ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ – ΈΝΝΟΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ § 1.1, 1.2

ΣΤΟΧΟΙ

1. Να μπορούν να προσδιορίζουν το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα του χώρου αυτού.
2. Να μπορούν να χρησιμοποιήσουν την μέθοδο της απαρίθμησης στην επίλυση προβλημάτων.
3. Να μπορούν να εκτιμούν πότε ένα πρόβλημα της θεωρίας πιθανοτήτων, απαιτεί μια λεπτομερή κατασκευή του δειγματικού χώρου.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Δειγματικός χώρος, ενδεχόμενο, βέβαιο ενδεχόμενο, αδύνατο ενδεχόμενο, αλγεβρικός λογισμός πιθανοτήτων.
ΜΟΡΦΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ: Καθοδήγηση – ερωτήσεις
ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ: Πειραματική – Παραγωγική – Αποδεικτική.
ΕΠΟΠΤΙΚΑ ΜΕΣΑ: Πίνακας, Η/Υ, internet.
ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ Διάρκειας 2 ωρών διδασκαλίας.

Βιβλιογραφία

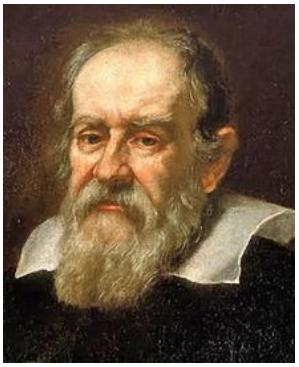
1. Bruneau O., et al (2012) : Innovation Methods for Science Education: History of Science, ICT and Inquiry Based Science Teaching, T. Frank & Time, Verlag fur wissenschaftiliche Literatur.
2. Gnedenko, B. (1973) The Theory of Probability, MIR Publishers Moscow.
3. Gorroochurn P. (2012): Problems of Probability, Wiley.
4. Graham A. J. (2006) : Exploring Probability in School Challenges for Teachnig and Learning, Mathematics Education Library, Springer.
5. Karen F., Bendegem G.P. (2007) : Philosophical Dimensions in Mathematics Education, Mathematics Education Library, Springer.
6. Kolmogorov (1950) : Foundations of Probability Theory, Chelsea, New York.
7. Laplace P.S. (1812) : Théorie analytique des probabilités, repris dans Oeuvres complètes , Gauthier-Villars (1891), tome 7.
8. Laplace P.S. (1814-1986) : Essai philosophique sur les probabilités, Paris, Christian Bourgois (1986).
9. Quetelet A. (1828) : Instructions populaires sur le calcul des probabilités, Bruxelles, Tarlier et Hayez.
10. Quetelet A. (1853) : Théorie des probabilités , Bruxelles, A. Jamar.
11. Pascal B., Fermat P. (1983) : Brief, Τεύχος 32, Cahiers de Fontenay, E.N.S.
12. Schneider (1986): "Laplace and thereafter: the status of probability calculus in the nineteenth century", in The Probabilistic Révolution .
13. Todhunter I. (1949) : A history of the mathematical theory of probability . Réimpression : New York, Chelsea.
14. Transmath Seconde, Nathan (édition 2010).

Αρχίζοντας με ορισμούς:

1. **Τι είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος;**
2. **Τι είναι ένα ενδεχόμενο ενός πειράματος**

Λύνοντας ένα κλασσικό πρόβλημα

Ο Γαλιλαίος (1554-1642) είναι γνωστός για το έργο του στην φυσική και φυσικά για την φράση του ότι «*το βιβλίο της φυσικής είναι γραμμένο με μαθηματικά*». Είναι σχεδόν άγνωστο ότι το 1620 έγραψε ένα μικρό μνημόνιο που αφορούσε το παιχνίδι των ζαριών σε απάντηση ενός αιτήματος του προστάτη του Δούκα της Τοσκάνης. Ο Γαλιλαίος ήταν τότε Πρώτος Μαθηματικός του Πανεπιστημίου της Πίζας και Πρώτος Φιλόσοφος του Μεγάλου Δούκα και είναι αυτός που μαζί με τον Καρντάν έγραψε για πρώτη φορά σχετικά με τον λογισμό των πιθανοτήτων. Τα γραπτά τους δημοσιεύθηκαν μετά την περίφημη αλληλογραφία μεταξύ του Πασκάλ και Φερμά, η οποία σηματοδοτεί επίσημα την έναρξη της θεωρίας πιθανοτήτων.



Είναι γνωστό ότι ο Μεγάλος Δούκας τον XVII αιώνα, είχε αδυναμία στα τυχερά παιχνίδια. Ένα από τα αγαπημένα του παιχνίδια ήταν να αθροίζει τους αριθμούς που έφερναν τρία ζάρια. Ένα ζάρι είναι ένας κύβος με 6 πλευρές. Σε κάθε πλευρά αναγράφεται ένας εκ των αριθμών 1,2,3,4,5,6.

Σαν μεγάλος παίκτης που ήταν *παρατήρησε ότι το αθροισμα 10 εμφανιζόταν ελαφρώς συχνότερα από ότι το άθροισμα 9.*
Είπε λοιπόν στο Γαλιλαίο την παρατήρησή του, εκφράζοντας την απορία αφού και στις δύο περιπτώσεις είναι έξι οι δυνατότητες των αριθμών 1,2,3,4,5,6 που φέρνουν άθροισμα 10 ή 9, δηλαδή:
10= $\underline{6+3+1}$ = $\underline{6+2+2}$ = $\underline{5+4+1}$ = $\underline{5+3+2}$ = $\underline{4+4+2}$ = $\underline{4+3+3}$ (6 δυνατότητες)
9= $\underline{6+2+1}$ = $\underline{5+3+1}$ = $\underline{5+2+2}$ = $\underline{4+4+1}$ = $\underline{4+3+2}$ = $\underline{3+3+3}$ (6 δυνατότητες)
Δεν θα εξηγήσουμε εδώ το γιατί θεωρήθηκε η παρατήρηση αυτή *παράδοξο*.... Μπορούμε όμως να κάνουμε το πρώτο βήμα για την προσέγγισή του.

Ερώτηση: Ποιο είναι το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου Α και ποιο για το ενδεχόμενο Β; Αν η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α είναι, όπως μάθαμε στο Γυμνάσιο

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος ευνοικών περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}$$

μπορείτε να δώσετε μια πρώτη πρόχειρη απάντηση, στο πρόβλημα;

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ- ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ

1) Ποια ήταν η βασική διαδικασία που ακολουθήσαμε και η οποία μας δίνει την δυνατότητα να κρίνουμε την παρατήρηση του Δούκα της Τοσκάνης;
2) Τι κατά την γνώμη σας δεν είδε ο Δούκας στο πρόβλημα, κάτι που αντίθετα ο Γαλιλαίος το βρήκε μοντελοποιώνας το πρόβλημα.
3) Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα ενός πειραματος τύχης που η απαρίθμηση των περιπτώσεων είναι αναγκαία για τον εξορθολογισμό του ερωτήματος.

ΕΡΓΑΣΙΑ:

a. Ποια από τα προβλήματα που αναφέρονται στο Σχολικό βιβλίο σελ. 37 έως 39, θα χρειασθούν να σχηματίσουμε τον δειγματικό χώρο; Κατασκευάστε τους δειγματικούς χώρους.
b. Να μεταφέρετε την λύση του προβλήματος του Δούκα της Τοσκάνης στο τετράδιο ασκήσεων.
c. Να βρείτε πληροφορίες για την αλληλογραφία των Pascal-Fermat και τον ρόλο τους στην θεωρία των Πιθανοτήτων;

■

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

ΣΤΟΧΟΙ

1. Να μεταφράζουν διάφορες σχέσεις μεταξύ ενδεχομένων που είναι διατυπωμένες σε φυσική γλώσσα, στην γλώσσα των συνόλων και αντίστροφα.
2. Με την βοήθεια της σχετικής συχνότητας να ορίζουν την πιθανότητα του ενδεχομένου.
3. Να μπορούν να αναπαριστούν τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων με την βοήθεια του διαγράμματος Venn και να επιλύουν προβλήματα.

