ΜΕ ΑΦΟΡΜΗ ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

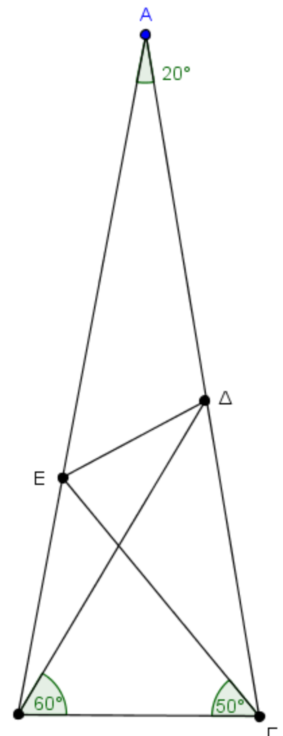
Ισοσκελές τρίγωνο με γωνία 20^o

Ανδρέας Πούλος

Πρότυπο-Πειραματικό Σχολείο του Α.Π.Θ., andremat@otenet.gr

Στο κείμενο που ακολουθεί περιγράφουμε τι ενδιαφέρον μπορεί να έχει για ένα δάσκαλο των Μαθηματικών, για έναν μελετητή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, για έναν «εραστή» των προβλημάτων μαθηματικών διαγωνισμών και γενικά για έναν «περίεργο» περί τα Μαθηματικά, το παρακάτω πρόβλημα.

Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και γωνία ΒΑΓ = 20^o. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΓ ώστε γωνία ΔΒΓ = 60^o και σημείο Ε στην πλευρά ΑΒ ώστε γωνία ΕΓΒ = 50^o. Να βρεθεί η γωνία ΕΔΒ.



Σχήμα Νο 1

Να σημειώσουμε εκ των προτέρων ότι το πρόβλημα αυτό είναι πολύ γνωστό σε όσους ασχολούνται συστηματικά με την επίλυση προβλημάτων Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά θα δυσκολέψει αφάνταστα κάθε επίδοξο αρχάριο λύτη. Το πρόβλημα έχει ηλικία τουλάχιστον 90 ετών, αφού είχε προταθεί στο αμερικανικό περιοδικό Mathematical Gazette, τόμος 11, του 1922, στη σελίδα 173. Στην αγγλόφωνη βιβλιογραφία σήμερα, είναι γνωστό, ως *πρόβλημα του E. Langley*, από το όνομα του μαθηματικού που το πρότεινε.

Ο γράφων μαζί με τον Γιάννη Θωμαΐδη στο βιβλίο μας «*Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*», εκδόσεις Ζήτη, στις σελίδες 112-115 αφιερώνουμε αρκετό «χώρο» για αυτό το ενδιαφέρον κατά τη γνώμη μου πρόβλημα. Εκεί, το προτείνουμε ως συνθετική-δημιουργική εργασία για το κεφάλαιο της ισότητας τριγώνων με τη σημείωση ότι το πρόβλημα αυτό έχει ενδιαφέρουσες διδακτικές προεκτάσεις. Είχα συστήσει το πρόβλημα σε μαθητές της Α΄ τάξης του Λυκείου του Πειραματικού Σχολείου του Α.Π.Θ. σε δύο συνεχή σχολικά έτη, αλλά κανείς μαθητής (50 μαθητές κάθε χρονιά) δεν μπόρεσε να δώσει λύση, ουσιαστικά να αποδείξει ότι γωνία ΕΔΒ = 30^o, παρ' ότι πολλοί από αυτούς ήταν εξαιρετικοί μαθητές για τα σχολικά δεδομένα. Αυτό αποτελεί στοιχείο ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα απαιτεί σημαντική εξοικείωση με τις τεχνικές της επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων, μεγάλη εμπειρία από τις αποκαλούμενες βοηθητικές ευθείες και φυσικά αυξημένη «γεωμετρική φαντασία».

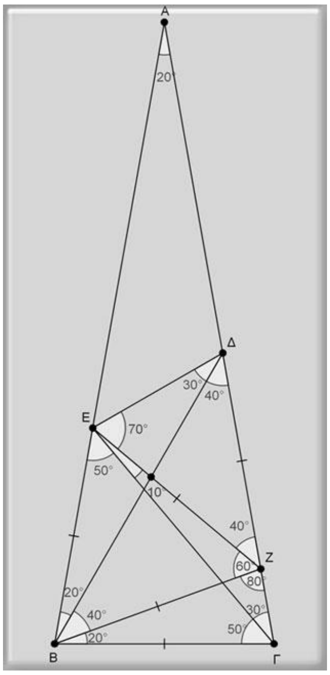
Η ύπαρξη πλήθους αριθμητικών δεδομένων δίνει την εντύπωση ότι πρόκειται για ένα απλό πρόβλημα υπολογισμού μέτρου γωνίας, με δεδομένο τη γνώση όλων ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180^o.

Στη συνέχεια του κειμένου, συνοπτικά καταγράφουμε και περιγράφουμε τα εξής:

1) Μία μικρή επισκόπηση της ιστορίας του προβλήματος.
2) Συνοπτική περιγραφή ορισμένων τεχνικών επίλυσής του προβλήματος.
3) Σημειώσεις για το ενδιαφέρον που παρουσιάζει από την πλευρά της Διδακτικής των Μαθηματικών.
4) Επισημάνσεις για ορισμένα ερευνητικά ερωτήματα που προκύπτουν από το συγκεκριμένο πρόβλημα και περιγραφή των αποτελεσμάτων αυτών των ερευνών.
5) Παράθεση της σχετικής βιβλιογραφίας, εν μέρει σχολιασμένης, με σκοπό να παρακινηθούν οι ενδιαφερόμενοι για νέες προσωπικές αναζητήσεις και για επιπλέον ευρήματα και συμπεράσματα.

1. Μία μικρή επισκόπηση του προβλήματος.

