

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

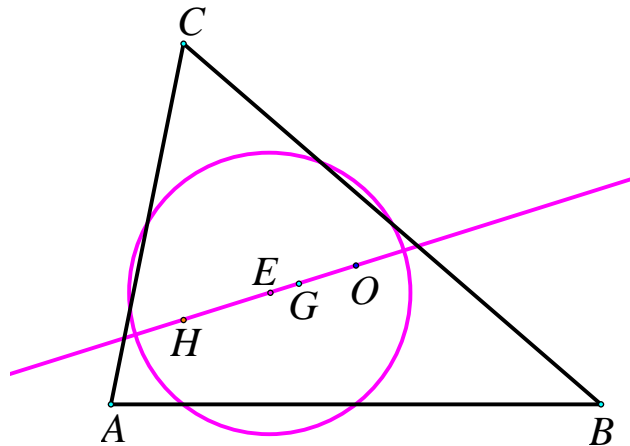
Πρώτα πρέπει να κατασκευάσουμε εργαλεία στο GEOGEBRA που να κατασκευάζουν αυτομάτως τα παρακάτω σημεία όταν κλικάρεις πάνω στις 3 κορυφές του τριγώνου:

1. Το Κέντρο βάρους G
2. Το ορθόκεντρο H
3. Το περίκεντρο και τον περιγεγραμμένο κύκλο O
4. Το έγκεντρο και τον εγγεγραμμένο κύκλο I
5. Τον κύκλο του Euler (σελίδα 276 Πάμφιλου) E
6. Τους παραγγεγραμμένους σε τρίγωνο κύκλους (σελίδα 81 σχολικό)
7. Την ευθεία του Euler (σελίδα 190 προτ. 3.9.7 – Πάμφιλου Έλασσον Γεωμετρικόν)
8. Τον κύκλο του Euler (σελίδα 276 παραγ. 5.2 – Πάμφιλου Έλασσον Γεωμετρικόν)

Οι λύσεις των θεωρημάτων να γίνει με 2 τρόπους: Με τη κλασσική γεωμετρία και με το σύστημα αυτοματοποιημένων αποδείξεων. Επίσης να διερευνηθεί η βιβλιοθήκη Fixpoint.

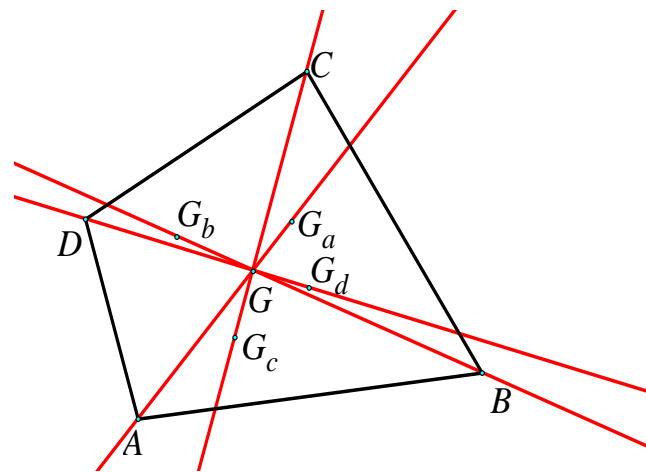
Θεώρημα 1

Δίδεται τρίγωνο ABC . Το κέντρο βάρους G , το ορθόκεντρο H και το κέντρο E του κύκλου του Euler ανήκουν στην ευθεία (την ευθεία Euler). Επίσης $EH = EO$.



