^{\lambda x} = 0 \stackrel{e^{\lambda x} \neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ ή } \lambda = 1$$

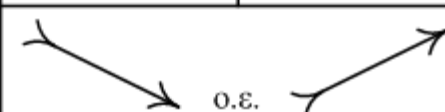
γ) Για $\lambda = -2$, έχουμε $f(x) = e^{-2x} + x$, $x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = -2e^{-2x} + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2e^{-2x} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2x = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2x = -\ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{2}$.

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2e^{-2x} + 1 > 0 \Leftrightarrow -2e^{-2x} > -1 \Leftrightarrow 2e^{-2x} < 1 \Leftrightarrow$

$$e^{-2x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2x < \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2x < -\ln 2 \Leftrightarrow x > \frac{\ln 2}{2}.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
f'(x)	-	○	+
f(x)			

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση f :

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{\ln 2}{2}\right]$.
- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\ln 2}{2}, +\infty\right)$.
- Έχει ελάχιστο το

$$f\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = e^{-2 \cdot \frac{\ln 2}{2}} + \frac{\ln 2}{2} = e^{-\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 2 + 1}{2}.$$

Άσκηση 10

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$ και η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο της $B(2, 0)$ να είναι ίση με 4.

β) Για $\alpha = 2, \beta = -4$ και $\gamma = 0$, υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + f'(x) - 4}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$.

Λύση

α) Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$, θα ισχύει

$$f(1) = -2 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = -2 \quad (1)$$

Επίσης το ίδιο θα ισχύει και για το σημείο $B(2, 0)$, δηλαδή

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \quad (2)$$

Αφού η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο $B(2, 0)$ είναι ίση με 4 θα ισχύει

$$f'(2) = 4.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε $f'(x) = 2\alpha x + \beta$. Άρα $f'(2) = 4 \Leftrightarrow 4\alpha + \beta = 4$, (3).

Αφαιρώντας την (1) από την (2) έχουμε $3\alpha + \beta = 2$ (4)

Λύνοντας το σύστημα των (3) και (4) βρίσκουμε: $\alpha = 2$ και $\beta = -4$, οπότε από την (1)

προκύπτει $2 - 4 + \gamma = -2 \Leftrightarrow \gamma = 0$.

β) Για $\alpha = 2, \beta = -4$ και $\gamma = 0$ ο τύπος της συνάρτησης είναι: $f(x) = 2x^2 - 4x$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε $f'(x) = 4x - 4$.

Τότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + f'(x) - 4}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 4x + 4x - 4 - 4}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x^2 - 4)}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+2)}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} [(x+2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})] = 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x + 2011$.

α) Βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης $\lambda(x)$ της εφαπτομένης της καμπύλης της f σε κάθε σημείο της $M(x, f(x))$.

β) Για ποια τιμή του x , ο συντελεστής διεύθυνσης $\lambda(x)$ γίνεται ελάχιστος;

γ) Υπολογίστε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$.

δ) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο $A = \mathbb{R}$

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f σε κάθε σημείο της $M(x, f(x))$ είναι ο παράγωγος αριθμός $f'(x)$, οπότε έχουμε

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 6x + 2011)' = (x^3)' + (3x^2)' - (6x)' + (2011)' = 3x^2 + 6x - 6 = \lambda(x)$$

β) Ζητάμε τις τιμές του x για τις οποίες η συνάρτηση $\lambda(x) = 3x^2 + 6x - 6$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο.

Έχουμε $\lambda'(x) = (3x^2 + 6x - 6)' = 6x + 6$

$$\text{Λύνουμε την εξίσωση } f(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6x = -6 \Leftrightarrow \frac{\cancel{6}^1 x}{\cancel{6}^1} = -\frac{\cancel{6}^1}{\cancel{6}^1} \Leftrightarrow x = -1$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της λ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
λ'	-	○	+
λ			

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η $\lambda(x)$:

- Είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$, αφού $\lambda'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$
- Είναι γν. αύξουσα στο $[-1, +\infty)$, αφού $\lambda'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$
- Έχει ελάχιστο στο $x = -1$, το $\lambda(-1) = -9$.

γ) Από τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης f έχουμε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

$$\text{Έτσι έχουμε } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 6 = -9$$

δ) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , σε σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$

δίνεται από τον τύπο $y = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, (1)

Για να την προσδιορίσουμε, αρκεί να υπολογίσουμε τους αριθμούς α, β .

Ξέρουμε ότι: $\alpha = f'(-1) \stackrel{(\gamma)}{=} -9$, (2) οπότε η (1) από (2) γίνεται: $y = -9x + \beta$, (3)

Το σημείο επαφής είναι το $A(-1, f(-1))$ ή $A(-1, 2019)$. Επειδή το σημείο A ανήκει στην εφαπτομένη, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της (3), οπότε έχουμε: $2019 = -9 \cdot (-1) + \beta \Leftrightarrow \beta = 2010$. Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = -9x + 2010$

Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha \ln x + \beta x$, $x > 0$ και $\alpha, \beta > 0$.

- α) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.
- β) Βρείτε τα σημεία A και B που η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB .
- δ) Αν $\beta = (\alpha - 1)^2$, βρείτε το α ώστε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του παραπάνω τριγώνου να είναι μέγιστο.

Λύση

Πρέπει $x > 0$, άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (0, +\infty)$

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , σε σημείο της με τετμημένη

$$x_0 = 1 \text{ δίνεται από τον τύπο } y = \kappa x + \lambda, \kappa, \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Η συνάρτηση f έχει παράγωγο την $f'(x) = (\alpha \ln x + \beta x)' = \alpha(\ln x)' + \beta(x)' = \alpha \frac{1}{x} + \beta$

Για να την προσδιορίσουμε, αρκεί να υπολογίσουμε τους αριθμούς κ, λ .