Αντικείμενο: Ο λογισμός των πιθανοτήτων.

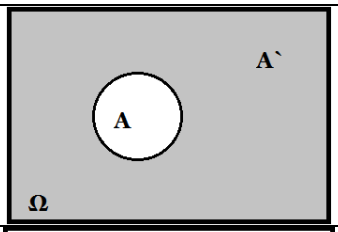
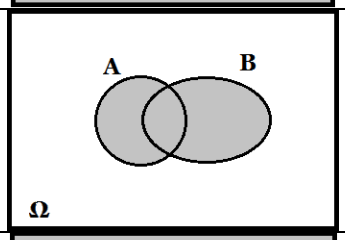
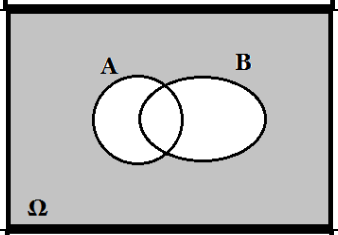
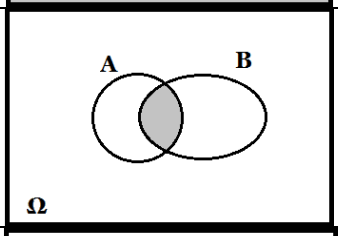
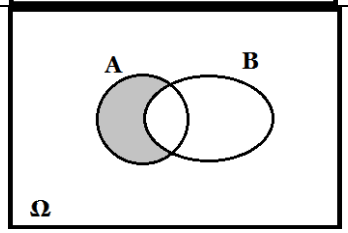
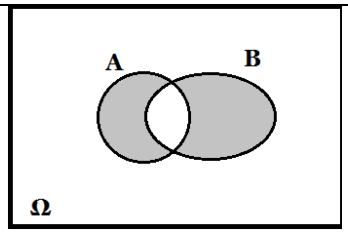
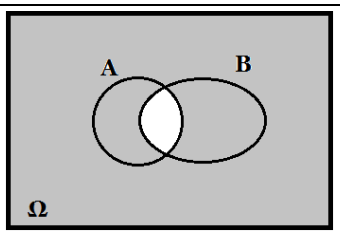
Εισαγωγή (καθοδηγούμενη εξάσκηση)

Είδαμε στο πρώτο μάθημα εισαγωγής στις πιθανότητες το εξής πρόβλημα, το οποίο χαρακτηρίσαμε αλγεβρικό. Ποιος ήταν ο λόγος;

Αν η πιθανότητα να βρέξει αύριο στη Θεσσαλονίκη είναι διπλάσια της πιθανότητας να μη βρέξει, ποια είναι η πιθανότητα να βρέξει αύριο στη Θεσσαλονίκη;
Ονομάσαμε P την πιθανότητα του ενδεχομένου να βρέξει αύριο και P' την πιθανότητα του ενδεχομένου να μην-βρέξει αύριο.
Τότε: P` = 1- P. Επειδή P = 2P', από τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε την εξίσωση : P = 2 (1 – P), η οποία μας δίνει P = 2/3.

Ο αλγεβρικός φορμαλισμός του προβλήματος είναι ικανός λοιπόν να λύσει προβλήματα πιθανοτήτων των οποίων η πιθανότητα ενός ενδεχομένου εκφράζεται συναρτήσει πιθανοτήτων άλλων ενδεχομένων του πειράματος.