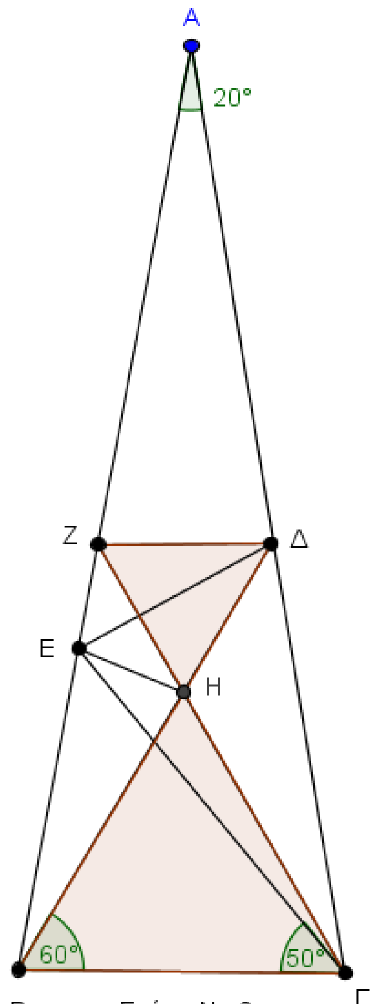
Αναφέραμε ότι στην αγγλόφωνη βιβλιογραφία το πρόβλημα δημοσιεύεται για πρώτη φορά το 1922 στο αμερικανικό περιοδικό Mathematical Gazette. Το 1955 ο William Ransom το παρουσιάζει στο βιβλίο του *One Hundred Mathematical Curiosities* (*Εκατό μαθηματικά περίεργα θέματα*) και το 1959 ο ίδιος συγγραφέας στο βιβλίο του *Trigonometric Novelties* (*τριγωνομετρικά πρωτότυπα θέματα*). Το 1967 εμφανίζεται στο εξαιρετικό βιβλίο *Geometry Revisited (Αναθεωρημένη Γεωμετρία)* των Coxeter H.M. και Greitzer S.L.



Το 1976, ο γνωστός αμερικανός συγγραφέας βιβλίων μαθηματικών διαγωνισμών Ross Honseberger παρουσίασε πάλι το συγκεκριμένο πρόβλημα με τίτλο «*Four Minor Gems from Geometry*» (τέσσερα «διαμαντάκια» της Γεωμετρίας) στο βιβλίο του Mathematical Gems II (*μαθηματικά πετράδια No II*) που εξέδωσε η Μαθηματική Εταιρεία των Η.Π.Α. Επίσης, ο ίδιος συγγραφέας συζητά για αυτό το πρόβλημα σε άλλο βιβλίο του, το 2001, που εξέδωσε πάλι η Μαθηματική Εταιρεία των Η.Π.Α. δίνοντας επιπλέον άλλες τρεις λύσεις. Μία άλλη λύση δόθηκε το 1976 στο καναδικό περιοδικό διαγωνιστικών προβλημάτων Crux Mathematicorum. Το 1992, ο David Wells σε ένα συνοπτικό, αλλά πλούσιο σε υλικό βιβλίο του, προβάλει το πρόβλημα ως puzzle, με την επισήμανση ότι πρόκειται για ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα των στοιχειωδών Μαθηματικών, με την αναφορά ότι το πρωτοδημοσίευσε ο E. Langley. Το 1994, η αγγλική έκδοση του ρωσικού φυσικομαθηματικού περιοδικού Quantum περιλαμβάνει εννέα λύσεις του προβλήματος.

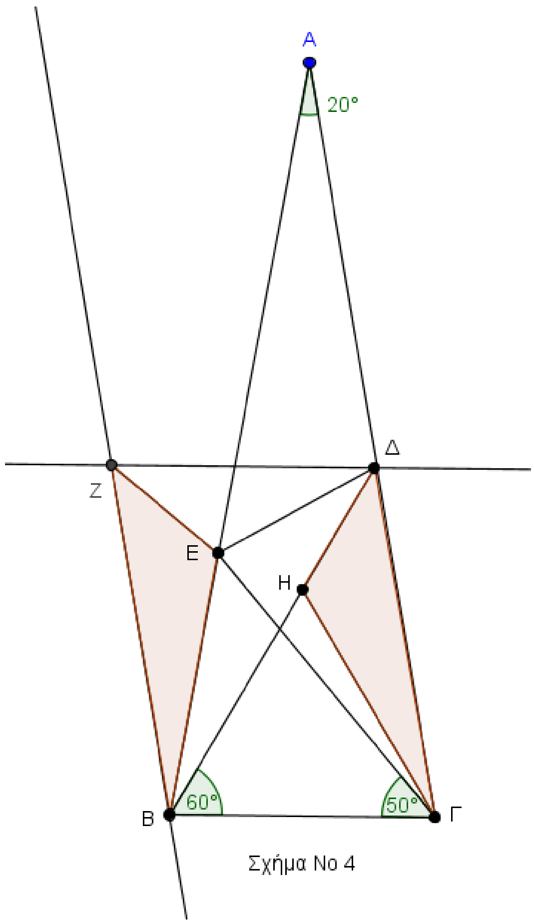
Το 1997, στο περιοδικό Mathematical Horizons, δημοσιεύτηκε ένα άρθρο του Andy Liu σχετικό με το πρόβλημά μας. Το 1998, το βιβλίο *Tournaments of Towns 1993-1997*, (*διαγωνισμοί πόλεων 1993-1997*) έκδοση της Αυστραλιανής Μαθηματικής Εταιρείας ασχολείται επίσης με το πρόβλημα από την άποψη των μαθηματικών διαγωνισμών. Το 2000, ο ρώσος μαθηματικός και συγγραφέας Victor Prasolov περιλαμβάνει το πρόβλημα, στο βιβλίο του *Essays on Numbers and Figures* (*Δοκίμια για τους αριθμούς και τα σχήματα*) που εξέδωσε η Μαθηματική Εταιρεία των Η.Π.Α. Το περιοδικό Mathematics Teacher της ίδιας Εταιρείας, το 2001, φιλοξένησε ένα άρθρο που αφορούσε πάλι το ίδιο πρόβλημα. Το 1995, οι A. Machado και D. Gale δημοσίευσαν τρία διαφορετικά άρθρα στο διεθνές μαθηματικό περιοδικό Mathematical Intelligencer για το πρόβλημα, ερευνώντας αυτή τη φορά ερωτήματα που περιγράφουμε στην ενότητα 4 του κειμένου μας. Από την ίδια σκοπιά ο έλληνας ερευνητής και καλός φίλος, Νίκος Δεργιαδές δημοσίευσε το 1992 στο περιοδικό της Ε.Μ.Ε. «*Διάσταση*» ένα πολύ σημαντικό άρθρο. Στην ελληνική γλώσσα το πρόβλημα εμφανίζεται σε ορισμένα βιβλία μαθηματικών διαγωνισμών, όπως καταγράφουμε στη βιβλιογραφία.