Ξέρουμε ότι: $y = f'(1) = \alpha + \beta$, (2) οπότε η (1) από (2) γίνεται: $y = (\alpha + \beta)x + \lambda$, (3)

Το σημείο επαφής είναι το $A(1, f(1))$ ή $A(1, \beta)$. Επειδή το σημείο A ανήκει στην εφαπτομένη, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της (3), οπότε έχουμε:

$$\beta = (\alpha + \beta) \cdot 1 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = -\alpha.$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = (\alpha + \beta)x - \alpha$

β) Το σημείο τομής της ευθείας $y = (\alpha + \beta)x - \alpha$ με τον άξονα $y'y$ βρίσκεται αν θέσουμε,

όπου $x = 0$ άρα $y = (\alpha + \beta) \cdot 0 - \alpha \Rightarrow y = -\alpha$ οπότε έχουμε το σημείο $B(0, -\alpha)$

Το σημείο τομής της ευθείας $y = (\alpha + \beta)x - \alpha$ με τον άξονα $x'x$ βρίσκεται αν θέσουμε όπου

$$y = 0 \text{ άρα } 0 = (\alpha + \beta)x - \alpha \Rightarrow (\alpha + \beta)x = \alpha \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \alpha + \beta \neq 0,$$

($\alpha + \beta > 0$ επειδή $\alpha, \beta > 0$) οπότε έχουμε το σημείο $A\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}, 0\right)$

γ) Το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο με τη γωνία $\hat{O} = 90^\circ$, οπότε το εμβαδόν του τριγώνου

$$(OAB) = \frac{(OA)(OB)}{2} = \frac{\left| \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right| \left| -\alpha \right|}{2} = \frac{1}{2} \left| \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right| \left| \alpha \right| \text{ και επειδή } \alpha, \beta > 0 \text{ θα έχουμε}$$

$$(OAB) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)}$$

δ) Για $\beta = (\alpha-1)^2$, το εμβαδόν (OAB) γίνεται

$$(O\hat{A}B) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{(\alpha+(\alpha-1)^2)} = \frac{\alpha^2}{2(\alpha+(\alpha^2-2\alpha+1))} = \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2-\alpha+1)}$$

$$\begin{aligned} \text{Για κάθε } \alpha > 0 \text{ είναι } E'(\alpha) &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2-\alpha+1} \right)' = \frac{1}{2} \frac{(\alpha^2)'(\alpha^2-\alpha+1) - \alpha^2(\alpha^2-\alpha+1)'}{(\alpha^2-\alpha+1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2\alpha(\alpha^2-\alpha+1) - \alpha^2(2\alpha-1)}{(\alpha^2-\alpha+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{-\alpha^2+2\alpha}{(\alpha^2-\alpha+1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Έχουμε } E'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{-\alpha^2+2\alpha}{(\alpha^2-\alpha+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -\alpha^2+2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(2-\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \alpha = 2$$

$$\text{Επίσης } E'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow -\alpha^2+2\alpha > 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 2.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

α	0	2	$+\infty$
$E'(\alpha)$	+	○	-
$E(\alpha)$			

Άρα το εμβαδόν $E(\alpha)$ παρουσιάζει μέγιστο για $\alpha = 2$.

Άσκηση 13

Μία βιομηχανία παράγει ηλιακούς θερμοσίφωνες. Το κόστος $K(x)$ σε ευρώ για την παραγωγή x προϊόντων σε μία ημέρα δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο

$$K(x) = 50x + 100 - \frac{x^3}{3}, \quad x \in [0, 50].$$

Αν οι εισπράξεις από την πώληση των x προϊόντων δίνονται από τη σχέση

$$E(x) = 100x - \frac{x^3}{2}, \quad \text{να βρείτε:}$$

- Πόσο είναι το ημερήσιο κόστος αν η βιομηχανία δεν παράγει κανένα προϊόν.
- Ποιο είναι το μέγιστο κόστος παραγωγής.
- Το συνολικό αριθμό των προϊόντων που πρέπει να πουληθούν ώστε η βιομηχανία να έχει το μέγιστο κέρδος.

Λύση

α) Αν η βιομηχανία δεν παράγει κανένα προϊόν θα έχουμε $x = 0$ προϊόντα, οπότε θα

$$\text{έχουμε } K(0) = 50 \cdot 0 + 100 - \frac{0^3}{3} = 100 \text{ ευρώ}$$

β) Η παράγωγος της $K(x) = 50x + 100 - \frac{x^3}{3}$ με $x \in [0, 50]$ είναι

$$K'(x) = (50x)' + (100)' - \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = 50 - \frac{3}{3}x^2 = 50 - x^2$$

$$\bullet \quad K'(x) = 50 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 25} \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2} \in [0, 50]$$

$$\bullet \quad K'(x) > 0 \Leftrightarrow 50 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 50 \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} 0 \leq x < \sqrt{50} \Leftrightarrow 0 \leq x < 5\sqrt{2}$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της $K(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	$5\sqrt{2}$	50
K'(x)	+	○	-
K(x)			

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η $K(x)$:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 5\sqrt{2}]$, γιατί $K'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 5\sqrt{2})$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[5\sqrt{2}, 50]$, γιατί $K'(x) < 0$ για κάθε $x \in (5\sqrt{2}, 50)$
- Έχει μέγιστο το

$$K(5\sqrt{2}) = 50 \cdot 5\sqrt{2} + 100 - \frac{(5\sqrt{2})^3}{3} = 250\sqrt{2} + 100 - \frac{250}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{500}{3}\sqrt{2} - 100.$$

Άρα το μέγιστο συνολικό κόστος είναι $\frac{500}{3}\sqrt{2} + 100$ € και πραγματοποιείται όταν $x = 5\sqrt{2}$

γ) Το κέρδος δίνεται από τη συνάρτηση

$$P(x) = E(x) - K(x) = 100x - \frac{x^3}{2} - (50x + 100 - \frac{x^3}{3}) = 100x - \frac{x^3}{2} - 50x - 100 + \frac{x^3}{3} = 50x - \frac{x^3}{6} - 100$$

Η παράγωγος της $P(x) = 50x - \frac{x^3}{6} - 100$ με $x \in [0, 50]$ είναι

$$P'(x) = (50x)' - (\frac{1}{6}x^3)' - (100)' = 50 - \frac{3}{6}x^2 = 50 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{100 - x^2}{2}$$

$$P'(x) = \frac{100 - x^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = 10 \in [0, 50]$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της $P(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	10	50
P'(x)	+	○	-
P(x)			

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η $P(x)$:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,10]$, αφού $P'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,10)$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[10,50]$ αφού $P'(x) < 0$ για κάθε $x \in (10,50)$
- Έχει μέγιστο το

$$P(10) = 50 \cdot 10 - \frac{10^3}{6} - 100 = 500 - \frac{500}{3} - 100 = 400 - \frac{500}{3} = \frac{1200 - 500}{3} = \frac{700}{3}.$$