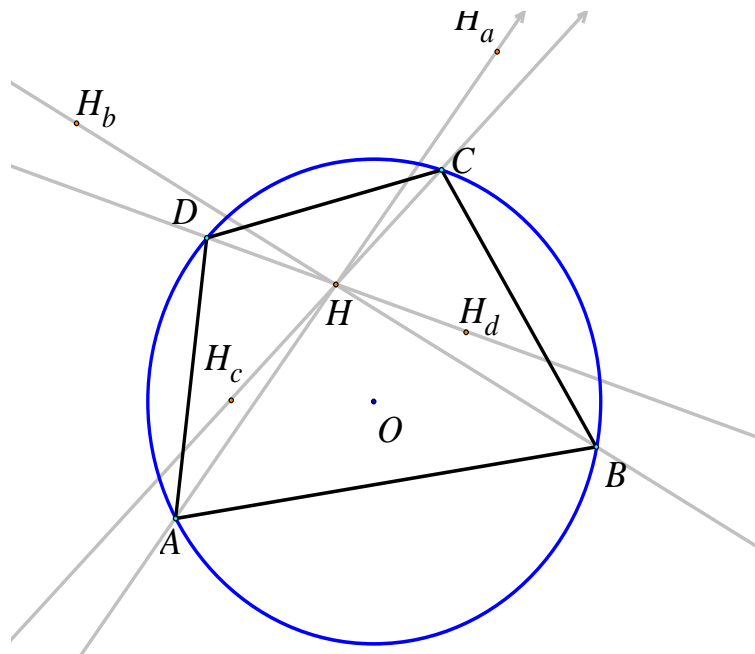
Θεώρημα 2

Δίδεται τετράπλευρο $ABCD$. Αν G_a είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου BCD που βρίσκεται απέναντι από τη κορυφή A , και ομοίως τα βαρύκεντρα G_b, G_c, G_d , τα βαρύκεντρα των αντιστοιχων τριγώνων, δείξτε ότι οι ευθείες AG_a, BG_b, CG_c, DG_d συντρέχουν στο σημείο G .



Θεώρημα 3

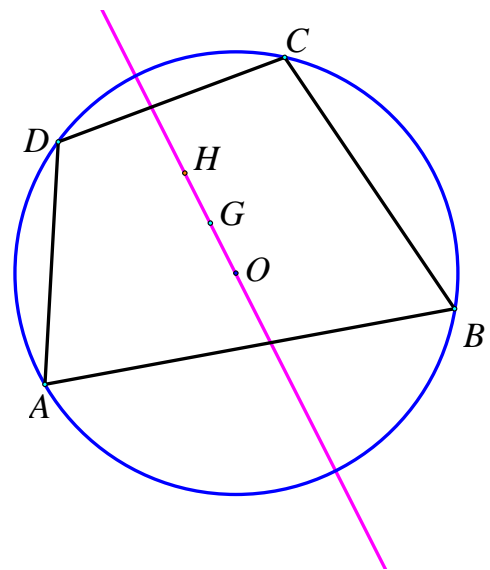
Δίδεται εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABCD σε κύκλο κέντρου O. Αν H_a το ορθόκεντρο του BCD, H_b το ορθόκεντρο του ACD, H_c το ορθόκεντρο του ABD, H_d το ορθόκεντρο του ABC, τότε οι ευθείες AH_a , BH_b , CH_c , DH_d συντρέχουν σε σημείο H.



Θεώρημα 4

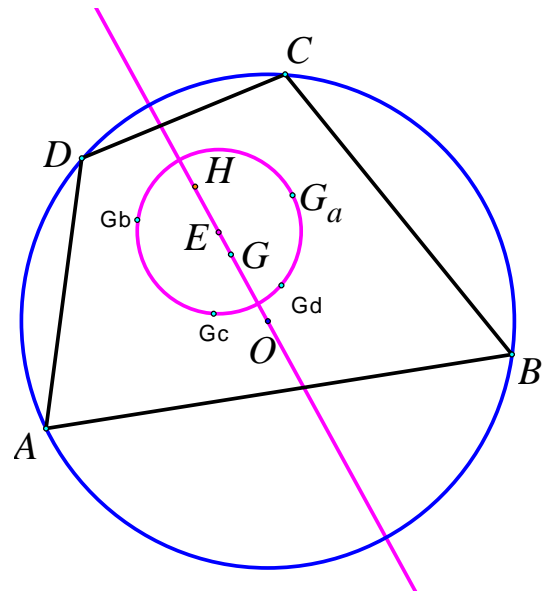
Δίδεται εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABCD σε κύκλο κέντρου O. Αν H είναι το σημείο στο θεωρ. 3 και G το σημείο του θεωρ. 2, τότε τα σημεία O, H, G είναι συνευθειακά και G είναι το μέσο του HO. Η ευθεία HO λέγεται ευθεία του Euler του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου.

