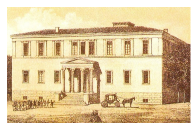
Γενίκευση Πυθαγόρειου θεωρήματος



Λυγάτσικας Ζήνων [*]

Πρότυπο Πειραματικό Γ.Ε.Λ. Βαρβακείου Σχολής

11 Δεκεμβρίου 2012

Εισαγωγή

Δίνουμε δύο ασκήσεις που έχουν σαν αφετηρία το θεώρημα του συνημιτόνου. Αρχίζουμε με ένα γνωστό μας πρόβλημα, το αντίστροφο της άσκησης Αποδεικτική 1 σελ. 48 του σχολικού βιβλίου και συνεχίζουμε με ένα κλασσικό πρόβλημα μεγίστου-ελαχίστου, συνεχίζοντας την παράδοση του Τόγκα στο Βαρβάκειο. Το δεύτερο αυτό πρόβλημα έχει παρουσιασθεί στο περιοδικό *Απολλώνιος* του παραρτήματος της Ε.Μ.Ε. του Ν. Ημαθίας τχ. 3ο σελ. 121-123.

1 Τα προβλήματα

1.1 1^o Πρόβλημα Steiner-Lehmus

Αν σε ένα τρίγωνο οι δύο εσωτερικές διχοτόμοι είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

1.2 2^o Πρόβλημα Ελαχίστου

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ σημείο που κινείται στο εσωτερικό του $B\Gamma$. Θεωρείστε δύο σημεία M και N στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, έτσι ώστε οι γωνίες $\widehat{BM\Delta} = \widehat{\Delta N\Gamma} = \widehat{\omega}$, όπου $\widehat{\omega}$ σταθερή γωνία για οποιαδήποτε θέση του Δ.

Σε ποιά θέση του Δ πάνω στην $B\Gamma$ το μήκος MN γίνεται ελάχιστο;

[*] c:\education\ B_LYC \geniki\ geometry\9\GeneralizationPT.tex

2 1^o Πρόβλημα Steiner-Lehmus

Το πρόβλημα έχει πολλές λύσεις, δες για παράδειγμα στο [H]. Μια λύση που δεν χρησιμοποιεί την μετρική γεωμετρία δίνει ο Π. Πάμφιλος στο [Π], σελ. 37. Στο ίδιο κείμενο ο Π. Πάμφιλος δίνει μια επίκαιρη απόδειξη στην ύλη της Γεωμετρίας της Β Λυκείου, που βρισκόμαστε, η οποία χρησιμοποιεί το θεώρημα του συνημιτόνου, δες [Π], σελ. 214.

Στην δεύτερη απόδειξη θα αναζητήσουμε τον υπολογισμό της διχοτόμου τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει των πλευρών του. Για τον λόγο αυτό θα χρειαστούμε το θεώρημα του Stewart το οποίο όπως θα δείτε είναι γενίκευση του θεωρήματος της διαμέσου όταν η διάμεσος είναι τυχαία ευθεία στο εσωτερικό του τριγώνου. Εδώ θα ανατρέξουμε είτε στο βιβλίο του Π. Πάμφιλου είτε στο κλασσικό βιβλίο του Σ. Κανέλλου.

Θεώρημα 2.1 *(Θεώρημα Stewart): Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό της ΒΓ. Τότε ισχύει:*

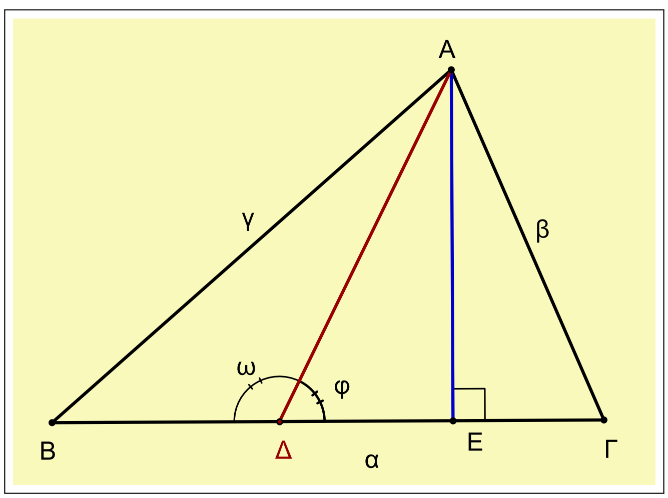
$$AB^2 \cdot \Delta\Gamma + A\Gamma^2 \cdot B\Delta = A\Delta^2 \cdot \Gamma B + \Delta\Gamma \cdot \Gamma B \cdot B\Delta$$