Άρα το μέγιστο συνολικό κέρδος είναι $\frac{700}{3}$ € και πραγματοποιείται όταν $x = 10$

Άσκηση 14

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f(3+h) - f(3) = h^2 + 8h \text{ για κάθε } h \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$ με $f'(3) = 8$
β) Αν $f(4) = 24$, τότε:
i) Να αποδείξετε ότι $f(3) = 15$
ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 3$

Λύση

α) Για κάθε $h \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{h^2 + 8h}{h} = \frac{h(h+8)}{h} = h+8$$

Είναι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+8) = 8$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$ με $f'(3) = 8$

β) i) Η δοθείσα σχέση ισχύει για κάθε $h \in \mathbb{R}$ άρα θα ισχύει και για $h = 1$, οπότε έχουμε:

$$f(3+1) - f(3) = 1^2 + 8 \cdot 1 \Leftrightarrow f(4) - f(3) = 9 \Leftrightarrow \overset{f(4)=24}{24 - f(3)} = 9 \Leftrightarrow f(3) = 15$$

ii) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 3$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(3) = 8$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $y = 8x + \beta$.

Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $M(3, f(3))$, δηλαδή από το $M(3, 15)$, ισχύει η σχέση $15 = 8 \cdot 3 + \beta$, οπότε $\beta = -9$

Άρα η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι $y = 8x - 9$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sqrt{x}$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο $A(9, f(9))$ της C_f .
β) Αν η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες στα σημεία Β και Γ να υπολογίσετε το μήκος της ΒΓ.
γ) Από το σημείο Α φέρνουμε κάθετη στον άξονα $x'x$ η οποία τον τέμνει στο σημείο Δ. Να βρείτε το σημείο της καμπύλης $y = 3\sqrt{x}$ το οποίο είναι το πλησιέστερο στο σημείο Δ.

Λύση

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x \geq 0$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι: $A = [0, +\infty)$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(9, f(9))$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 9$.

Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = 3\sqrt{x}$ είναι:

$$f'(x) = (3\sqrt{x})' = 3 \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ για κάθε } x > 0 \quad (1)$$

Για $x = 9$ από την (1) έχουμε: $f'(9) = 3 \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2}$

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο $A(9, f(9))$ είναι

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + \beta$.

Επειδή όμως το σημείο $A(9, f(9))$ ανήκει στην εφαπτομένη και $y = f(9) = 3\sqrt{9} = 9$, έχουμε:

$$9 = \frac{1}{2} \cdot 9 + \beta \text{ όπου } \beta = 9 - \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{9}{2}$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

β) Από την εξίσωση της εφαπτομένης

- για $x = 0$ έχουμε $y = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$

- για $y = 0$ έχουμε $0 = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}, \frac{1}{2}x = -\frac{9}{2}, x = -9$

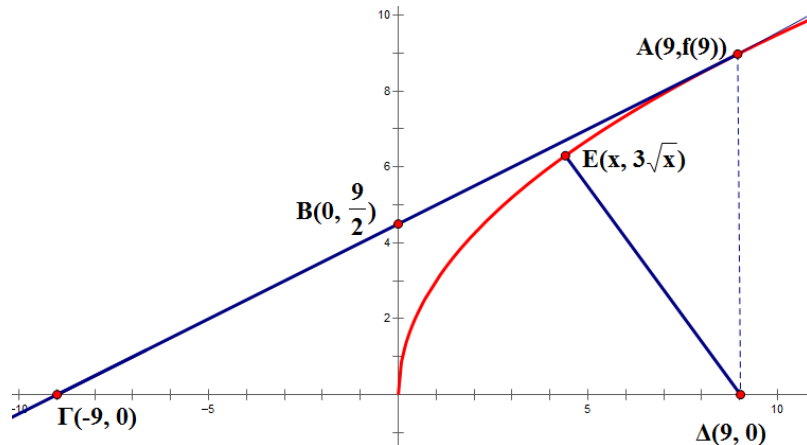
Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης τέμνει τους άξονες στα σημεία $B(0, \frac{9}{2})$ και

$\Gamma(-9, 0)$.

Το μήκος της ΒΓ είναι:

$$B\Gamma = \sqrt{(-9)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{81 + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 81}{4}} = \frac{9\sqrt{5}}{2}$$

γ) Η κάθετη από το Α στον άξονα x τον τέμνει στο σημείο $\Delta(9,0)$. Έστω Ε το σημείο της καμπύλης $y = 3\sqrt{x}$, $x \geq 0$ το οποίο είναι το πλησιέστερο στο σημείο Δ. Επειδή το σημείο Ε ανήκει στην καμπύλη είναι $E(x, 3\sqrt{x})$.



Έχουμε

$$(\Delta E) = \sqrt{(x-9)^2 + (3\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 18x + 81 + 9x} = \sqrt{x^2 - 9x + 81}$$

Για να βρούμε τις τιμές του x για τις οποίες η συνάρτηση $d(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 81}$ έχει ελάχιστο, βρίσκουμε πρώτα την παράγωγό της. Είναι:

$$d'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 9x + 81}\right)' = \frac{2x - 9}{2\sqrt{x^2 - 9x + 81}}$$

Κατόπιν μηδενίζουμε την παράγωγο.

Έχουμε:

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων της $d'(x)$

x	0	$\frac{9}{2}$	$+\infty$
$d'(x)$	-	○	+
$d(x)$	↘ Ελάχιστο ↗		

από τον οποίο έχουμε ότι η $d'(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \frac{9}{2}$.

Άρα το πλησιέστερο σημείο της καμπύλης στο σημείο Δ του οριζόντιου άξονα

είναι το $E\left(\frac{9}{2}, 9\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2 + (\mu - 1)x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη ευθεία στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο $A(2, 4)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 5x - 6$

α) Να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών λ, μ .

β) Για $\lambda = 1$ και $\mu = 2$ να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης.