$$\frac{GH}{GO} = -1,00$$



Θεώρημα 5

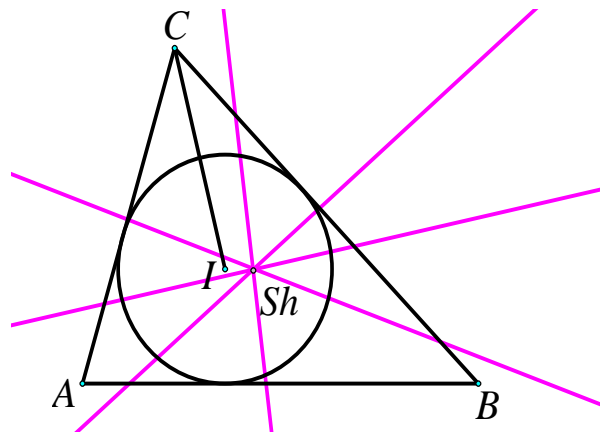
Δίδεται εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABCD σε κύκλο κέντρου O. Έστω G_a , G_b , G_c , G_d , όπως στο θεώρημα 2. Τότε, τα σημεία αυτά είναι ομοκυκλικά και ο κύκλος αυτός λέγεται κύκλος του Euler για το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABCD. Δείξτε ότι το κέντρο E του κύκλου του Euler ανήκει στην ευθεία του Euler του ABCD.



Θεώρημα 6

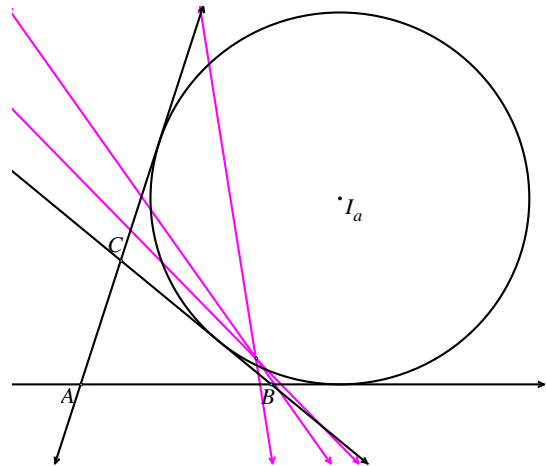
Έστω I το έγκεντρο του τριγώνου ABC. Τότε οι ευθείες του Euler των τριγώνων AIC, AIB, BIC και ABC συντρέχουν σε σημείο Sh που λεγεται σημείο Schiffler.

(**Δύσκολο**, δεξ *A Note on the Schiffler Point - Lev Emelyanov and Tatiana Emelyanova - Forum Geometricorum Volume 3 (2003) 113–116.*)



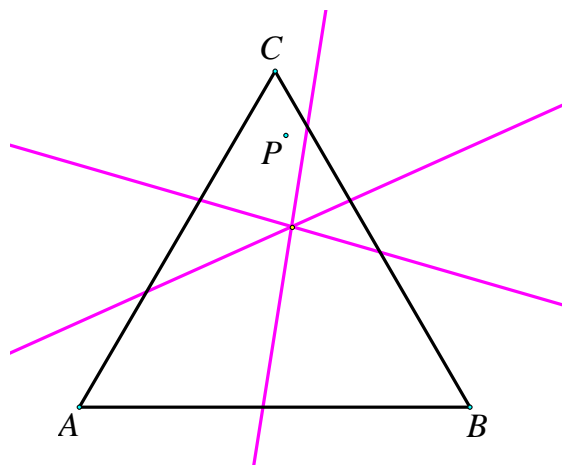
Θεώρημα 7 (16)

Έστω I_a το παράκεντρο τριγώνου ABC . Τότε οι ευθείες του Euler των τριγώνων ABI_a , ACI_a , BCI_a είτε συντρέχουν είτε είναι παράλληλες.



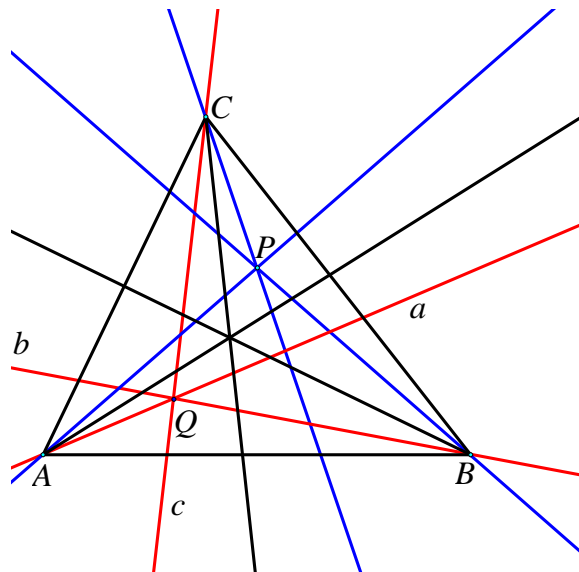
Θεώρημα 8 (17)

Δίδεται ισόπλευρο τρίγωνο ABC και σημείο P του επιπέδου του. Τότε, οι ευθείες του Euler των τριγώνων APB , APC , BPC είτε συντρέχουν είτε είναι παράλληλες.



Θεώρημα 9 (18-19)

Έστω τρίγωνο ABC και σημείο P του επιπέδου. Μια ισογωνική CQ της CP είναι μια ευθεία που σχηματίζει ίση διχοτόμο της γωνίας ισογωνικές των AP, τέμνονται σε ένα λέμε το σημείο Q στο τρίγωνο ABC.

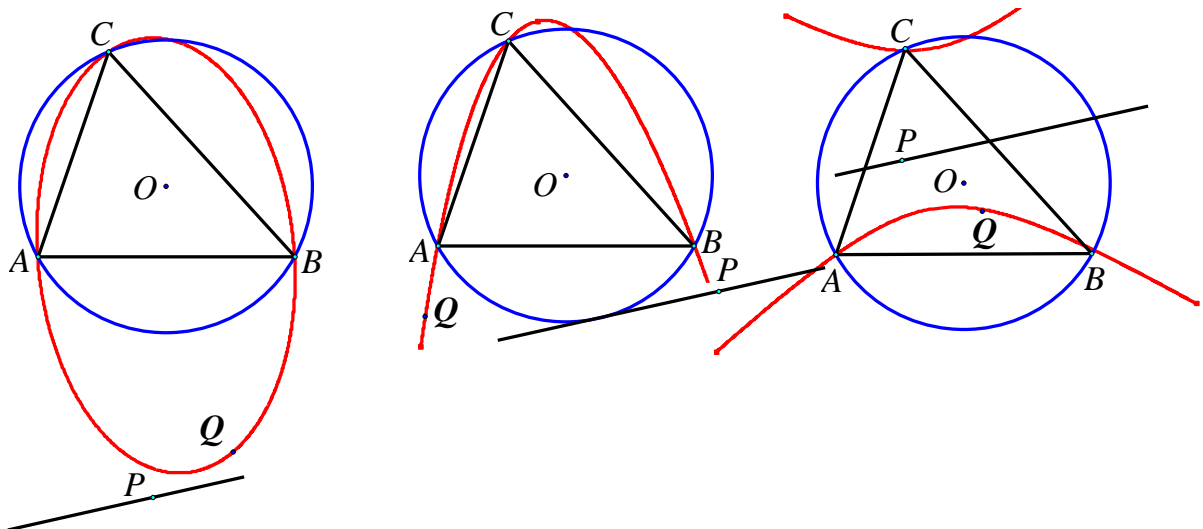


γωνία με την C. Δείξτε ότι οι BP και CP σημείο Q. Θα ισογωνικό του P

Θεώρημα 10 (18-19)

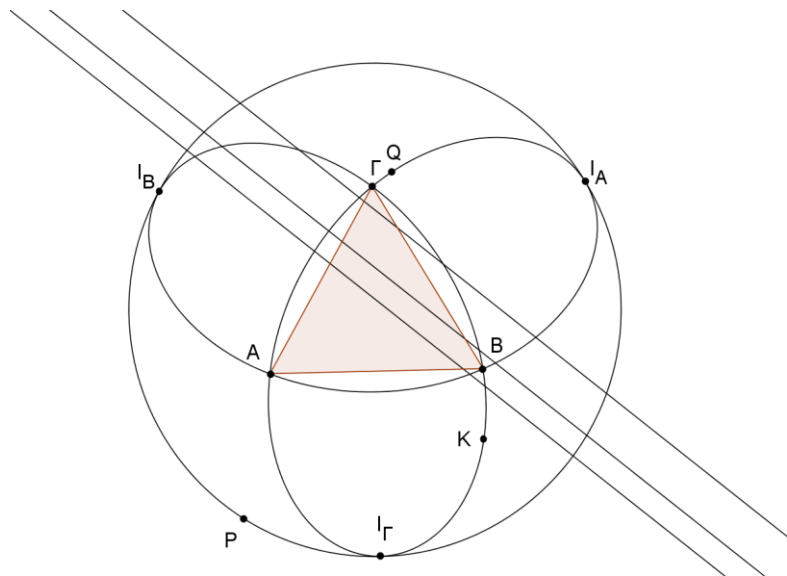
Δίδεται τρίγωνο ABC και σημείο P κινούμενο πάνω σε ευθεία, τότε το ισογωνικό Q του P στο τρίγωνο ABC κινείται πάνω σε κωνική. Η κωνική είναι

