
ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΚΑΤ/ΝΣΗΣ Α' ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ¹

ΤΑΞΗ : Γ, ΚΑΤ/ΝΣΗ

Διάρκεια 1 διδακτική ώρα

1. Να βρείτε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) και ποιές λάθος (Λ):

(α') Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ με άγνωστο το z και $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, έχει άπειρες ρίζες.

(β') Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ τότε, $|z_1| + |z_2| > |z_1 + z_2|$.

(γ') Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z^2 + \bar{z}^2 \leq 0 \Leftrightarrow \Re(z) \leq \Im(z)$.

(δ') Οι εικόνες του μιγαδικού z με $\Im(z) = 3$ βρίσκονται στην ευθεία $y = x$.

(ε') Για κάθε $z \notin \mathbb{R}$ ισχύει $z - \bar{z} \neq 0$.

(5 × 5 = 25
μον.)

2. Να λύσετε² την εξίσωση $\bar{z} = z^2$

(25 Μονάδες)

3. (α) i. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος³ των μιγαδικών z έτσι ώστε

$$|z - i| > |z + 1| \quad (1)$$

(10 Μονάδες)

ii. Αν $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι για να ικανοποιεί ο z την σχέση (1), πρέπει και αρκεί, $x < -y$.

(15 Μονάδες)

(β) Αν z και w μιγαδικοί, έτσι ώστε $|z - i| > |z + 1|$ και $|w - i| < |w + 1|$, τότε:

i. Να βρείτε τον γ.τ. των εικόνων των αριθμών $v = \frac{1}{w - 1}$ με $w \neq 1$. (15 Μονάδες)

ii. Δείξτε ότι $|z - w - i| > |z - w + 1|$. (10 Μονάδες)

¹Π.Π. ΓΕ.Λ. Βαρβακείου Σχολής, Λυγάτσικας Ζήνων, 16 Οκτωβρίου 2012

²Άσκηση 5B α, σελ. 96.

³Άσκηση 5A, σελ. 101.

ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΚΑΤ/ΝΣΗΣ Α' ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ⁴

ΤΑΞΗ : Γ, ΚΑΤ/ΝΣΗ

Διάρκεια 1 διδακτική ώρα

1. Να βρείτε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) και ποιές λάθος (Λ):

(α') Ο μιγαδικός $1 + i$ είναι στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = 2$.

(β') Αν $w = a + bi$, και $z \in \mathbb{C}$ με $z + w = 2a$, τότε $z = \bar{w}$.

(γ') Η εξίσωση $x^2 + x + 1 = 0$ έχει πάντα λύση στους μιγαδικούς.

(δ') Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $|z_1| = |z_2|$ τότε $z_1 = z_2$.

(ε') Αν $z \in \mathbb{C}$ τότε $|z|^2 > z^2$.

(5 × 5 = 25
μον.)

2. Να λύσετε⁵ την εξίσωση $\bar{z} = z^3$.

(30 Μονάδες)

3. (α) Για ⁶ δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 δείξτε ότι:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

(15 Μονάδες)

(β) Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 , $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, τέτοιοι ώστε

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$$

Αν M_1 και M_2 είναι οι εικόνες αντίστοιχα των z_1 και z_2 στο μιγαδικό επίπεδο, τότε:

i. Να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{M_1 O M_2}$ όπου $O = (0, 0)$.

(20 Μονάδες)

ii. Δείξτε ότι $\Re(z_1 \cdot \bar{z}_2) = 0$.

(10 Μονάδες)

⁴Π.Π. ΓΕ.Λ. Βαρβακείου Σχολής, Λυγατσικας Ζήνων, 16 Οκτωβρίου 2012

⁵Άσκηση 5B β, σελ. 96.

⁶Άσκηση 9A, σελ. 101.