Λύση

α) Αφού το σημείο $A(2, 4)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f οι συντεταγμένες του θα την επαληθεύουν οπότε θα είναι:

$$f(2) = 4 \Leftrightarrow \lambda \cdot 2^2 + (\mu - 1) \cdot 2 - 2 = 4 \Leftrightarrow 4\lambda + 2\mu - 2 - 2 = 4 \Leftrightarrow 4\lambda + 2\mu = 8 \quad (1)$$

Αφού η εφαπτομένη ευθεία στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο $A(2, 4)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 5x - 6$ οι δύο ευθείες θα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης C_f είναι η παράγωγος της συνάρτησης στο σημείο $x_0 = 2$ άρα $\lambda = f'(2) = 5$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\lambda x + (\mu - 1) \Leftrightarrow f'(x) = 2\lambda x + \mu - 1 \\ f'(2) &= 2\lambda \cdot 2 + \mu - 1 \Leftrightarrow f'(2) = 5 \Leftrightarrow 4\lambda + \mu = 6 \quad (2) \end{aligned}$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} 4\lambda + 2\mu = 8 \\ 4\lambda + \mu = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda + 2\mu = 8 \\ -4\lambda - \mu = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

β) Αν $\lambda = 1$ και $\mu = 2$ τότε η συνάρτηση f γίνεται:

$$f(x) = 1 \cdot x^2 + (2 - 1)x - 2 \Leftrightarrow f(x) = x^2 + x - 2 \quad \text{και} \quad f'(x) = 2x + 1$$

Για να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης f πρώτα βρίσκουμε τις ρίζες της παραγώγου

$$\text{δηλαδή λύνουμε την εξίσωση } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Η παράγωγος γίνεται θετική όταν $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ και

αρνητική όταν $x < -\frac{1}{2}$

Στη συνέχεια διαμορφώνουμε πίνακα προσήμων της παραγώγου

X	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	<p>Ελάχιστο $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$</p>		

Από τον πίνακα φαίνεται ότι η συνάρτηση για $x = -\frac{1}{2}$ έχει ελάχιστο το

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$$

Άσκηση 3

Ο διευθυντής μιας θεατρικής παράστασης έχει διαπιστώσει ότι όταν η τιμή του εισιτηρίου είναι 8 ευρώ τότε την παράσταση τη βλέπουν την παράσταση 500 θεατές την εβδομάδα. Κάθε φορά που το εισιτήριο μειώνεται κατά 0,50 ευρώ την εβδομάδα οι θεατές αυξάνονται εβδομαδιαίως κατά 50.

α) Να δείξετε ότι ο αριθμός των θεατών ως συνάρτηση της τιμής x του εισιτηρίου είναι

$$f(x) = 1300 - 100x$$

β) Πόσο πρέπει να είναι το εισιτήριο ώστε το θέατρο να έχει τη μέγιστη δυνατή είσπραξη την εβδομάδα;

γ) Πόσοι θεατές παρακολουθούν τότε την παράσταση και πόσα ευρώ είναι μεγαλύτερη η είσπραξη τότε από την είσπραξη όταν το εισιτήριο είναι 8 ευρώ;

Λύση

α) Αν η μείωση του εισιτηρίου γίνει α φορές το ποσό των 0,5 ευρώ, τότε η τιμή x του

$$\text{εισιτηρίου θα είναι } x = 8 - 0,5\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{8-x}{0,5}, (1)$$

Οι θεατές θα είναι $500 + 50\alpha$ και από την σχέση (1) θα έχουμε ότι το πλήθος των θεατών

$$\text{θα είναι } f(x) = 500 + \frac{8-x}{0,5} \cdot 50 = 500 + (8-x) \cdot 100 = 500 + 800 - 100x = 1300 - 100x$$

β) Επειδή: Είσπραξη = (αριθμός θεατών) \times (τιμή εισιτηρίου)

Η είσπραξη του θεάτρου είναι:

$$E(x) = f(x) \cdot x = (1300 - 100x)x, \quad E(x) = 1300x - 100x^2$$

Για να βρούμε πότε η είσπραξη γίνεται μέγιστη πρώτα θα βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης $E(x)$.

$$E'(x) = (1300x - 100x^2)' = 1300 - 200x$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις ρίζες της παραγώγου, δηλαδή λύνουμε την εξίσωση

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6,5$$

Η παράγωγος γίνεται θετική όταν $1300 - 200x > 0 \Leftrightarrow x < 6,5$ και αρνητική όταν $x > 6,5$

Κατόπιν φτιάχνουμε πίνακα προσήμων της παραγώγου με την υπενθύμιση ότι η τιμή του εισιτηρίου κυμαίνεται από 0 έως 8 ευρώ.

x	0	6,5	8
E'(x)	+	○	-
E(x)	Μέγιστο (6,5 , 4200)		

Από τον πίνακα φαίνεται ότι είσπραξη γίνεται μέγιστη όταν η τιμή του εισιτηρίου είναι 6, 5 ευρώ.

γ) Η είσπραξη είναι τότε $E(6,5) = 1300 \cdot 6,5 - 100 \cdot 6,5^2 = 8400 - 4225 = 4225$ ευρώ.

Την παράσταση την παρακολουθούν τότε $4225 : 6,5 = 650$ θεατές την εβδομάδα.

Όταν η τιμή του εισιτηρίου είναι 8 ευρώ την παράσταση παρακολουθούν 500 θεατές και η είσπραξη είναι:

$$E(8) = 500 \cdot 8 = 4000 \text{ ευρώ}$$

Άρα η είσπραξη όταν το εισιτήριο είναι 6,5 ευρώ είναι 225 ευρώ μεγαλύτερη απ' αυτή όταν το εισιτήριο είναι 8 ευρώ.

Άσκηση4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda \cdot x^2 + 5x + 4$ με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και λ μια πραγματική σταθερά.

i. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(-2, f(-2))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = x + 3$, τότε

α) να υπολογίσετε το λ

β) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης.

ii. Αν $\lambda = 1$, τότε

α) να βρείτε τα σημεία που η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες

β) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

γ) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{\sqrt{x+5}-1}$.

Λύση

i.

α) Η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = (\lambda \cdot x^2 + 5x + 4)' = 2\lambda \cdot x + 5$.

Αφού η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(-2, f(-2))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = x + 3$, ισχύει

$$f'(-2) = 1 \Leftrightarrow -4\lambda + 5 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

β) Η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης 1, άρα θα έχει εξίσωση $y = x + \beta$. Επίσης το σημείο επαφής $A(-2, f(-2))$ ανήκει και στην εφαπτομένη, που σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της και $f(-2) = (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 4 = -2$, άρα $-2 = -2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 0$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = x$.

ii.