Για να πραγματοποιήσουμε όμως έναν αλγεβρικό υπολογισμό χρειαζόμαστε έναν λογισμό, ένα εγχειρίδιο σχέσεων και κανόνων. Το εγχειρίδιο αυτό είναι στην περίπτωσή μας πολύ απλό:

α/α	Λεκτική Διατύπωση	Με διάγραμμα Venn	Συνολοθεωρητική έκφραση
1	Δεν πργματοποιείται το ενδεχόμενο Α ή **«ΟΧΙ Α»**		**A`**
2	Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον ενδεχόμενο από τα Α και Β ή **«Α ή Β»**		**A ∪ B**
3	Δεν πραγματοποιείται κανένα ενδεχόμενο από τα Α και Β ή **«ΟΧΙ (Α ή Β)»**		**(A ∪ B)`**
4	Πραγματοποιούντ αι και τα δύο ενδεχόμενα Α και Β ή **«Α και Β»**		**A ∩ B** **αν A ∩ B = ∅** **λέμε ότι** **τα ενδεχόμενα A & B** **είναι ασυμβίβαστα**
5	Από τα ενδεχόμενα Α και Β πραγματοποιείται μόνο το Α ή **«Α και ΟΧΙ Β»**		**A ∩ B` ή A – B**
6	Από τα ενδεχόμενα Α και Β πραγματοποιείται μόνο ένα ή **«(Α και ΟΧΙ Β)** ή **(Β και ΟΧΙ Α)»**		**(A ∩ B`) ∪ (B ∩ A`) ή** **(A – B) ∪ (B – A`)**
7	Πραγματοποιείται το πολύ ένα ενδεχόμενο από τα Α και Β ή «όχι και τα δύο ταυτόχρονα» ή **«ΟΧΙ (Α και Β)»**		**(A ∩ B) `**

Πότε ένα ενδεχόμενο ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΕΙΤΑΙ - ΕΙΝΑΙ ΒΕΒΑΙΟ/ΑΔΥΝΑΤΟ, ΑΣΥΜΒΙΒΑΣΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ.

ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ->

ΒΕΒΑΙΟ ->

ΑΔΥΝΑΤΟ ->

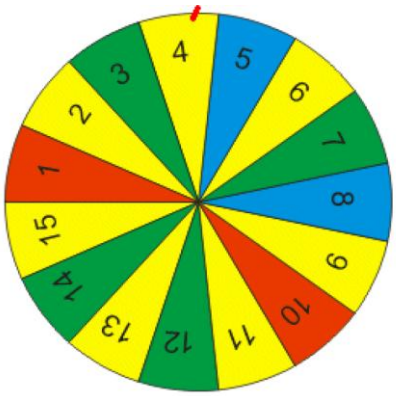
Α και Β ΑΣΥΜΒΙΒΑΣΤΑ ->

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ- ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ

Ερωτήσεις:
Άσκηση 1: Έχουμε 3 μπάλες σε ένα κουτί, Κόκκινες, Άσπρες και Μαύρες. Τραβάμε μια μπάλα, σημειώνουμε το χρώμα της και την τοποθετούμε ξανά στο κουτί. ..... (Άσκηση 1)

1) Τι είναι δειγματικός χώρος? Ποιός είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος?
2) Τι είναι το ενδεχόμενο? Ποιο είναι το ενδεχόμενο να τραβήξουμε την δεύτερη φορά κόκκινη μπάλα.
3) Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα ενδεχόμενο είναι απλό ή σύνθετο?
4) Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα ενδεχόμενο είναι αδύνατο?