Συνοπτική περιγραφή ορισμένων λύσεων του προβλήματος.



Σχήμα Νο 3

Η **1η λύση** που παρουσιάζουμε, είναι αυτή της χάραξης παράλληλης ευθείας προς τη βάση ΒΓ, ώστε να εμφανιστεί τρίγωνο όμοιο προς το αρχικό, όπως στο σχήμα 3. Φέρουμε την ΔΖ // ΒΓ με Ζ σημείο της ΑΒ. Ονομάζουμε Η το σημείο τομής των ΒΔ και ΓΖ. Έτσι προκύπτουν τα ισόπλευρα τρίγωνα ΒΗΓ και ΔΖΗ, τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΖΓ, το ισοσκελές τραπέζιο ΖΔΓΒ και τα ίσα τρίγωνα ΖΗΒ και ΔΗΓ. Με απλές πράξεις προκύπτει ότι γωνία ΒΕΓ = 50^o = γωνία ΒΓΕ. Άρα, έχουμε την εμφάνιση και ενός άλλου ισοσκελούς τριγώνου του ΒΕΓ με ΒΕ = ΒΓ. Επίσης, έχουμε και το ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΗ με γωνίες βάσης 80^o. Άρα, γωνία ΕΗΖ = 40^o. Άρα, και το τρίγωνο ΖΕΗ είναι ισοσκελές με γωνίες βάσης 40^o. Το τετράπλευρο ΖΔΗΕ έχει ΕΖ = ΕΗ και ΖΔ = ΔΗ, άρα έχει άξονα συμμετρίας την ΕΔ. Επειδή η γωνία ΖΔΗ = 60^o διχοτομείται από την ΕΔ, προκύπτει ότι γωνία ΕΔΗ = 30^o.



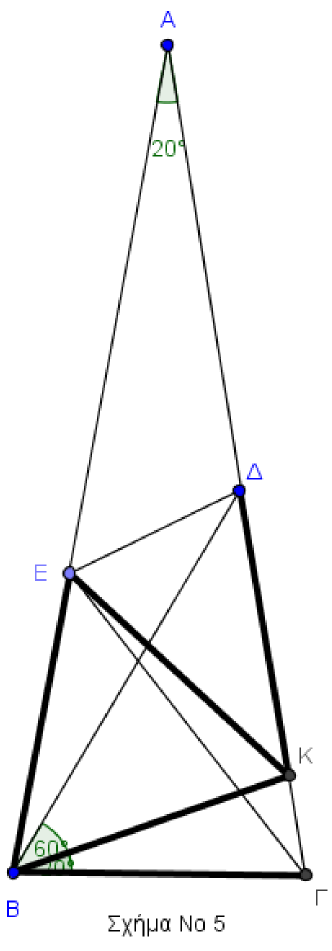
Σχήμα Νο 4

Η **2η λύση** βασίζεται στη χάραξη παράλληλων ευθειών από τα Δ και Β προς τις ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα, όπως στο σχήμα 4. Το ΖΔΓΒ είναι παραλληλόγραμμο με γωνίες 80^o και 100^o αντίστοιχα. Επειδή η γωνία ΑΒΔ = 20^o, σημαίνει ότι η ΒΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΒΔ. Θεωρούμε σημείο Η στην ΒΔ, ώστε γωνία ΒΓΗ = 60^o. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα ΖΕΒ, ΔΗΓ είναι ίσα. Αυτό συμβαίνει επειδή ΒΖ = ΓΗ, (αφού ΒΕ = ΒΓ = ΓΗ) και γωνία ΖΒΕ = 20^o = γωνία ΗΓΔ. Όμως, ΒΔΓ = 40^o, άρα γωνία ΒΖΕ = 40^o. Επειδή γωνία ΒΖΔ = 80^o έχουμε ότι η ΖΕ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΒΖΔ. Άρα, το Ε είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου ΒΖΔ. Συνεπώς, η ΔΕ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΒΖΔ. Επειδή γωνία ΖΔΒ = 60^o σημαίνει ότι γωνία ΕΔΒ = 30^o.

Η **3η λύση** έχει ως κεντρική ιδέα τη χάραξη μιας βοηθητικής ευθείας ΒΚ με Κ σημείο της ΑΓ και γωνία ΚΒΓ = 20^o, όπως στο σχήμα 5.

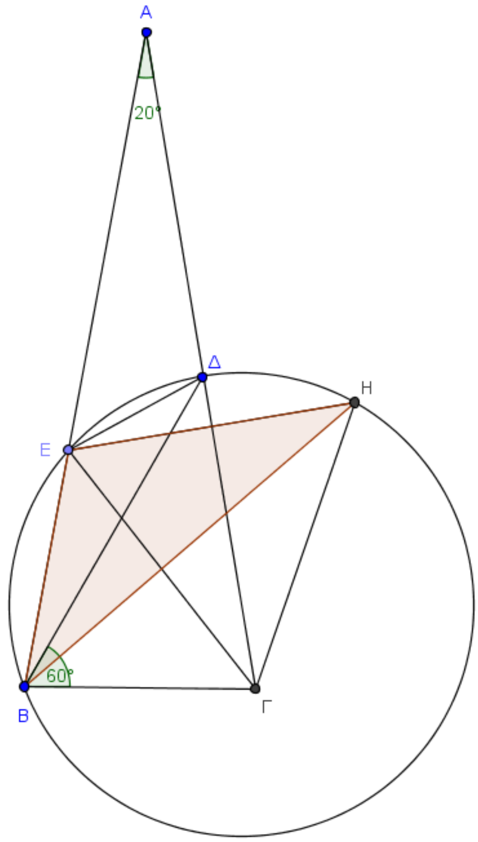
Αποδεικνύεται ότι ισχύει η ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΓ = ΒΚ = ΒΕ = ΕΚ = ΚΔ. Αυτό σημαίνει ότι προκύπτουν τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα και το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΚΕ. Οι γωνίες του τριγώνου ΒΚΓ είναι 20^o, 80^o, 80^o και οι γωνίες του τριγώνου ΕΚΔ είναι 40^o, 70^o, 70^o. Οι γωνίες του τριγώνου ΒΚΔ είναι 40^o, 100^o, 40^o.

Άρα, γωνία ΒΔΕ = $70^o – 40^o = 30^o$.

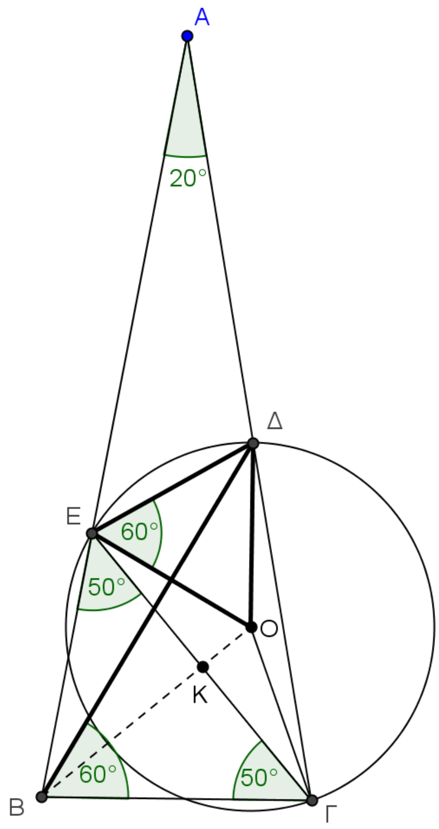


Σχήμα Νο 5

Η **4η λύση** βασίζεται στην έννοια της συμμετρίας. Θεωρούμε το συμμετρικό σημείο του Ε ως προς την ΑΓ, το οποίο ονομάζουμε Η, όπως στο σχήμα 6. Το τρίγωνο ΕΓΗ είναι ισόπλευρο, αφού γωνία ΕΓΔ = 30^o και η ευθεία ΓΔ είναι άξονας συμμετρίας του. Το τετράπλευρο ΕΗΓΒ έχει άξονα συμμετρίας την ΒΗ, αφού ΒΕ = ΒΓ και ΗΕ = ΗΓ. Η ΒΔ διχοτομεί τη γωνία ΕΒΗ (η απόδειξη είναι απλή). Επειδή η ΒΔ ως διχοτόμος της ΕΒΗ και η ΓΑ ως μεσοκάθετος της ΕΗ τέμνονται επί του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΕΒΗ (δηλαδή στο Δ) που είναι μέσο του τόξου ΕΗ, σημαίνει ότι τόξο ΕΔ = τόξο ΔΗ. Άρα, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΕΒΗ διέρχεται από το Δ. Δηλαδή, οι εγγεγραμμένες γωνίες ΕΔΒ και ΕΗΒ είναι ίσες, επειδή βαίνουν στο τόξο ΒΕ. Όμως, γωνία ΒΗΕ = 30^o, (απόδειξη απλή). Συνεπώς, γωνία ΕΔΒ = 30^o.



σχήμα 6

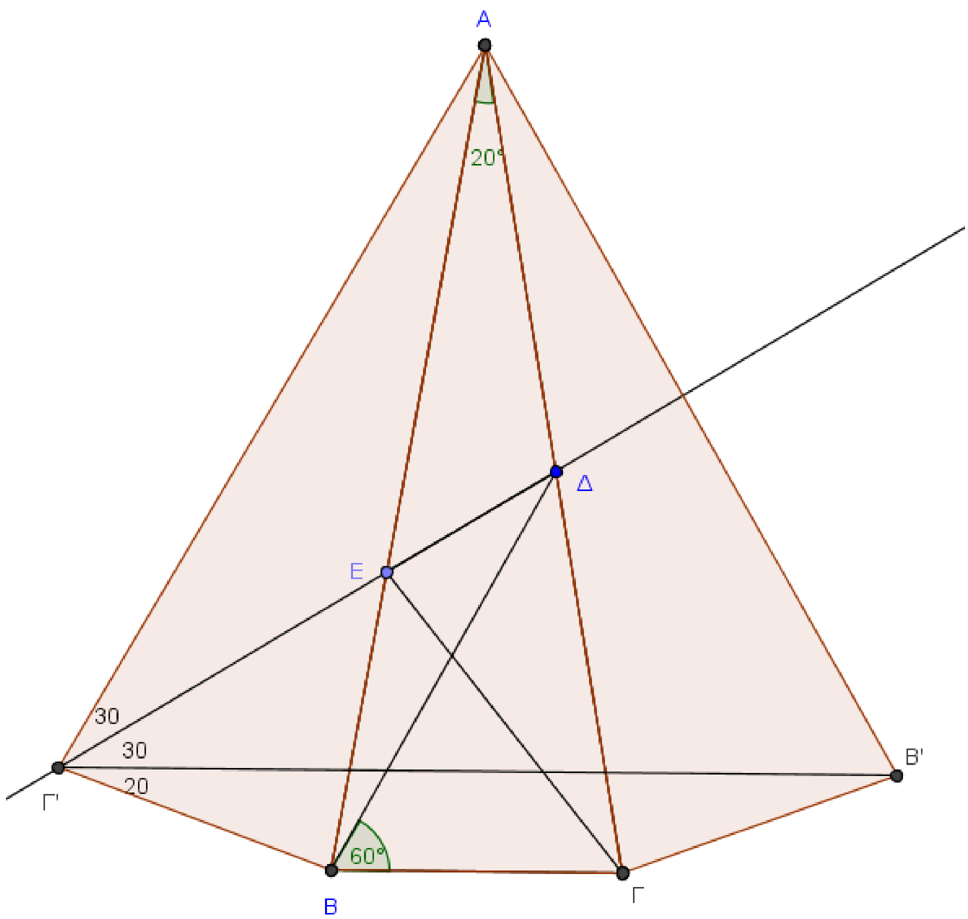


Σχήμα Νο 7

Η **5η λύση** βασίζεται στη ιδέα της χάραξης του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΔΕΓ. Το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΕΔΓ είναι το σημείο κλειδί για την προτεινόμενη λύση. Στο σχήμα 7 ισχύουν τα εξής:

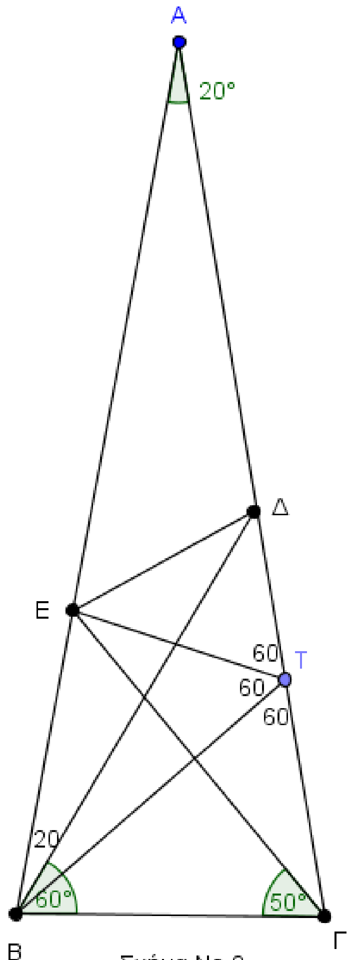
Γωνία ΕΟΔ = 60^o, επειδή είναι διπλάσια από την εγγεγραμμένη γωνία ΕΓΔ = 30^o. Το τρίγωνο ΕΟΔ είναι ισόπλευρο, αφού είναι ισοσκελές (ΟΕ = ΟΔ) και έχει γωνία ΕΟΔ = 60^o. Επειδή ΔΕ = ΔΟ, το σημείο Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΕΟ. Το πιο δύσκολο μέρος του συλλογισμού μας είναι η απόδειξη ότι η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΕΟ, δηλαδή ότι το Β ανήκει και αυτό στη μεσοκάθετο, αφού ήδη έχουμε ότι το Δ έχει αυτή την ιδιότητα. Σίγουρα το Β ανήκει στην μεσοκάθετο του ΕΓ, αφού ΒΕ = ΒΓ. Επειδή γωνία ΟΒΓ = 40^o και γωνία ΕΒΔ = 20^o (αφού τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές), προκύπτει ότι γωνία ΔΒΟ = 20^o. Δηλαδή η ΒΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΕΔΟ = 60^o. Αυτό σημαίνει ότι ΕΔΒ = 30^o.

Η 6η λύση βασίζεται στην έννοια της αμφίπλευρης συμμετρίας. Κατασκευάζουμε το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τους φορείς των ευθειών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και παίρνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ΄ και ΑΓΒ΄ αντίστοιχα. Το νέο τρίγωνο ΑΓ΄Β΄ είναι ισόπλευρο, αφού ΑΓ΄= ΑΒ = ΑΓ = ΑΒ΄ και γωνία Γ΄ΑΒ΄ = $2 \cdot 30^o = 60^o$. Άρα, γωνία ΒΓ΄Β΄= 20^o. Το τετράπλευρο Γ΄ΕΓΒ έχει λόγω συμμετρίας ΕΓ΄ = ΕΓ και ΒΓ΄= ΒΓ. Άρα, γωνία ΕΓ΄Β = 50^o = γωνία ΕΓΒ. Συνεπώς, γωνία ΕΓ΄Β΄= 30^o. Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία Γ΄ΕΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΓ΄Β΄ του ισοπλεύρου τριγώνου. Επειδή ΑΓ΄// ΒΔ (η απόδειξη είναι απλή επειδή έχουμε εντός εναλλάξ γωνίες ίσες), προκύπτει ότι και η γωνία ΕΔΒ = γωνία ΑΓ΄Ε = 30^o.



Σχήμα 8

Η $7^η$ **λύση** βασίζεται στην κατασκευή διχοτόμων και στις ιδιότητες του παράκεντρου ενός τριγώνου. Στο σχήμα 9 φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας ΕΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Τ. Η ΒΔ είναι τώρα διχοτόμος της γωνίας ΕΒΤ, αφού γωνία ΑΒΔ = 20^o και γωνία ΔΒΤ = 20^o. Επειδή το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές, η διχοτόμος ΒΤ είναι και ύψος του, άρα γωνία ΒΤΓ = 60^o = γωνία ΕΤΒ = γωνία ΕΤΔ. Αυτό σημαίνει ότι η ΕΤ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΤΔ.

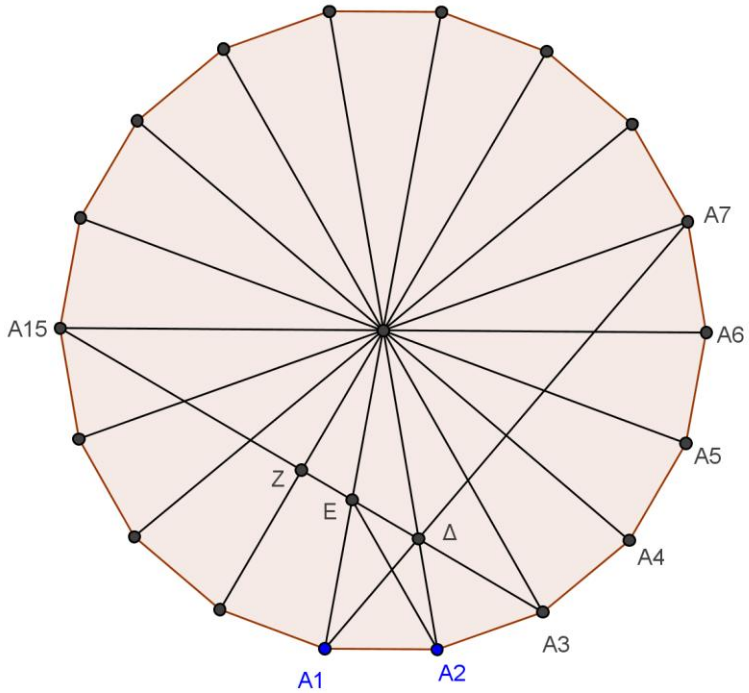


Σχήμα Νο 9

Η $8^η$ **λύση** είναι μία τριγωνομετρική λύση που βασίζεται στη εφαρμογή του νόμου των ημιτόνων στα τρίγωνα ΒΕΔ και ΒΓΔ. Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές με ΒΕ = ΒΓ. Η ισότητα αυτή συνδέει τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις σχέσεις με το νόμο των ημιτόνων. Αποδεικνύεται ότι για τη γωνία ΕΔΒ = x έχουμε την τριγωνομετρική σχέση:
ημ(20^o + x) = 2συν40^o·ημx. Η επίλυση αυτής της τριγωνομετρικής εξίσωσης για $0 < x < 90^o$ μας δίνει τη λύση x = 30^o. Έχει ενδιαφέρον η λύση της!
Σημειώνουμε ότι, στην ίδια εξίσωση καταλήγουμε αν επιχειρήσουμε να προσεγγίσουμε το πρόβλημα μέσω της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Αν ορίσουμε ως Β(0, 0), και Γ (2, 0), προκύπτει ότι Α(1, εφ80^o). Βρίσκουμε τις εξισώσεις των ευθειών ΒΔ και ΓΕ και τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Ε. Το συνημίτονο της γωνίας ΕΔΒ προκύπτει από τον γνωστό τύπο της γωνίας των διανυσμάτων ΔΒ και ΔΕ.

Μία άλλη λύση μπορεί να είναι μέσω των μιγαδικών αριθμών με τη χρήση διανυσματικών ακτινών των μιγαδικών, όπως προτείνεται στην εργασία του Κ. Παπαδόπουλου (βλέπε βιβλιογραφία).

Η $9^η$ **λύση** που προβάλουμε έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, επειδή συσχετίζει το συγκεκριμένο πρόβλημα με τις ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων. Θεωρούμε λοιπόν ένα κανονικό 18-γωνο. Η επιλογή του σχήματος αυτού δεν είναι τυχαία, επειδή η κεντρική γωνία ενός κανονικού 18-γωνου είναι 20^o, όπως ακριβώς στο δεδομένο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε λοιπόν, όλες τις ακτίνες του κανονικού 18-γωνου με κέντρο Α και θεωρούμε μία πλευρά του έστω A_1A_2, όπως στο σχήμα 10. Στο σχήμα αυτό φέρουμε τις κατάλληλες διαγώνιες ώστε να σχηματιστεί το τρίγωνο ΑΔΕ και μετά το πρόβλημά μας ανάγεται σε απλούς υπολογισμούς εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν όλες σε γνωστά τόξα που σχηματίζονται από τον περιγεγραμμένο κύκλο στο κανονικό 18-γωνο. Θεωρούμε ότι η τεχνική αυτή έχει σημαντικά διδακτικά πλεονεκτήματα, επειδή όχι μόνο απλοποιεί τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος, αλλά επειδή «αποκαλύπτει» ένα κρυφό υπόβαθρο στο οποίο στηρίζεται όλος ο μηχανισμός για τη λύση του προβλήματος.



Σχήμα No 10

Τι ενδιαφέρον παρουσιάζει το πρόβλημα για τη Διδακτική των Μαθηματικών.

Το πρόβλημα που μελετούμε έχει ορισμένα χαρακτηριστικά που το καθιστούν «ενδιαφέρον» και για τη Διδακτική της Γεωμετρίας. Το πρώτο χαρακτηριστικό είναι ότι επιδέχεται μία πληθώρα λύσεων και πολλαπλών προσεγγίσεων. Η χάραξη της κατάλληλης «βοηθητικής γραμμής» είναι ένα κομβικό σημείο στο οποίο πρέπει να εστιάζεται η διδασκαλία της Γεωμετρίας. Από την άποψη αυτή το πρόβλημά μας είναι ένα εξαιρετικό παράδειγμα. Ένα άλλο στοιχείο που καθιστά το πρόβλημά μας σημαντικό για μελέτη είναι οι πιθανές γενικεύσεις που μπορούμε να επινοήσουμε. Αυτές όχι μόνο μας οδηγούν σε νέα προβλήματα για έρευνα, αλλά μας δίνουν την ευκαιρία να διαμορφώσουμε διδακτικές προτάσεις για ένα σύνολο συναφών γεωμετρικών προβλημάτων με τα ίδια ή παρόμοια χαρακτηριστικά.

Μία γενίκευση του προβλήματος είναι η εξής: *Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και γωνία ΒΑΓ =2α. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΓ ώστε γωνία ΔΒΓ = β και σημείο Ε στην πλευρά ΑΒ ώστε γωνία ΕΓΒ = γ. Να βρεθεί η γωνία ΕΔΒ = φ συναρτήσει των α, β, γ.*

Αποδεικνύεται με χρήση του νόμου των ημιτόνων στα τρίγωνα ΒΕΔ, ΒΓΔ και ΒΕΓ ότι:

$$\sigma\varphi\varphi = \frac{2\cos a \cdot \cos(a-\gamma)}{\sin\gamma \cdot (\cos 2a + \cos 2b)} - \tan(a+b)$$

Όπως επισημαίνει ο Konstantin Knop στο σχετικό άρθρο του στο περιοδικό Quantum, το πρόβλημα αυτό είναι ιδιαίτερα κατάλληλο για εξάσκηση υποψήφιων για μαθηματικούς διαγωνισμούς. Σημειώνει ότι τέθηκε το 1993 στην Μαθηματική Ολυμπιάδα της Ουκρανίας. Παραθέτει ορισμένες λύσεις που δόθηκαν από τους μαθητές του Ομίλου Μαθηματικών που δίδασκε ο ίδιος. Μάλιστα, δίνει μία άλλη εκδοχή του προβλήματος την οποία εμπνεύστηκε ο μαθητής του Sergey Yurin. *Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και γωνία ΒΑΓ = 20^o. Αν ορίσουμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΓ ώστε ΑΔ = ΒΓ να βρεθεί το μέτρο της γωνίας ΔΒΓ.*

Επισημάνσεις για ορισμένα ερευνητικά ερωτήματα σχετικά με το πρόβλημα.

Ερευνητικό ενδιαφέρον παρουσιάζει μία γενίκευση του προβλήματος αυτού. Πρόκειται για το ερώτημα «*πόσα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ υπάρχουν, στα οποία το μέτρο των γωνιών ΒΑΓ, ΔΒΓ, ΕΓΒ και ΔΕΓ σε μοίρες είναι φυσικός αριθμός;*». Με τη βοήθεια της Τριγωνομετρίας και με τη χρήση προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή βρέθηκε ένας ικανός αριθμός τέτοιων τριγώνων. Για παράδειγμα αν η γωνία Α στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ισούται με 20^o, τότε υπάρχουν οκτώ διαφορετικές περιπτώσεις τριγώνων, οι οποίες αποτυπώνονται στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός τριγώνων	Γωνία ΒΑΓ	Γωνία ΔΒΓ	Γωνία ΕΓΒ	Γωνία ΔΕΓ
1	20^o	50^o	20^o	60^o
2	20^o	50^o	40^o	60^o
3	20^o	60^o	30^o	80^o
4	20^o	60^o	50^o	85^o
5	20^o	65^o	25^o	85^o
6	20^o	65^o	60^o	85^o
7	20^o	70^o	50^o	110^o
8	20^o	70^o	60^o	110^o

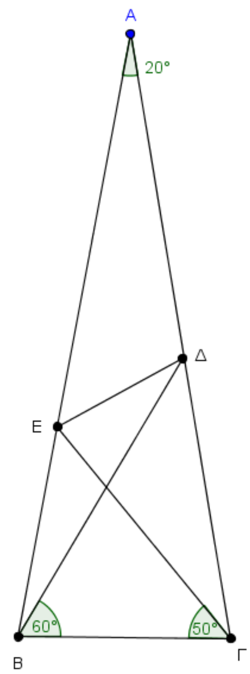
Προαναφέραμε την αξιοσημείωτη εργασία του Νίκου Δεργιαδέ, η οποία δημοσιεύτηκε σε ελληνικό περιοδικό και για το λόγο αυτό παραμένει σχετικά άγνωστη. Σε αυτή επιχειρείται η ανάδειξη μέσω προβλημάτων της αξία των υπολογιστικών προγραμμάτων στην έρευνα και στη μελέτη «ιδιαζόντων» μαθηματικών προβλημάτων. Πιθανώς, δεν ήταν τυχαία η επιλογή του συγκεκριμένου προβλήματος. Χρησιμοποιεί το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα ΒΕΔ, ΒΔΓ και ΕΒΓ, ονομάζει γωνία ΔΒΓ = y, ΕΓΒ = z, ΕΒΓ = x, ΕΔΒ = ω και παίρνει τις σχέσεις: $\frac{BE}{B\Delta} = \frac{\sin\omega}{\sin(x-y+\omega)}$, $\frac{B\Delta}{B\Gamma} = \frac{\sin x}{\sin(x+y)}$, $\frac{B\Gamma}{BE} = \frac{\sin(x+y)}{\sin z}$.

Άρα, sinω·sinx·sin(x+z) = sin (x-y+ω)·sin(x+y)·sinz, χρησιμοποιεί τις παραπάνω αλγεβρικές σχέσεις και μετά από πράξεις καταλήγει στον τύπο:

$$\tan\omega = \frac{(\tan^2 x - \tan^2 y)\cdot \tan z}{\tan^2 x\cdot(1+\tan^2 y) - \tan y\cdot \tan y\cdot \tan z\cdot(1+\tan^2 x)}.$$

Κατόπιν δημιούργησε ένα πρόγραμμα στο υπολογιστή με το οποίο ανακάλυψε για ποιες ακέραιες τιμές των μεταβλητών x, y και z, η μεταβλητή ω παίρνει και αυτή ακέραιες τιμές. Έλεγξε 113564 διαφορετικές περιπτώσεις και έλαβε 53 διαφορετικές λύσεις σε χρόνο 87 δευτερόλεπτα. Στη συνέχεια, ο Νίκος Δεργιαδές έθεσε το ερώτημα των γεωμετρικών λύσεων των 53 αυτών προβλημάτων και έδωσε ως παράδειγμα τη γεωμετρική λύση 4 τέτοιων γεωμετρικών προβλημάτων. Στο τέλος της εργασίας του επιγραμματικά αναφέρει, «*τις υπόλοιπες περιπτώσεις δεν είχα την υπομονή να τις μελετήσω, διότι κατά πάσα πιθανότητα είναι σπαζοκεφαλιές ως προς την απόδειξη με καθαρή Γεωμετρία. Όσοι λοιπόν, νομίζετε ότι αξίζει η προσπάθεια, προσπαθήστε*».

Άρα, ως προς τη γενίκευση του προβλήματος, μόνο σε λίγες περιπτώσεις έχουν δοθεί καθαρά γεωμετρικές λύσεις, μάλιστα σε κάθε περίπτωση φέρουμε διαφορετικά ευθύγραμμα τμήματα ως προς το πλήθος, αλλά και ως προς τη θέση τους. Παραμένει λοιπόν ανοικτό ζήτημα, η γεωμετρική επίλυση όλων αυτών των προβλημάτων και κυρίως αν υπάρχει ένας ενιαίος τρόπος αντιμετώπισής τους. Αξίζει να σημειωθεί ότι, τα προβλήματα αυτά συνδέονται άμεσα με ένα άλλο γενικότερο πρόβλημα, αυτό της εύρεσης και ταξινόμησης όλων των τετραπλεύρων, στα οποία το μέτρο σε μοίρες κάθε γωνίας που σχηματίζεται μεταξύ των πλευρών και των διαγωνίων τους είναι φυσικός αριθμός. Για παράδειγμα, ένα τέτοιο τετράπλευρο είναι αυτό με κορυφές ΒΓΔΕ στο διπλανό σχήμα.



Συνοψίζοντας τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την παρουσίαση ενός «δύσκολου» μεν, αλλά φαινομενικά χωρίς ιδιαίτερο ενδιαφέρον γεωμετρικού προβλήματος των Στοιχειωδών Μαθηματικών διαπιστώνουμε τα εξής: Το βιβλιογραφικό «σκάλισμα» προβλημάτων που εμφανίζουν μία αξιοσημείωτη περιοδική εμφάνιση και μία επίμονη συνεχή παρουσία, μπορεί να μας αποκαλύψει κάποιες από τις αιτίες για τις οποίες διάφοροι ερευνητές υψηλού ή μέσου επιπέδου αφιερώνουν χρόνο για την επίλυσή τους. Η υπομονετική έρευνα και η «περιέργεια» πολλές φορές κρύβει σημαντικότερα κίνητρα, εκτός από την απλή διάθεση για την ανακάλυψη της αλήθειας ενός μαθηματικού τύπου, ή της επίλυσης μιας άγνωστης μαθηματικής σχέσης. Συνεπώς, η Διδακτική των Μαθηματικών έχει όφελος αν στρέψει το ενδιαφέρον της στη μελέτη τέτοιων προβλημάτων, ώστε να απαντήσει σε ερωτήματα όπως τα ακόλουθα:

1. Μπορούμε με κάποιο διαγνωστικό τεστ να γνωρίζουμε εκ των προτέρων, ποια από τις τεχνικές επίλυσης θα χρησιμοποιήσει ένας συγκεκριμένος λύτης για να προσεγγίσει και να λύσει το πρόβλημα;
2. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός υποδείξεων που πρέπει να δώσουμε σε έναν υποψήφιο, ώστε αυτός να αντιμετωπίσει ένα τέτοιο πρόβλημα;
3. Ποια είναι τα χρονικά όρια της διδασκαλίας με την έννοια του αριθμού παρουσίασης τεχνικών εκ μέρους του διδάσκοντος και ποια είναι τα περιθώρια πρωτοβουλίας που πρέπει να δώσουμε στους μαθητές, ώστε να είναι σε θέση να επιλύουν μόνοι τους τέτοια προβλήματα;
4. Ποιο είναι το παιδαγωγικό όφελος από την παρακίνηση των μαθητών για κατασκευή τέτοιων προβλημάτων (problem posing), ανεξάρτητα από το γεγονός αν είναι σε θέση να τα επιλύουν και να απαντούν στα ερωτήματα που θέτουν;
5. Έχουμε μετρίσιμα κριτήρια για το ποσοστό των τυπικά «εκπαιδευμένων» μαθητών που είναι σε θέση να επιλύουν τέτοιου είδους προβλήματα;
6. Εν τέλει, αυτό που είναι από την άποψη της Διδακτικής εξαιρετικά ενδιαφέρον, πώς επηρεάζει η διδασκαλία ή η διδακτική προσέγγιση των τεχνικών επίλυσης του συγκεκριμένου προβλήματος, τις προσπάθειες ενός μαθητή για την επίλυση σχετικών προβλημάτων μικρότερου ή μεγαλύτερου βαθμού δυσκολίας;

Βιβλιογραφία:

Coxeter H.S.M. & Greitzer S.L., (1967), *Geometry Revisited*, Mathematical Association of America, σελίδα 26. Οι συγγραφείς στις λύσεις προτείνουν μόνον έναν τρόπο.

Crux Mathematicorum, *Problem 134*, 2, (1976), σελίδα 68.

Gale D. (1995), *Configurations with Rational Triangles*, The Mathematical Intelligencer, τεύχη 17(1), 17(2), σελίδες 23-24 και 39 αντίστοιχα.

Honsberger Ross, (1976), «*Four Minor Gems from Geometry*», Mathematical Gems II, Mathematical Association of America.

Honsberger Ross, (2001) «*Three Solutions to a Variation on an Old Chestnut*», Mathematical Chestnuts from Around the World, Mathematical Association of America.

Knop Constantine, (1994), «*Nine Solutions to One Problem*», Quantum, May-June, σελίδες 46–49. Το ίδιο άρθρο δημοσιεύτηκε στην ελληνική έκδοση του περιοδικού στο τεύχος 1-2 του 1994 στις σελίδες 54-57, με τον υπότιτλό «και άφθονες ακέραιες γωνίες».

Leikin Roza (2001), «*Dividable Triangles—What Are They?*», Mathematics Teacher, May 2001, σελίδες 392–398.

Liu Andy, (1997), «*A Better Angle From Outside*» Mathematical Horizons, November 1997, σ. 27–29.

Machado A., (1995), «*Nineteen Problems in Elementary Geometry»*. The Mathematical Intelligencer, 17(1), σελίδες 17-19.

Posamentier Alfred & Salkind Charles, (1996), *Challenging problems in Geometry*. Dover Publ. σελίδα 31.

Prasolov Victor, (2000), *Essays on Numbers and Figures*, American Mathematical Association.

Ransom William, (1955), *One Hundred Mathematical Curiosities*, J. Weston Walsh.

Ransom William, (1959), *Trigonometric Novelties*, J. Weston Walsh.

Rike Tom, (2002), *An Intriguing Geometry Problem*, Berkeley Math Circle, αποθηκευμένο κείμενο με μορφή στη σελίδα PDF, 5 Μαίου 2002. http://mathcircle.berkeley.edu/BMC4/Handouts/geoprob.pdf

Taylor Peter & Storozhev A.M. (1998), *Tournament of Towns 1993–1997*, Australian Mathematics Trust.

Tripp C., (1975), *Adventitious Angles*. The Mathematical Gazette, Vol. 59, No 408.

Wells David, (1992), *The Penguin Book of Curious and Interesting Puzzles*, Penguin Books, σελίδα 158, λύση στη σελίδα 347.

Wickelgren Wayne, (1974), How to solve mathematical problems. Elements of a theory of problems and problem solving, W.H. Freeman and Company, σελίδες 179-180.

Δεργιαδές Νικόλαος, (1992), Ερευνώντας με τη βοήθεια του Υπολογιστή, περιοδικό Διάσταση, τεύχος 3-4, σελίδες 139-146.

Θωμαΐδης Γιάννης & Πούλος Ανδρέας (2000), *Διδακτικής της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, σελίδες 112-115.

Παπαδόπουλος Κώστας, (2005), Ογδόντα χρόνια υπολογιστικών γωνιακών σχέσεων σε τρίγωνα και τετράπλευρα, Μαθηματική Επιθεώρηση, Νο 63, σελίδες 35-48.

Περιοδικό *Θεαίτητος* (1990), *Πρόβλημα 301*, Τεύχος 2-3, έκδοση Τ.Ε.Ι. Ηρακλείου Κρήτης, σελίδα 224. Προτείνεται μία τριγωνομετρική λύση.

Στεργίου Μπάμπης (2011), *Γεωμετρία 1, για μαθηματικούς διαγωνισμούς*. Εκδόσεις Σαββάλας, Αθήνα, σελίδες 144-145.

Δημοσιεύσεις στο Διαδίκτυο συζητήσεις και επισημάνσεις από το φόρουμ Mathematica.

Ασκήσεις Γεωμετρίας από το αρχείο του Mathematica 2008-2009. Βιβλίο σε ηλεκτρονική μορφή που υπάρχει ελεύθερο στην ιστοσελίδα www.mathematica.gr . Οι σελίδες 17-28 και 146-147 αφορούν το θέμα μας και ορισμένες παραλλαγές του.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&t=8707

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&t=8707&p=49249&hilit

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=49&t=657