1. έλλειψη αν η ευθεία δεν τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο,
2. παραβολή αν τον εφάπτεται και
3. υπερβολή αν τον τέμνει.



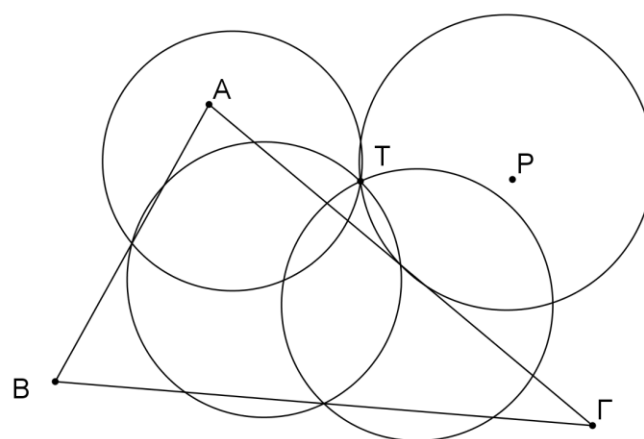
Θεώρημα 11 (21)

Δίδεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα παράκεντρα I_A, I_B, I_Γ . Αν σημείο Q βρίσκεται πάνω στον γεωμετρικό τόπο του ισογωνικού σημείου K του σημείου P που ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $I_A I_B I_\Gamma$, οι ευθείες του Euler των τριγώνων $QAB, QA\Gamma$ και $Q\Gamma B$ είναι παράλληλες.

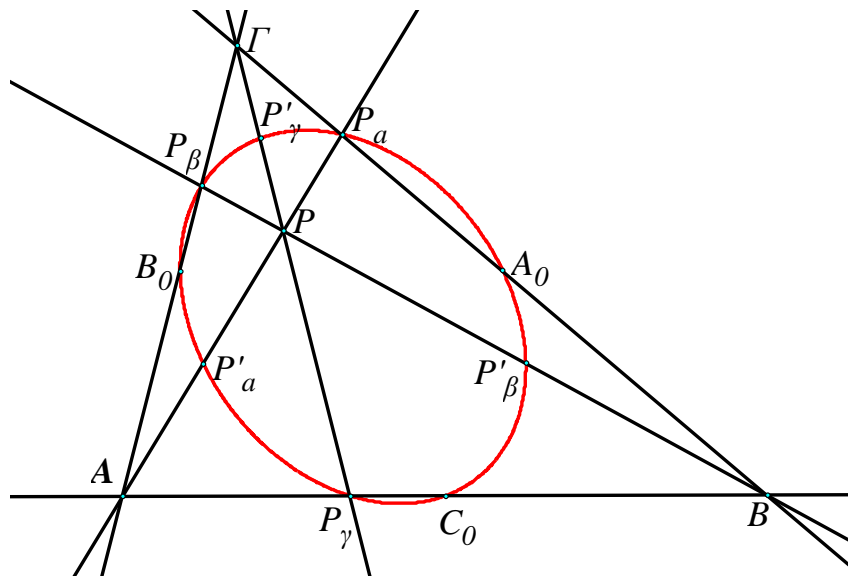


Θεώρημα 12 (22)

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο P του επιπέδου του. Δείξτε ότι οι κύκλοι του Euler των τριγώνων $AB\Gamma, ABP, A\Gamma P, B\Gamma P$ συντρέχουν.



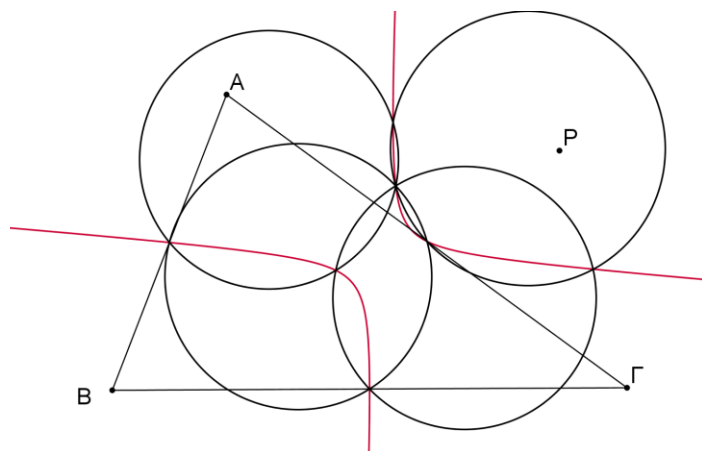
Θεώρημα 13 (23)



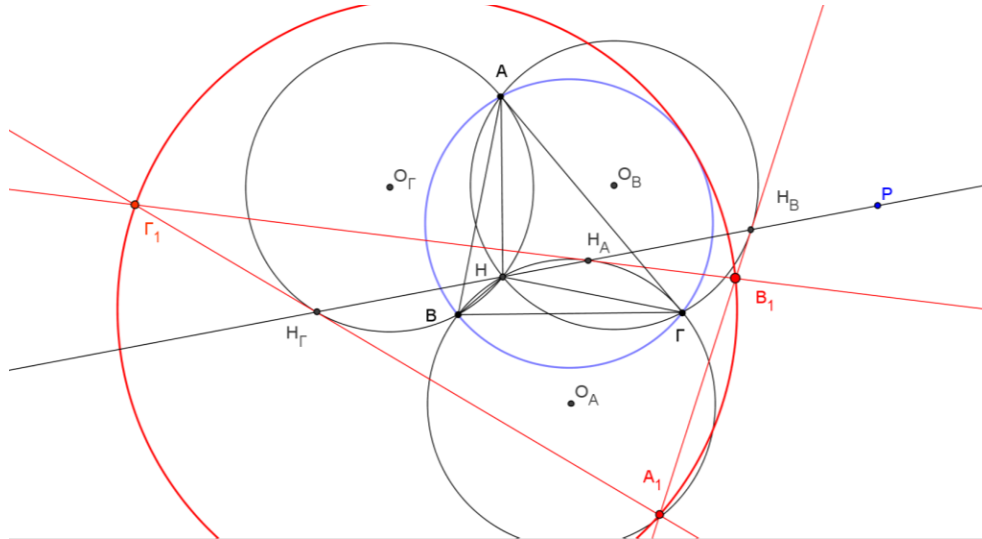
Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με σημείο P του επιπέδου του. Αν P_α , P_β και P_γ τα σημεία τομής των AP , BP και GP αντίστοιχα με τις πλευρές του τριγώνου και P'_α , P'_β και P'_γ τα μέσα των AP , BP και GP αντίστοιχα, η κωνική που διέρχεται από τα σημεία αυτά διέρχεται και από τα μέσα των πλευρών του τριγώνου. Η κωνική αυτή λέγεται καμπύλη του Euler του σημείου P .

Θεώρημα 14 (24)

Η καμπύλη του Euler ενός σημείου P , διέρχεται από τα σημεία τομής των κύκλων του Euler των τριγώνων $AB\Gamma$, ABP , $A\Gamma P$, $B\Gamma P$.



Θεώρημα 15 (25)



Δίδεται τρίγωνο $AB\Gamma$, H το ορθόκεντρο και O_A , O_B και O_Γ τα σημεία τομής των μεσοκαθέτων των AH , BH και ΓH . Αν P τυχαίο σημείο του επιπέδου με H_A , H_B και H_Γ τα σημεία τομής της PH με τους κύκλους $(O_A, O_A \Gamma)$ $(O_B, O_B A)$ και $(O_\Gamma, O_\Gamma B)$ αντίστοιχα, κατασκευάζουμε τις εφαπτομένες των κύκλων αυτών στα σημεία H_A , H_B και H_Γ οι οποίες τέμνονται στα σημεία A_1 , B_1 και Γ_1 . Δείξτε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A_1B_1\Gamma_1$ εφάπτονται.

ΤΕΛΟΣ