Τρίτη, 23 Ιουλίου 2013

Πρόβλημα 1. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζευγάρι θετικών ακεραίων k και n, υπάρχουν k θετικοί ακέραιοι $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (όχι κατ΄ ανάγκη διαφορετικοί) τέτοιοι ώστε

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Πρόβλημα 2. Ένας σχηματισμός που δημιουργείται με την τοποθέτηση 4027 σημείων στο επίπεδο λέγεται *Κολομβιανός*, αν αποτελείται από 2013 κόκκινα σημεία και 2014 μπλέ σημεία και δεν υπάρχουν τρία σημεία του σχηματισμού που να είναι συνευθειακά. Με χάραξη κάποιων ευθειών το επίπεδο διαιρείται σε διάφορα χωρία. Μια χάραξη ευθειών είναι *καλή* για έναν Κολομβιανό σχηματισμό, αν ισχύουν οι επόμενες δύο συνθήκες:

- δεν υπάρχει ευθεία που περνάει από κάποιο σημείο του σχηματισμού,
- δεν υπάρχει χωρίο που περιέχει σημεία και των δύο χρωμάτων.

Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του k έτσι ώστε για κάθε Κολομβιανό σχηματισμό 4027 σημείων, να υπάρχει μια καλή χάραξη k ευθειών.

Πρόβλημα 3. Έστω ο παρεγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC απέναντι της κορυφής A εφάπτεται της πλευράς BC στο σημείο A_1. Ομοίως ορίζουμε τα σημεία B_1 πάνω στην πλευρά CA και C_1 πάνω στην πλευρά AB, χρησιμοποιώντας τους παρεγεγραμμένους κύκλους απέναντι των κορυφών B και C, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $A_1B_1C_1$ βρίσκεται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABC ειναι ορθογώνιο.

Ο παρεγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC απέναντι της κορυφής A είναι ο κύκλος που εφάπτεται στο ευθύγραμμο τμήμα BC, στην ημιευθεία AB πέραν του B και στην ημιευθεία AC πέραν του C. Οι παρεγεγραμμένοι κύκλοι απέναντι των κορυφών B και C ορίζονται ομοίως.

Διάρκεια Διαγωνισμού: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες

Τετάρτη, 24 Ιουλίου 2013

Πρόβλημα 4. Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο με ορθόκεντρο H και έστω W ένα σημείο της πλευράς BC, που βρίσκεται αυστηρά μεταξύ των κορυφών B και C. Τα σημεία M και N είναι τα ίχνη των υψών από τις κορυφές B και C, αντίστοιχα. Ονομάζουμε ω_1 τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BWN και έστω X ένα σημείο του ω_1 τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα WX είναι διάμετρος του ω_1. Ανάλογα, ονομάζουμε ω_2 τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου CWM και έστω Y ένα σημείο του ω_2 τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα WY είναι διάμετρος του ω_2. Να αποδείξετε ότι τα σημεία X, Y και H είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 5. Έστω $\mathbb{Q}_{>0}$ το σύνολο των θετικών ρητών αριθμών. Έστω $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που ικανοποιεί τις επόμενες τρεις συνθήκες:

(i) για κάθε $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, έχουμε $f(x)f(y) \geq f(xy)$,

(ii) για κάθε $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, έχουμε $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$,

(iii) υπάρχει ένας ρητός αριθμός $a > 1$ τέτοιος ώστε $f(a) = a$.

Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Πρόβλημα 6. Έστω $n \geq 3$ ένας ακέραιος αριθμός. Θεωρούμε ένα κύκλο με $n+1$ σημεία πάνω σε αυτόν που χωρίζουν τον κύκλο σε $n+1$ ίσα τόξα. Θεωρούμε όλες τις σημάνσεις αυτών των σημείων με τους αριθμούς $0, 1, \ldots, n$ έτσι ώστε κάθε αριθμός να χρησιμοποιείται μόνο μία φορά. Δύο τέτοιες σημάνσεις θεωρούνται ότι είναι ίδιες, αν η μία μπορεί να προκύψει από την άλλη με μία περιστροφή του κύκλου. Μια σήμανση ονομάζεται *ωραία*, αν, για οποιουσδήποτε τέσσερις αριθμούς $a < b < c < d$ με $a + d = b + c$, η χορδή που συνδέει τα σημεία με την σήμανση a και d δεν τέμνει την χορδή που συνδέει τα σημεία με την σήμανση b και c.

Έστω M ο αριθμός των ωραίων σημάνσεων και έστω N ο αριθμός των διατεταγμένων ζευγών (x, y), όπου x, y θετικοί ακέραιοι, έτσι ώστε $x + y \leq n$ και $MK\Delta(x, y) = 1$. Να αποδείξετε ότι

$$M = N + 1.$$

Διάρκεια Διαγωνισμού: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες