Η Μαθηματική Λογική

Λυγάτσικας Ζήνων
Π. Π. ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

Προτίστως: τι είναι τα μαθηματικά ?

Τα μαθηματικά τα κάνει ο μαθηματικός. Δεν γνωρίζω τελικά τι μπορεί να είναι τα καθαρά μαθηματικά, αλλά μπορώ με κάποια ασφάλεια να σας πω τι είναι ο μαθηματικός...

Ο μαθηματικός είναι ένας **hacker**: είναι απέναντι σε μια μηχανή (ο δικός του εγκέφαλος και των άλλων) που του έχει παραδοθεί το σύστημα διαχείρησης, αυτό που στη γλώσσα της πληροφορικής λέμε λειτουργικό σύστημα, χωρίς βοηθήματα και κυρίως … χωρίς το κλειδί, το password στα ελληνικά!

Βρίσκεται στο απλό επίπεδο ενός χρήστη, δεν έχει δηλαδη το δικαίωμα να προγραμματίσει την μηχανή, αλλά μπορεί να χρησιμοποιεί διάφορα προγράμματα.

Όπως και ένας καλός hacker, ο απότερος στόχος του είναι να γίνει ένας υπερ-χρήστης.

Όταν βρίσκεσαι μπροστά από μια άγνωστη μηχανή χωρίς κανένα βοήθημα λειτουργίας, το μόνο μέσο για να την μάθεις είναι να «τρέξεις» τα διάφορα διαθέσιμα προγράμματα (χωρίς ποτέ να φθάσεις να κυριαρχήσεις στο σύστημα διαχείρισης). Οπλίζεσαι με υπομονή εποπτεύοντας προσεκτικά, κομμάτι κομμάτι, την αποκωδικοποίηση των προγραμμάτων.

Είναι δύσκολη η αποκωδικοποίηση αυτή, ακομα και από αυτήν των ιερογλυφικών, γιατί όχι μόνο δεν έχεις τη Rosette,[1] αλλά δεν ξέρεις και ο ίδιος αν και με ποιους χαρακτήρες έχει γράφει…

Ας πάρουμε ένα παράδειγμα: τρέξτε στο μυαλό σας το *«πρόγραμμα»* φυσικός αριθμός και θα συναντήσετε κάπου τους φυσικούς 36, 37, 38.... Ο αριθμός 38 είναι κάτι υπαρκτό μπορώ να το δώ να το νοιώσω? Σκέτο το 38, που είναι ? Που έχετε δεί το αριθμό 38 στη φύση. Ένας τόσο παγκοσμίως γνωστός αριθμός που κρύβεται ? Τι είναι επιτέλους αυτό το όν που φυλάει το 38 ?

Εδώ οι μαθηματικοί κάνανε μια επιτυχημένη αποκωδικοποίηση που χάνεται στα βάθη των αιώνων. «Σπάσαν» τον κώδικα ενός προγράμματος, ριζομένο μέσα στον ανθρώπινο εγκέφαλο, το οποίο στα ελληνικά το λέμε **«επανάληψη»**. Έτσι, το 38 δεν είναι τίποτα άλλο παρά το παράγωγο του προγράμματος της **επανάληψης** 38 φορές του ίδιου πράγματος.

Τα **μαθηματικά είναι κάτι σαν το πρόγραμμα «επανάληψη»**.

Ας μην ξεχνάμε επίσης ότι ο μαθηματικός έχει συχνά την αίσθηση ότι αυτό που βρίσκει κάπου ήδη υπάρχει.

Πάμε λίγο παραπέρα:

Μπορείτε να φανταστείτε τώρα μια **συμμορία από hackers** να επιτίθοντε ταυτόχρονα ο καθένας με τις ικανότητες του, στις ίδιες μηχανές? και να ανακοινώνουν, στο μέτρο του δυνατού, το αποτέλεσμα των δοκιμών τους, δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο αντιλήφθηκαν ότι προγραμματίζεται η μηχανή?

Η αποτελεσματικότητά τους θα γινόταν πραγματικά επίφοβη αν **δεν** είχαν κάτι που να τους εξασφαλίζει **άνετη και ασφαλή επικοινωνία.**

Αν μάλιστα είναι πολλοί, εκδίδουν άρθρα και κάνουν μυστικά συνέδρια.

Φαντασθείτε τώρα η εργασία αυτών των πειρατών να απλώνετε σε αρκετές γενιές, οι γονείς να κληροδοτούν τα αποτελέσματά στα παιδιά τους με σκοπό την τελική νίκη.

Αυτό το **πρωτόκολλο επικοινωνίας** είναι αυτό που λένε οι μαθηματικοί αυστηρή γλώσσα, μαθηματική λογική.

Δεν είναι μαθηματικά ! προφανώς.

Εναι μια γλώσσα με κανόνες, συντακτικό και ορθογραφία, με σκοπό να **μεταδώσουμε με βεβαιότητα** αυτό που ήδη κατακτήσαμε, στις επόμενες γενιές.

Αυτό το απίστευτο σενάριο είναι φυσικά μια γελοιογραφία, αλλά είναι και αυτό το οποίο κάνουν οι μαθηματικοί. Η βασική τους ασχολεία είναι τα μαθηματικά, οι κώδικες με τα προγράμματα δηλαδή που «τρέχουν» στον εγκέφαλό μας.

Τι είναι λογική ?

Η λογική ή καλύτερα η τυπική (formal) λογική, σε αντίθεση με την επιστημολογία και τη θεωρία της γνώσης, θέλει να παρουσιάσει μια θεωρία αποδείξεων τυπικά σωστή.

Θεωρεί αληθής όλους τους συλλογισμούς όπως ένας ευαίσθητος και επαρκής άνθρωπος αισθάνεται σύγουρος για την αλήθεια ενός συλλογισμού του οποίου όλες οι αρχικές προτάσεις είναι σωστές.

[1] Η Rosette είναι η διάσημη πέτρα με τις 3 γραφές: αιγυπτιακά, δημοτικά ιερογλυφικά και ελληνικά. Την αποκοδοκοποίησε ο Champollion το 1822.

Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Για να διαχωρίσουμε τη θέση μας από τη χρήση των λέξεων από την καθημερινή γλώσσα, θα προσθέτουμε μπροστά από κάθε λέξη τη λέξη τυπικός. Έτσι η φράση «αλήθεια του Α συλλογισμού» θα μετατραπή σε «τυπική αλήθεια του Α συλλογισμού». Μεταφράζω το *formal*. Στη συνέχεια θα δούμε την αιτία.

Ένας συλλογισμός είναι **τυπικά έγκυρος** αν παραμένει αληθές όταν αλλάζουμε αυθαιρέτως φράσεις του συλλογισμού. Για παράδειγμα η φράση:

Όταν έχει ομίχλη, η ορατότητα είναι κακή.

είναι ένας αληθής και έγκυρος συλλογισμός αλλά δεν είναι τυπικά έγκυρος!!! Αντίθετα, ο συλλογισμός:

Όταν έχει ομίχη, η ορατότητα είναι κακή.

Έχει ομίχλη,

Συνεπώς *η ορατότητα είναι κακή.*

είναι τυπικά έγκυρος.

Το πιο απλό μέσο να εκφράσουμε ότι ένας συλλογισμός είναι τυπικά έγκυρος, είναι να σημειώσουμε με σύμβολα όλες τις φράσεις του συλλογισμού που μπορούμε αυθαίρετα να αλλάξουμε, χωρίς να πειράξουμε την εγκυρότητα του συλλογισμού. Η δεύτερη φράση λοιπόν θα γίνει;

Αν p τότε q, αφού ισχύει p τότε ισχύει q. Ή :

Αν p τότε q, p

q

και ακόμα καλύτερα

p → q, p

q

Ο παραπάνω συλλογισμός της τυπικής λογικής λέγεται **modus ponens.**

Έτσι μια λογική καθαρά τυπική είναι καθαρά συμβολική.

Η χρήση μεταβλητών δεν επαρκή για την ανάπτυξη της λογικής. Ας δούμε λίγο τα δομικά στοιχεία μιας γλώσσας: τις λέξεις. Στη καθημερινή γλώσσα οι λέξεις είναι αμφισημίες. Το ρήμα «είναι» εκφράζει πότε μεταβλητά χαρακτηριστικά του υποκειμένου, π.χ. είναι πολύ αγαπητός συνάδελφος, πότε ιδιότητες της ουσίας του υποκειμένου , π.χ. το αυτοκίνητο είναι τροχοφόρο όχημα, το «ή» είναι πότε αποκλειστικό, (ή θα δουλέψεις ή θα μείνεις νηστικός), πότε όχι (ή θα πάω σινεμά ή θα διαβάσω, δεν αποκλείεται να κάνω και τα δύο). Για τον λόγο αυτό αντικαθιστούμε τις λέξεις με σύμβολα, αυθαίρετης επιλογής, αλλά με συγκεκριμένη χρήση επιλεγμένη εκ των προτέρων, που τις λέμε **σταθερές**.

Κατασκευάζουμε λοιπόν μια γλώσσα εντελώς τεχνητή. Οποιοδήποτε βαθμό πολυπλοκότητας και αν συναντήσουμε στη τεχνητή αυτή γλώσσα, δεν είναι μια απλή μεταφορά δυσκολίας συγκριτικά με την φυσική γλώσσα, αλλά συνίσταται πάντα σε μια ανακατασκευή δίνοντας σημαντική (schematic) αξία μόνο σε μερικά σημεία που κρίνονται ενδιαφέροντα. Τα προνομιακά αυτά στοιχεία της τυπικής γλώσσας αναπτύχθηκαν σε τέτοιο βαθμό που μπορούν να αντικαταστήσουν έναν μεγάλο αλλά πολύ συγκεκριμένο αριθμό μαθηματικών προτάσεων που συναντάμε στην μαθηματική βιβλιογραφία.

Στην συγκρότηση μιας λογικής επιστήμης, ο καθορισμός της τυπικής γλώσσας δεν είναι παρά το πρώτο βήμα. Το έργο από εδώ και πέρα θα ακολουθήσει δύο διαφορετικές κατευθύνσεις. Την **Θεωρία Μοντέλων** και την **Θεωρία Αποδείξεων**.

Τα μοντέλα της Θεωρίας Μοντέλων

Για να μπορούμε να χαρακτησίζουμε έναν συλλογισμό έγκυρο, δίνοντας θετική τιμή αληθείας *«Α=αληθές»,* κάθε φορά που έχουμε δώσει τη τιμή αληθείας Α στις αρχικές προτάσεις μας, πρέπει να μπορούμε να ορίσουμε την τιμή αληθείας σε κάθε μεταβλητή που θα εμφανισθεί σε όλο το μήκος του συλλογισμού. Με λίγα λόγια πρέπει να έχουμε κανόνες υπολογισμού.

Οι κανόνες αυτοί τέθηκαν για πρώτη φορά από τον Alferd Tarski το 1933. Ο Tarski ονόμασε τη θεωρία αυτή Σημαντική Θεωρία του Προτασιακού Λογισμού, για δύο λόγους:

1. Έδωσε τον ορισμό της αλήθειας και της λογικής συνέπειας ανεξάρτητα από τους συμπερασματικούς κανόνες και τα αξιώματα.
2. Έδωσε μερική απάντηση στην ερώτηση της σημασίας της γλώσσας: γιατί οι λέξεις έχουν νόημα αν μπορούμε να σχηματίσουμε αληθείς φράσεις σ' ένα δυνατό κόσμο.

Αυτό που ενοούσε ο Tarski μέσα από τη θεωρία αυτή είναι απλό: μια μαθηματική θεωρία είναι μαθηματικώς σωστή (αληθής) αν μπορούμε να βρούμε μια ολότητα (univers) μέσα στην οποία η θεωρία είναι αληθής.

Η ιδέα είναι παλιά. Οι μαθηματικοί είχαν προηγούμενο με έγκυρες θεωρίες όπως τα μοντέλα μη ευκλείδειων γεωμετριών από τους Riemann, Lobatchevski και Poincare ή το γεωμετρικό μοντέλο των μιγαδικών αριθμών από τους Gauss και Cauchy.

Ένα μοντέλο δίνει τη δομή για να αξιολογήσουμε την εγκυρότητα μιας θεωρία της λογικής ή των μαθηματικών. Η θεωρία έχει δύο έννοιες που πρέπει να αξιολογηθούν ώστε να αποφασίσουμε:

Η έννοια της **σημαντικότητας**: δηλαδή οι νόμοι που θα μας οδηγήσουν μέσα από μια κατάσταση αρκετά πολύπλοκη, να εξασφαλίσουμε ένα αποτέλεσμα έγκυρο.

Αυτό εξασφαλίζετε μόνο με την ύπαρξη ενός μοντέλου μέσα στο οποίο αυτή είναι αληθής. Η σημαντικότητα της θεωρίας λοιπόν είναι κάτι εντελώς τυπικό και είναι η βάση της θεωρίας Μοντέλων.

Η έννοια της **συντακτικότητας**: αν δηλαδή μπορούμε στη θεωρία να αποδείξουμε μια πρόταση καθώς και την άρνησή της.

Τέλος ας σημειωθεί κάτι που είναι **τελικά το σημαντικότερο της όλης ιστορίας**, τα μοντέλα για την εγκυρότητα μιας θεωρίας είναι πλέον Μαθηματικά μοντέλα, όπως σώματα, δακτύλιοι κλπ, **και όχι** Μοντέλα της Φυσικής, όπως ήθελε για παράδειγμα ο Gauss.

Έτσι, πάρθηκε **το οριστικό διαζύγιο** της **Μαθηματικής από την Φυσική επιστήμη**.

Οι αποδείξεις της Θεωρίας Αποδείξεων.

Η Θεωρία Αποδείξεων είναι η λογική της Λογικής. Είναι η συντακτική παραδοχή της λογικής. Στην αρχή η Θεωρία Αποδείξεων είχε να κάνει με την πολυπλοκότητα της Λογικής. Στο τέλος είδαμε ότι αυτή η πολυπλοκότητα ήταν ένα πρόβλημα που εγγυάται το βάθος του προβλήματος.

Μπορούμε να θεωρήσουμε σαν αξιώματα μερικές προτάσεις της τυπικής γλώσσας και να ορίσουμε αυτόματους συμπερασματικούς κανόνες έτσι ώστε όλες οι προτάσεις που συνεπάγονται από τα αξιώματα να μεταφράζονται σε νόμους Λογικής, όταν εκφράζονται στην κοινή γλώσσα. Η Λογική παρουσιάζεται λοιπόν με τη μορφή μιας θεωρίας των Μαθηματικών, με τα αξιώματα της. Λέμε τότε ότι η Λογική κατασκευάζει ένα **τυπικό σύστημα**. Η μελέτη των συστημάτων αυτών είναι το έργο της θεωρίας αποδείξεων.

Ποιο το σήμερα και το αύριο της Λογικής?

Απλά δεν υπάρχει ούτε **το σήμερα ούτε το αύριο**. Η Λογική έγινε Μαθηματικά. Περιμένουμε τον επόμενο πολιτισμό και βλέπουμε...