2) Ένας δίσκος, χωρισμένος σε 15 κυκλικούς τομείς, περιστρέφεται και σταματά στο σημείο που δείχνει ο δείκτης στο σχήμα:



1. Το ενδ. **Α:** ***ο αριθμός να είναι πολ/σιο του 5.***
2. Το ενδ. **Β:** ***ο αριθμός να είναι > 7.***
3. Το ενδ. **Γ:** ***ο αριθμός να μην είναι πολ/σιο του 5***.
4. Το ενδ. **Δ:** ***ο αριθμός να είναι πολ/σιο του 5 και >7.***
5. Το ενδ. **Ε:** ***ο αριθμός να είναι > 4 και < 12.***
6. Το ενδ. **Ζ:** ***να είναι πολ/σιο του 5 και μεταξύ 4 και 12***.
7. Ποιο είναι το ενδεχόμενο **Δ`**
8. Ποιο είναι το ενδεχόμενο **Α ∩ Δ`**
9. Εκφράστε λεκτικά και βρείτε το ενδεχόμενο **(Α-Β) ∪ (Β-Α)**

3) Ανατροφοδότηση : συνδέστε τις προτάσεις της Στήλης 1 με την αντίστοιχη της Στήλης 2:

Στήλη 1	Στήλη 2
α. Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β.	**1.** A'
β. Πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα Α, Β.	**2.** $A-B$
γ. Δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο Α.	**3.** $(A\cup B)'$
δ. Πραγματοποιείται μόνο το Α από τα ενδεχόμενα Α, Β.	**4.** $(A\cap B)'$
ε. Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα ενδεχόμενα Α και Β.	**5.** $A\cup B$

<u>ΔΙΑΒΑΖΩ</u>: Παρ. 1.1, ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ – ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ, σελ. 20/1/2/3/4. Πρέπει να γνωρίζω τις σχέσεις που περιγράφονται στον πίνακα στο τέλος της σελίδας 23.

<u>ΛΥΝΩ:</u>

- Ασκήσεις Σχολικό σελ. 27/8: 4, 6 Ομάδα Α και 2 Ομάδα Β και να μεταφέρετε την λύση του προβλήματος 2 (ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ-ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ) στο τετράδιο ασκήσεων.

- Να λυθεί η άσκηση:

  Ρίχνουμε τρείς φορές ένα ζάρι, με έξι αριθμημένες πλευρές 1,2,3,4,5,6, και σημειώνουμε τα αποτελέσματα: a την πρώτη φορά, b την δεύτερη και c την τρίτη. Έτσι έχουμε ένα ενδεχόμενο που το σημειώνουμε με (a, b, c).

  (α') Βρείτε τον αριθμό όλων των πιθανών ενδεχομένων του πειράματος.

  (β') Αν έχουμε σε μία ρίψη το ενδεχόμενο (a, b, c), τότε σχηματίζουμε την εξίσωση $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$ με άγνωστο τον x.
  Για παράδειγμα: αν έχουμε $(2, 5, 6)$ τότε σχηματίζουμε την εξίσωση $p(x) = 2x^2 + 5x + 6 = 0$.

  i. Το 0 μπορεί να είναι ρίζα της εξίσωσης $p(x) = 0$;

  ii. Δείξτε ότι η εξίσωση $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$ δεν δέχεται καμμία πραγματική ρίζα θετική ή μηδέν.

  iii. Υπάρχουν a, b, c έτσι ώστε το -1 να είναι ρίζα της $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$; Ποιές είναι αυτές οι τιμές των a, b, c;
  Ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου: *Α : το −1 είναι ρίζα της εξίσωσης*

- Να απαντήσετε στην δραστηριότητα:

Από τους μαθητές του Λυκείου κάποιοι μιλούν καλά τη γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή για να εκπροσωπήσει το σχολείο σε μια εκδήλωση του Γαλλικού Ινστιτούτου. Ας ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:

Α : ο μαθητής είναι κορίτσι

Β : ο μαθητής μιλά καλά τη γαλλική γλώσσα

Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

1. $A\cup B$
2. $A\cap B$
3. $B-A$
4. $A-B$
5. $A`\cup B$