α) Για να βρούμε σε ποια σημεία τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ή } x = -4)$$

άρα τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(-4, 0)$.

Τον άξονα $y'y$ τον τέμνει στο σημείο $\Gamma(0, 4)$ αφού $f(0) = 4$.

β) Έχουμε $f'(x) = 2x + 5$, οπότε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2},$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2} \text{ και}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}.$$

X	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
f'(x)	-	○	+
f(x)			

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$,

άρα παρουσιάζει στο $x = -\frac{5}{2}$ ολικό ελάχιστο το $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{9}{4}$.

γ) Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x)}{\sqrt{x+5}-1} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2+5x+4}{\sqrt{x+5}-1} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+1) \cdot (x+4) \cdot (\sqrt{x+5}+1)}{(\sqrt{x+5}-1) \cdot (\sqrt{x+5}+1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+1) \cdot (x+4) \cdot (\sqrt{x+5}+1)}{(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4} (x+1)(\sqrt{x+5}+1) = -6.$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x} + \mu \cdot e^x, x \in \mathbb{R}$ όπου ο αριθμός λ είναι το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x}{x^2 - x}$ και ο

αριθμός μ η ελάχιστη τιμή της συνάρτηση $g(x) = x \cdot \ln x - x, x > 0$.

- I. Να υπολογίσετε τους αριθμούς λ και μ .
- II. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.
- III. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(e^{-3}, g(e^{-3}))$.

Λύση

I. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2) \cdot x}{(x-1) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2}{x-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)} = -2, \text{ άρα } \lambda = -2.$$

Επίσης

$$g'(x) = (x \cdot \ln x - x)' = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' - 1 = \ln x.$$

Ισχύει

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1,$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \stackrel{\text{ln γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} 0 < x < 1 \text{ και}$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \stackrel{\text{ln γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x > 1.$$

Επομένως η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο

$[1, +\infty)$, άρα παρουσιάζει στο $x = 1$ ολικό ελάχιστο το $g(1) = -1$, άρα $\mu = -1$.

II. Η συνάρτηση f γίνεται $f(x) = e^{-2x} - e^x$, οπότε

$$f'(x) = (e^{-2x} - e^x)' = (e^{-2x})' - (e^x)' = e^{-2x} \cdot (-2x)' - e^x = -2e^{-2x} - e^x = -(2e^{-2x} + e^x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το } \mathbb{R}, \text{ οπότε δεν έχει ακρότατα.}$$

III. Έστω λ_1 ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ και λ_2 αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(e^{-3}, g(e^{-3}))$. Για να είναι παράλληλες οι εφαπτόμενες αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2$.

Έχουμε

$$\lambda_1 = f'(0) = -2e^0 - e^0 = -3 \text{ και } \lambda_2 = g'(e^{-3}) = \ln(e^{-3}) = -3.$$

Άρα $\lambda_1 = \lambda_2$, οπότε αποδείχτηκε.

Άσκηση 6

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $x=1$ με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot (\sqrt{x+1} - \sqrt{2})}{x-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- I. Να βρείτε την τιμή $f(1)$.
- II. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$, (1)
 - α) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$,
 - β) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.
 - γ) Να δείξετε ότι η γραφική παράστασή της f έχει τρία σημεία όπου η εφαπτομένη είναι οριζόντια.

Λύση

- I. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot (\sqrt{x+1} - \sqrt{2})}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot (\sqrt{x+1} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{(x-1) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{άρα } \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

και επειδή η f είναι συνεχής στο $x=1$ έχουμε $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

- II.

α) Είναι $f'(1) = (1-2) \cdot (1-3) \cdot (1-4) = -6$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης έχει τη μορφή $y = -6x + \beta$ (2)

και το σημείο επαφής A έχει συντεταγμένες $A(1, 2)$ οι οποίες επαληθεύουν την εξίσωση (2),

άρα

$$2 = -6 + \beta \Leftrightarrow \beta = 8, \text{ επομένως η (1) γίνεται } y = -6x + 8.$$

β) Σχηματίζουμε το πινακάκι προσήμου για την f

X	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$		
$x-2$	-	○	+	+	+		
$x-3$	-	-	○	+	+		
$x-4$	-	-	-	○	+		
$f'(x)$	-	○	+	○	-	○	+
$f(x)$							

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2]$ και $[3, 4]$ και γνησίως αύξουσα στα $[2, 3]$ και $[4, +\infty)$, οπότε έχει δύο τοπικά ελάχιστα τα $f(2)$ και $f(4)$ και ένα τοπικό μέγιστο το $f(3)$.

γ) Για να βρούμε σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης της f η εφαπτομένη είναι οριζόντια, αρκεί να βρούμε σε ποια σημεία μηδενίζεται η παράγωγος, έτσι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x=2 \text{ ή } x=3 \text{ ή } x=4)$$

Άρα στα σημεία $B(2, f(2))$, $\Gamma(3, f(3))$ και $\Delta(4, f(4))$ η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f είναι οριζόντιες.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις $f'(x)$ και $f''(x)$.

β) Να δείξετε ότι $-2f'(x) - f''(x) = f(x)$.

γ) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , στο σημείο της $A(\alpha, f(\alpha))$

είναι η ευθεία $\varepsilon: y = -\frac{\alpha}{e^\alpha}x + \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{e^\alpha}$.

δ) Να βρείτε την τιμή του $\alpha > 0$, για την οποία η τεταγμένη του σημείου τομής της εφαπτομένης του (γ) ερωτήματος, με τον άξονα $y'y$ είναι μέγιστη.