ισοδύναμα, και για τις δύο περιπτώσεις (εσωτερικό - εξωτερικό) μπορούμε να γράψουμε:

$$AB^2 \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} + A\Delta^2 \cdot \overrightarrow{\Gamma B} + A\Gamma^2 \cdot \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} \cdot \overrightarrow{\Gamma B} \cdot \overrightarrow{B\Delta} = 0$$

Απόδειξη:

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\gamma > \beta$.



Σχήμα 1: Θεώρημα Stewart.

Αν ΔE η προβολή της $A\Delta$ πάνω στην πλευρά α, τότε έχουμε ($\widehat{\omega} > 90^o$ και $\widehat{\phi} < 90^o$):

$$AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 - 2\Delta B \cdot \Delta A \cdot \text{συν}\omega \tag{1}$$

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta A \cdot \Delta\Gamma \cdot \text{συν}\phi \tag{2}$$

Πολλαπλασιάζοντας την 1 επί $\Delta\Gamma$ και την 2 επί $B\Delta$ θα έχω:

$$AB^2 \cdot \Delta\Gamma = A\Delta^2 \cdot \Delta\Gamma + \Delta B^2 \cdot \Delta\Gamma - 2\Delta B \cdot \Delta A \cdot \text{συν}\omega \cdot \Delta\Gamma \tag{3}$$

$$A\Gamma^2 \cdot B\Delta = A\Delta^2 \cdot B\Delta + \Delta\Gamma^2 \cdot B\Delta - 2\Delta A \cdot \Delta\Gamma \cdot \text{συν}\phi \cdot B\Delta \tag{4}$$

Τώρα, προσθέτωντας κατά μέλη εύκολα θα πάρουμε την σχέση που θέλουμε:

$$AB^2 \cdot \Delta\Gamma + A\Gamma^2 \cdot B\Delta = A\Delta^2 \cdot \Gamma B + \Delta\Gamma \cdot \Gamma B \cdot B\Delta$$

■

Πόρισμα 2.2 *Αν* $\dfrac{\Delta\Gamma}{B\Delta} = \dfrac{\mu}{\nu}$, *τότε η σχέση στο θεώρημα Stewart γράφεται:*

$$AB^2 \cdot \mu + A\Gamma^2 \cdot \nu = A\Delta^2 \cdot (\mu + \nu) + \Gamma B^2 \cdot \frac{\mu\nu}{\mu + \nu}$$

Απόδειξη: Αφού $\dfrac{\Delta\Gamma}{B\Delta} = \dfrac{\mu}{\nu} \Leftrightarrow \begin{cases} B\Delta = \dfrac{\alpha\nu}{\mu + \nu} \\ \\ \Delta\Gamma = \dfrac{\alpha\mu}{\mu + \nu} \end{cases}$

Αντικαθιστώντας τα $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ στον τύπο του θεωρήματος Stewart, θα πάρουμε το ζητούμενο. ■

Πόρισμα 2.3 *Αν* $A\Delta$ *διάμεσος του τριγώνου* $AB\Gamma$, *τότε ο τύπος του Stewart θα μας δώσει το γνωστό σαν* 1^o *θεώρημα των διαμέσων:*

$$4\mu_\alpha^2 = 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2$$

Απόδειξη: Αφού $\dfrac{\Delta\Gamma}{B\Delta} = \dfrac{1}{1}$, εύκολα καταλήγουμε στο ζητούμενο. ■

Πόρισμα 2.4 *Αν* $A\Delta$ *διχοτόμος, τότε* $\delta_\alpha^2 = \beta\gamma\left(1 - \dfrac{\alpha^2}{(\beta+\gamma)^2}\right)$. *Ομοίως και οι άλλες διχοτόμοι.*

Απόδειξη: Απο το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου έχουμε ότι:

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \begin{cases} B\Delta = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma} \\ \\ \Delta\Gamma = \dfrac{\alpha\beta}{\beta + \gamma} \end{cases}$$

Αν αντικαταστήσουμε στον τύπο του θεωρήματος Stewart, θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}
\gamma^2\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}+\beta^2\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}=\alpha\cdot\left(\delta_\alpha^2+\frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \delta_\alpha^2=\frac{\beta\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+\gamma}-\frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}\\
&\Leftrightarrow \quad \delta_\alpha^2=\beta\gamma\left(1-\frac{\alpha^2}{(\beta+\gamma)^2}\right)
\end{aligned}$$

■

Θεώρημα 2.5 *(Steiner-Lehmus) Αν δύο εσωτερικοί διχοτόμοι σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\delta_\beta=\delta_\gamma \Leftrightarrow \delta_\beta^2=\delta_\gamma^2$, ή:

$$\begin{aligned}
\alpha\gamma-\frac{\alpha\gamma\beta^2}{(\alpha+\gamma)^2} &= \alpha\beta-\frac{\alpha\beta\gamma^2}{(\alpha+\beta)^2}\Leftrightarrow \alpha(\gamma-\beta)+\alpha\beta\gamma\left(\frac{\gamma}{(\alpha+\beta)^2}-\frac{\beta}{(\alpha+\gamma)^2}\right)=0\\
&\dots\\
&\Leftrightarrow \quad \alpha(\gamma-\beta)+\alpha\beta\gamma(\gamma-\beta)\left(\frac{(\gamma^2+\beta\gamma+\gamma^2)+2\alpha(\gamma+\beta)+\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\gamma)^2}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad (\gamma-\beta)\alpha\left[1+\beta\gamma\frac{(\gamma^2+\beta\gamma+\gamma^2)+2\alpha(\gamma+\beta)+\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\gamma)^2}\right]=0\\
&\Leftrightarrow \quad \gamma=\beta
\end{aligned}$$

■

3 2^o Πρόβλημα Ελαχίστου

Μία προσεκτική ματιά στην κατασκευή του προβλήματος στο Geogebra θα μας υπαγορεύσει κατα κάποιον τρόπο την λύση. Αρχίστε με την κατασκευή της ευθείας MN στο λογισμικό. Θέτουμε το $B\equiv O(0,0)$ και $B\Gamma=\alpha$ πάνω στον οριζόντιο άξονα. Τα σημεία M και N είναι οι τομές των πλευρών AB και $A\Gamma$ με τα τόξα των κύκλων των οποίων τα σημεία βλέπουν τα $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ με σταθερή γωνία, δες βιβλίο Γεωμετρίας, το Πρόβλημα στην σελίδα 127.

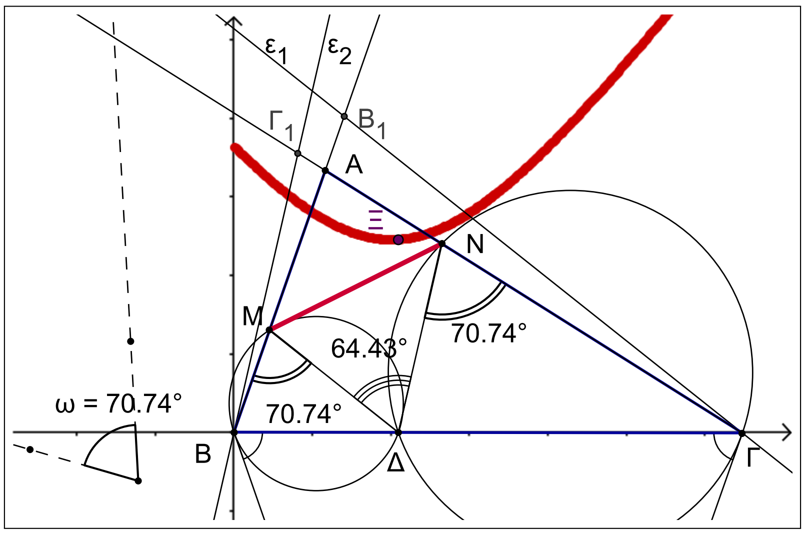
Αναζητώντας την θέση του Δ η οποία ελαχιστοποιεί την απόσταση MN θα χρειασθούμε την βοήθεια της αναπαράστασης του σημείου $\Xi=(x_\Delta,\overline{MN})$, την συνάρτηση δηλαδή του μήκους της MN ως προς μεταβλητή x τη θέση του σημείου Δ στο εσωτερικό του $B\Gamma$. Η καμπύλη που διαγράφει το ίχνος του σημείου Ξ, όπως φαίνεται στο πεδίο σχεδίασης του λογισμικού, έχει ένα ελάχιστο. Άρα, θα μπορούσαμε να αναζητήσουμε μια συνάρτηση δευτέρου βαθμού, έτσι τουλάχιστον αφήνει να εικάσουμε το Geogebra, με μεταβλητή την τετμημένη του σημείου Δ. Προς αυτήν την κατεύθυνση θα στραφούν οι έρευνές μας.

Στο τρίγωνο ΔMN ή πλευρά MN είναι ίση με:

$$MN^2 = \Delta M^2 + \Delta N^2 - 2\Delta M \cdot \Delta N \cdot \text{συν}(\widehat{M\Delta N}) \tag{5}$$

Προφανώς αν MN γίνει ελάχιστο τότε και MN^2 είναι ελάχιστο και αντιστρόφως. Άρα, ψάχνουμε να δούμε πότε το δεύτερο μέλος της 5 γίνεται ελάχιστο.

Κατ' αρχάς η γωνία $\widehat{M\Delta N}$ είναι ίση με $180^o - 2\omega - (\widehat{B} + \widehat{\Gamma})$. Επομένως έχει σταθερό μέτρο.



Σχήμα 2: Η θέση ελαχίστης απόστασης MN.

Επίσης, τα παρακάτω μεγέθη είναι σταθερά:
Αν φέρω την παράλληλο ϵ_2 απο το B προς την ΔN τότε η ϵ_2 είναι σταθερή και επομένως και η $B\Gamma_1$. Επίσης, αν ϵ_1 παράλληλος απο το Γ προς την ΔM, τότε είναι και αυτή σταθερή και το ΓB_1 ομοίως σταθερό. Έτσι τα παρακάτω μεγέθη είναι σταθερά στο σχήμα, η μεταβλητότητά τους εξαρτάται μόνο απο το μέτρο της γωνίας $\widehat{\omega}$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \text{συν}(\widehat{M\Delta N}) & = & c \\ \Gamma B_1 & = & \beta' \\ B\Gamma_1 & = & \gamma' \end{array} \right.$$

Αν $B\Delta = x$ τότε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\Delta M}{B\Delta} = \dfrac{\Gamma B_1}{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta M = \dfrac{x \cdot \gamma'}{\alpha} \\[2ex] \dfrac{\Delta N}{\Delta\Gamma} = \dfrac{BB_1}{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta N = \dfrac{(x-\alpha) \cdot \beta'}{\alpha} \end{array} \right.$$

Με αυτές τις σταθερές, η 5 γράφεται:

$$MN^2 = \left(\frac{\gamma'^2 + \beta'^2 + 2\gamma'\beta' c}{\alpha^2}\right)x^2 - \left(\frac{2\beta'^2}{\alpha} + \frac{2\gamma'\beta' c}{\alpha}\right)x + \beta'^2$$

Το τριώνυμο έχει όμως συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου θετικό αριθμό, αφου μιλάμε για μήκη ευθ. τμημάτων, άρα έχει ελάχιστο

$$y_{\min} = \frac{(-\beta'^2 - \gamma'\beta' c + 2\alpha)\beta'(\beta' + \gamma' c)}{\gamma'^2 + \beta'^2 + 2\gamma'\beta' c}$$

για

$$x = \frac{\alpha\beta'(\beta' + \gamma' c)}{\gamma'^2 + \beta'^2 + 2c\gamma'\beta'}$$

Πρέπει όμως $0 < x < a$ ή εκτελώντας τις σημειουμένες πράξεις, θα πάρουμε $c = \text{συν}(\widehat{M\Delta N}) > -\dfrac{\gamma'}{\beta'}$.

■

4 Βιβλιογραφία

- [AHK]: AbuArqob O., Rabadi H., Khitan J., *A New Prrof for the Steiner-Lehmus Theorem*, International Mathematical Forum, 3, 2008, no. 967-970.
- [H]: Hajja M., *Other Versions of the Steiner-Lehmus Theorem, The Mathematical Association of America, 108, 2001.*
- [K]: Κανέλλος Σ., *Ευκλείδειος Γεωμετρία*, Εκδ. Παπαδημητροπούλου, 1970.
- [Π]: Πάμφιλος Π., *Έλασσον Γεωμετρικόν*, , ηλεκτρονική έκδοση, 2011.