Παρά τις διαφορές οι δύο θεωρίες, Θεωρία Μοντέλων και Θεωρία Αποδείξεων, οδηγήθηκαν πολύ συχνά σε ίδια αποτελέσματα. Έτσι το σύνολο των έγκυρων προτάσεων είναι ταυτόσημο με το σύνολο των αποδείξιμων προτάσεων σ' ένα τυπικό σύστημα. Αφού λοιπόν συμβαίνει αυτό, μπορούμε χωρίς διακρίσεις να υιοθετήσουμε την μια ή την άλλη θεωρία. Αυτό συμβαίνει πράγματι σε αυτό που λέμε στη Λογική *Κατηγορηματική Λογική Πρώτης Τάξεως*.

Είδαμε επίσης ότι οι ιδιότητες ενός τυπικού συστήματος εξαρτώνται ως ένα σημείο από την Λογική που χρησιμοποιούμε. Αυτό φαίνεται κυρίως όταν ενδιαφερόμαστε να έχουμε ενδιαφέροντα μαθηματικά θεωρήματα που εξάγονται κυρίως από τον δρόμο αυτό της λογικής.

Το να φθάσουμε όμως στο σημείο που η θεωρία της Λογικής θα γεννήσει νέα θεωρήματα, (δες περίπτωση των p-αδικών σωμάτων των Ersov-Ax-Kochen κλπ), πρέπει να χρησιμοποιήσουμε όχι αμελητέα μαθηματικά. Έτσι, η Λογική στα μαθηματικά δεν δίνει, χωρίς υπερβολικό κόπο, αυτό που υποσχέθηκε στην αρχή: εξαγωγή αποτελεσμάτων μέσα από μια τυπική διαδικασία.

Παρ' όλα αυτά έχει το δικαίωμα να συστεγάζεται με τα μαθηματικά. Αντίθετα, η πιθανότητα λεπτών αναλύσεων μας ξαναστέλνει πίσω στα έργα των μεγάλων στοχαστών (όπως ο Αριστοτέλης, οι στωικοί, ο Leibnitz ...) των οποίων το έργο διαφυλάσσει, παρά τις ασάφειες που έχουν εντοπισθεί, την αξία να κάνουμε τα πρώτα βήματα για μια ακριβή θεωρία των έγκυρων συλλογισμών.

Πολλοί κλάδοι επιστημών και τεχνών θέλησαν να οικιοποιηθούν τα επιτεύγματα μιας τυπικής γλώσσας. Ακόμα και η λογοτεχνική ανάλυση και κριτική.... Αποτυγχάνοντας παταγωδώς να έχει η Λογική μια έκφραση παγκόσμια, ξαναγύρισε στην μητρική της καταγωγή: τα μαθηματικά, αφού μεθοδολογικά ήταν δύσκολο να την ξεχωρίσουμε από την μεθοδολογία ενός οπουδήποτε άλλο κλάδου των θετικών ή των άλλων επιστημών.

Έτσι, το τελευταίο μεγάλο επίτευγμα της Λογικής είναι η ολοκληρωτική επίτευξη σχέσεων με όλους τους τομείς των μαθηματικών: με την άλγεβρα πρωτίστως, μετά διάφορους τομείς της ανάλυσης, της τοπολογίας, της θεωρίας αριθμών, της θεωρίας κατηγοριών κ.ο.κ. Επιπλέον η πληροφορική πήρε υπόψιν της τα βαθιά νοήματα της λογικής και ανοίχτηκε σε νέες έρευνες. Η ολική απομόνωση της Λογικής στην δεκαετία του '60 πήρε τέλος, αφήνοντας τη Λογική σαν έναν κλάδο των Μαθηματικών.

Λυγάτσικας Ζήνων
ΠΕ03 – Μαθηματικός
MSc (Logic and Model Theory)
PhD (Real Algebraic Geometry)
ΠΠ ΓΕΛ Βαρβάκειος Σχολή