Λύση

α) Είναι

$$f'(x) = \frac{(x+1)' \cdot e^x - (x+1) \cdot (e^x)'}{e^{2x}} = \frac{e^x - (x+1) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x \cdot (1-x-1)}{e^{2x}} = -\frac{x}{e^x}, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } f''(x) = -\frac{(x)' \cdot e^x - x \cdot (e^x)'}{e^{2x}} = -\frac{e^x - x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x \cdot (x-1)}{e^{2x}} = \frac{x-1}{e^x}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\beta) \text{ Έχουμε } -2f'(x) - f''(x) = \frac{2x}{e^x} - \frac{x-1}{e^x} = \frac{2x-x+1}{e^x} = \frac{x+1}{e^x} = f(x).$$

γ) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ (1).

$$\text{Είναι } \lambda = f'(\alpha) = -\frac{\alpha}{e^\alpha}. \text{ Έτσι η (1) γίνεται } \varepsilon: y = -\frac{\alpha}{e^\alpha}x + \beta \quad (2).$$

Επίσης το σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ ανήκει στην ε , άρα ισχύει:

$$f(\alpha) = -\frac{\alpha}{e^\alpha} \cdot \alpha + \beta \Rightarrow \frac{\alpha+1}{e^\alpha} = -\frac{\alpha^2}{e^\alpha} + \beta \Rightarrow \beta = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{e^\alpha}.$$

$$\text{Τελικά η σχέση (2) γίνεται } \varepsilon: y = -\frac{\alpha}{e^\alpha}x + \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{e^\alpha}.$$

δ) Στην εξίσωση της εφαπτομένης θέτουμε $x = 0$ και βρίσκουμε

$$y = -\frac{\alpha}{e^\alpha} \cdot 0 + \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{e^\alpha} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{e^\alpha}.$$

Άρα η τεταγμένη του σημείου τομής της εφαπτομένης με τον άξονα $y'y$ είναι ίση με

$$\frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{e^\alpha}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\alpha) = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{e^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{Η παράγωγος της } g \text{ είναι } g'(\alpha) &= \frac{(\alpha^2 + \alpha + 1)' \cdot e^\alpha - (\alpha^2 + \alpha + 1) \cdot (e^\alpha)'}{e^{2\alpha}} = \\ &= \frac{(2\alpha + 1) \cdot e^\alpha - (\alpha^2 + \alpha + 1) \cdot e^\alpha}{e^{2\alpha}} = \frac{(2\alpha + 1 - \alpha^2 - \alpha - 1) \cdot e^\alpha}{e^{2\alpha}} = \frac{-\alpha^2 + \alpha}{e^\alpha}, \alpha > 0 \end{aligned}$$

- $g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\alpha^2 + \alpha}{e^\alpha} = 0 \Leftrightarrow -\alpha^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(1 - \alpha) = 0 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$
- $g'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \frac{-\alpha^2 + \alpha}{e^\alpha} > 0 \Leftrightarrow -\alpha^2 + \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha(1 - \alpha) > 0 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} 1 - \alpha > 0 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} 0 < \alpha < 1$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

α	0	1	$+\infty$
$g'(\alpha)$	+	○	-
$g(\alpha)$			

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση $g(\alpha)$:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.
- Έχει μέγιστο για $\alpha = 1$.

Άρα η τεταγμένη του σημείου τομής της εφαπτομένης με τον άξονα y' γίνεται μέγιστη όταν $\alpha = 1$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1) - \frac{x^2}{4}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα $x'x$, γωνία $\omega = \frac{3\pi}{4}$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να δείξετε ότι $x-1 \leq e^{\frac{x^2-4}{4}}$, για κάθε $x > 1$.

Λύση

α) Πρέπει $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $(1, +\infty)$.

β) Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το ζητούμενο σημείο της γραφικής παράστασης της f .

Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = \frac{1}{x-1} \cdot (x-1)' - \frac{x}{2} = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{2} = \frac{2-x(x-1)}{2(x-1)} = \frac{-x^2+x+2}{2(x-1)}$, $x > 1$.

Επειδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A σχηματίζει με τον άξονα $x'x$, γωνία $\omega = \frac{3\pi}{4}$, θα ισχύει

$$f'(x_0) = \varepsilon\phi \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{-x_0^2+x_0+2}{2(x_0-1)} = -1 \Leftrightarrow -x_0^2+x_0+2 = -2x_0+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0^2-3x_0=0 \Leftrightarrow x_0(x_0-3)=0 \Leftrightarrow x_0=3.$$

Επίσης έχουμε $f(3) = \ln 2 - \frac{9}{4}$. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $A\left(3, \ln 2 - \frac{9}{4}\right)$.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε $f'(x) = \frac{-x^2+x+2}{2(x-1)}$, $x > 1$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+x+2}{2(x-1)} = 0 \Leftrightarrow -x^2+x+2=0$, η οποία έχει ρίζες $x = -1$ ή $x = 2$.

Όμως ξέρουμε ότι $x > 1$, οπότε μόνο η $x = 2$ είναι δεκτή.

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+x+2}{2(x-1)} > 0 \Leftrightarrow -x^2+x+2 > 0$ (1)

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

X	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$-x^2 + x + 2$	-	○	○	-

Άρα η ανίσωση (1) αληθεύει για $-1 < x < 2$ (2).

Όμως ξέρουμε ότι $x > 1$ (3).

Από τη συναλήθευση των (2) και (3) προκύπτει ότι η ανίσωση $f'(x) > 0$ αληθεύει για $1 < x < 2$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-
$f(x)$			

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f :

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, 2]$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.
- Έχει μέγιστο το $f(2) = \ln 1 - \frac{4}{4} = -1$.

δ) Αφού η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(2) = -1$, θα ισχύει

$$f(x) \leq f(2) \Rightarrow \ln(x-1) - \frac{x^2}{4} \leq -1 \Rightarrow \ln(x-1) \leq \frac{x^2}{4} - 1 \Rightarrow$$

$$\ln(x-1) \leq \frac{x^2-4}{4} \Rightarrow \ln(x-1) \leq \ln e^{\frac{x^2-4}{4}} \quad \text{επειδή } \ln x \text{ γν. αυξ} \Rightarrow x-1 \leq e^{\frac{x^2-4}{4}}, \text{ για κάθε } x > 1.$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \kappa$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη ε_1 της γραφικής παράστασης στο σημείο με τεταγμένη -4 , είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\kappa = -4$ και να βρείτε την εξίσωση αυτής της εφαπτομένης.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ε_2 της γραφικής παράστασης της f σε οποιοδήποτε σημείο της $A(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha > 0$ είναι η $y = 2\alpha x - \alpha^2 - 4$.

γ) Αν η εφαπτομένη ε_2 τέμνει την ε_1 στο σημείο B και τον άξονα $x'x$ στο Γ , να δείξετε ότι το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τραπεζίου ΟΓΒΔ (όπου $\Delta(0, -4)$), δίνεται από τον τύπο

$$E(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + 4}{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

δ) Να βρεθεί το σημείο A της γραφικής παράστασης της f για το οποίο το εμβαδό $E(\alpha)$ γίνεται ελάχιστο.

Λύση

α) Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $M(x_0, -4)$, το σημείο επαφής.

Επειδή η εφαπτομένη στο σημείο M είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, ισχύει

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0.$$

Το σημείο $M(0, -4)$, ανήκει στη γραφική παράσταση της f , άρα ισχύει $-4 = 0^2 + \kappa \Rightarrow \kappa = -4$.

Επειδή η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το M , θα είναι

$$\varepsilon_1: y = -4.$$

β) Η μορφή της εξίσωσης της εφαπτομένης είναι

$$y = \lambda x + \beta \quad (1).$$

$$\text{όπου } \lambda = f'(\alpha) = 2\alpha.$$

$$\text{Άρα η (1) γίνεται } y = 2\alpha x + \beta \quad (2).$$

Επειδή το σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ ανήκει σε αυτήν,

$$\text{έχουμε } \alpha^2 - 4 = 2\alpha \cdot \alpha + \beta \Leftrightarrow \beta = -\alpha^2 - 4.$$

Τελικά η ζητούμενη ευθεία είναι η

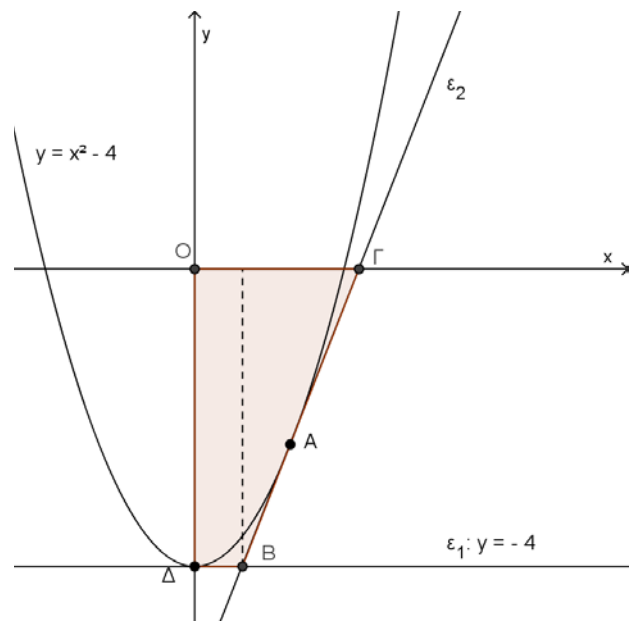
$$\varepsilon_2: y = 2\alpha x - \alpha^2 - 4.$$

γ) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f , η εφαπτομένη στο σημείο A και το τραπεζίο ΟΓΒΔ.

Στην εξίσωση της ε_2 , θέτω $y = 0$ και προκύπτει

$$0 = 2\alpha x - \alpha^2 - 4 \Leftrightarrow x = \frac{\alpha^2 + 4}{2\alpha}.$$

Άρα η ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Gamma\left(\frac{\alpha^2 + 4}{2\alpha}, 0\right)$.



Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ε_1 και ε_2 και προκύπτει

$$\begin{cases} y = 2\alpha x - \alpha^2 - 4 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 2\alpha x - \alpha^2 - 4 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha x = 0 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha^2}{2\alpha} = \frac{\alpha}{2} \\ y = -4 \end{cases}$$

Άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο $B\left(\frac{\alpha}{2}, -4\right)$.

Το εμβαδόν του ζητούμενου τραapeζίου ΟΓΒΔ είναι $E = \frac{(ΟΓ) + (ΒΔ)}{2} \cdot (ΟΔ)$, δηλαδή είναι

$$E(\alpha) = \frac{\frac{\alpha^2 + 4}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2}}{2} \cdot 4 = \frac{2\alpha^2 + 4}{4\alpha} \cdot 4 = \frac{2\alpha^2 + 4}{\alpha}, \alpha > 0.$$

δ) Η παράγωγος της συνάρτησης $E(\alpha)$ είναι

$$E'(\alpha) = \frac{(2\alpha^2 + 4)' \cdot \alpha - (2\alpha^2 + 4) \cdot (\alpha)'}{\alpha^2} = \frac{4\alpha^2 - 2\alpha^2 - 4}{\alpha^2} = \frac{2\alpha^2 - 4}{\alpha^2}, \alpha > 0.$$

- $E'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\alpha^2 - 4}{\alpha^2} = 0 \stackrel{\alpha^2 > 0}{\Leftrightarrow} 2\alpha^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 2 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \alpha = \sqrt{2}$
- $E'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \frac{2\alpha^2 - 4}{\alpha^2} > 0 \stackrel{\alpha^2 > 0}{\Leftrightarrow} 2\alpha^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > 2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2} > \sqrt{2} \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \alpha > \sqrt{2}.$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $E(\alpha)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

α	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$E'(\alpha)$		○	
$E(\alpha)$	↘ ο.ε. ↗		

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η $E(\alpha)$:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $[\sqrt{2}, +\infty)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \sqrt{2}]$.
- Έχει ελάχιστο για $\alpha = \sqrt{2}$.

$$\text{Είναι } f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 4 = 2 - 4 = -2.$$

Άρα το εμβαδόν του τραπεζίου γίνεται ελάχιστο αν φέρουμε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο της $A(\sqrt{2}, -2)$.

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)^2(1-2x)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f , στο οποίο η εφαπτομένη της έχει το μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = \frac{3}{2}$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2x - 1}{2x^2 - 3x + 1}$

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = 2(x-2)(1-2x) - 2(x-2)^2 = 2(x-2)[(1-2x) - (x-2)] = 2(x-2)(3-3x) = -6(x-2)(x-1)$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6(x-2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -6(x-2)(x-1) > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$
- $f(1) = -1$ και $f(2) = 0$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
f'(x)	-	○	+	○	-
f(x)	↘ -1		↗ 0		↘

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$
- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 2]$
- Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 1$ με τιμή $f(1) = -1$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 2$ με τιμή $f(2) = 0$

β) Αναζητούμε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση

$\lambda(x) = f'(x) = -6(x-2)(x-1)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\lambda'(x) = f''(x) = [-6(x-2)(x-1)]' = -6(x-1) - 6(x-2) = -6x + 6 - 6x + 12 = -12x + 18 = -6(2x-3)$$

Είναι:

- $\lambda'(x) = 0 \Leftrightarrow -6(2x-3) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
- $\lambda'(x) > 0 \Leftrightarrow -6(2x-3) > 0 \Leftrightarrow 2x-3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$\lambda'(x)$	+	○	-
$\lambda(x)$	↗		↘

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης $\lambda(x)$ γίνεται μέγιστος για $x = \frac{3}{2}$

$$\text{Είναι } f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 2\right)^2 \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot (-2) = -\frac{1}{2}$$

Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το $M\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$, δηλαδή το $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = \frac{3}{2}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = f'\left(\frac{3}{2}\right) = -6 \cdot \left(\frac{3}{2} - 2\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) = -6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $y = \frac{3}{2}x + \beta$.

Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$, δηλαδή από το $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,

ισχύει η σχέση $-\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} + \beta$, οπότε $\beta = -\frac{11}{4}$

Άρα η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι $y = \frac{3}{2}x - \frac{11}{4}$

δ) Είναι:

$$f(x) + 2x - 1 = (x - 2)^2(1 - 2x) - (1 - 2x) = (1 - 2x)[(x - 2)^2 - 1] = (1 - 2x)(x - 3)(x - 1)$$

- $2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1)$

Για $x \in (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, 2)$ είναι:

$$\frac{f(x) + 2x - 1}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{(1 - 2x)(x - 3)(x - 1)}{(2x - 1)(x - 1)} = -\frac{(1 - 2x)(x - 3)(x - 1)}{(1 - 2x)(x - 1)} = -(x - 3) = 3 - x$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2x - 1}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 3) = 2$

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha e^{-\frac{1}{x}}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία για τις διάφορες τιμές του α

γ) Να αποδείξετε ότι $f''(x) = \frac{1-2x}{x^4} f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

δ) Αν $\alpha > 0$ να βρείτε σε ποιο σημείο $x_0 > 0$ η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , έχει το μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $\Lambda = \mathbb{R}^*$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$f'(x) = \alpha e^{-\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x}\right)' = \alpha e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = f(x) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$$

$$\text{Άρα } f'(x) = \frac{f(x)}{x^2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \quad (1)$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι $e^{-\frac{1}{x}} > 0$, οπότε: (Στο html να γίνει εκθέτης)

- αν $\alpha > 0$ είναι $f(x) > 0$ άρα και $f'(x) > 0$
- αν $\alpha < 0$ είναι $f(x) < 0$ άρα και $f'(x) < 0$

Επομένως:

- αν $\alpha > 0$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$
- αν $\alpha < 0$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$f''(x) = \frac{f'(x) \cdot x^2 - 2xf(x)}{(x^2)^2} \stackrel{(1)}{=} \frac{\frac{f(x)}{x^2} \cdot x^2 - 2x \cdot f(x)}{x^4} = \frac{f(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{1-2x}{x^4} f(x)$$

$$\text{Άρα } f''(x) = \frac{1-2x}{x^4} f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \quad (1)$$

δ) Αναζητούμε την τιμή του $x \in (0, +\infty)$ για την οποία η συνάρτηση

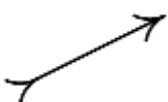
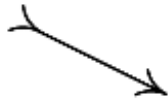
$$\lambda(x) = f'(x) = \frac{f(x)}{x^2} \text{ παρουσιάζει ολικό μέγιστο.}$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\lambda'(x) = f''(x) = \frac{1-2x}{x^4} f(x)$$

Είναι:

- $\lambda'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x^4} f(x) = 0 \stackrel{f(x)>0}{\Leftrightarrow} 1-2x=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
- $\lambda'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x^4} f(x) > 0 \stackrel{f(x)>0}{\Leftrightarrow} 1-2x > 0 \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\lambda'(x)$	+	○	-
$\lambda(x)$			

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης $\lambda(x)$ γίνεται μέγιστος για $x = \frac{1}{2}$

Είναι $f\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha e^{-2} = \frac{\alpha}{e^2}$

Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το $M\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, δηλαδή το $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{e^2}\right)$

Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+1}{e^{2x}}, x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι $e^{2x} \geq 2x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία η συνάρτηση f , έχει τον ελάχιστο ρυθμό μεταβολής ως προς x . Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής;

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\bullet f'(x) = \frac{(2x+1)'e^{2x} - (2x+1)(e^{2x})'}{(e^{2x})^2} = \frac{2e^{2x} - 2(2x+1)e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{(2-4x-2)e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{-4x}{e^{2x}}$$

$$\bullet f''(x) = \frac{(-4x)'e^{2x} - (-4x)(e^{2x})'}{(e^{2x})^2} = \frac{-4e^{2x} - 2(-4x)e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{(8x-4)e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{8x-4}{e^{2x}}$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = \frac{8x-4}{e^{2x}} + 4 \cdot \frac{-4x}{e^{2x}} + 4 \cdot \frac{2x+1}{e^{2x}} = \frac{8x-4-16x+8x+4}{e^{2x}} = \frac{0}{e^{2x}} = 0$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = \frac{-4x}{e^{2x}}$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$
- $f(0) = 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	\circ	$-$
$f(x)$			

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο για $x=0$ με μέγιστη τιμή $f(0)=1$

γ) Αποδείξαμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο για $x=0$ με μέγιστη τιμή

$$f(0)=1, \text{ άρα } f(x) \leq f(0) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ δηλαδή } \frac{2x+1}{e^{2x}} \leq 1 \Leftrightarrow e^{2x} \geq 2x+1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Αναζητούμε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση f , έχει τον ελάχιστο ρυθμό μεταβολής ως προς x .

Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x είναι $\varphi'(x) = f'(x) = \frac{-4x}{e^{2x}}$,

$x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi'(x) = \varphi''(x) = \frac{8x-4}{e^{2x}}$

Είναι:

- $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8x-4}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow 8x-4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
- $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{8x-4}{e^{2x}} > 0 \Leftrightarrow 8x-4 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{4}{8} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$
- $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-4 \cdot \frac{1}{2}}{e^{2 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{-2}{e} = -2e^{-1}$

X	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	○	+
$\varphi(x)$			

Άρα ο ρυθμός μεταβολής γίνεται ελάχιστος για $x = \frac{1}{2}$ και η ελάχιστη τιμή του είναι

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -2e^{-1}$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 05/04/2012