ΤΑ ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

(μετάφραση της διάλεξης του Jean Yves Girard από Ζ. Λυγάτσικα)

Ο Μαθηματικός Φορμαλισμός

Ο 19ος αιώνας είναι ο αιώνας προβληματισμού πάνω στην Ανάλυση (τη θεωρία των συναρτήσεων, των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων). Μια εντυπωσιακή εργασία ανακάλυψε, μαζί με τις κλασσικές συναρτήσεις όπως το ημίτονο, κάποιες καμπύλες που δεν είχαν εφαπτομένες. Αυτό το παράδειγμα, αντίθετο στην μέχρι τότε διαίσθηση σχετικά με τον χαρακτήρα της καμπύλης, ήταν αρκετό την εποχή εκείνη να βάλει του μαθηματικούς να ξανασκεφτούν τη φύση του μαθηματικού αντικειμένου όπως περιέγραψε στα άρθρα του ο Cantor. Η αναθεώρηση αυτή έγινε αυτοδίκαια ο στόχος της θεωρίας Συνόλων. Η θεωρία Συνόλων πρωτοεμφανίζεται το 1880 και παίρνει την οριστική της μορφή στις αρχές του 20ου αιώνα. Η θεωρία αυτή μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε τους πραγματικούς αριθμούς – που χρησιμοποιεί η ανάλυση – από τους φυσικούς 0,1,2,3,… οι οποίοι προσδιορίζονται και αυτοί εξ αρχής.

Η θεωρία Συνόλων συχνά παρουσιάζεται σαν η γλώσσα των μαθηματικών. Αυτό είναι απολύτως αναληθές: αν πάρετε τους πραγματικούς αριθμούς όπως αυτοί ορίζονται από τη θεωρία συνόλων, δεν θα μπορούσατε ποτέ να λύσετε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού! Αντιθέτως, αυτό που είναι αληθές, είναι ότι η θεωρία συνόλων διατυπώνει για πρώτη φορά την *αρχή της ενότητας των μαθηματικών*. Η θέση της το να οδηγήσουμε τα μαθηματικά σε συνολοθεωρητικές κατασκευές μας επιτρέπει χωρίς αντιφάσεις να χρησιμοποιούμε μεθόδους της άλγεβρας και της ανάλυσης – υπολογισμοί με γράμματα, μεταβλητές και εξισώσεις – για να λύσουμε προβλήματα, αντίθετα με τη Φυσική που χρησιμοποιεί αβέβαιες γέφυρες μεταξύ των μεθόδων της.

Στο έργο αυτό της ενοποίησης κεντρικό ρόλο παίζει η Αριθμητική – τα μαθηματικά των φυσικών αριθμών. Το 1900 εμφανίζεται λοιπόν στο προσκήνιο η Αριθμητική του Peano, ένας από τους πιο ισχυρούς φορμαλισμούς.

Η Αριθμητική του Peano

Ας δούμε πολύ γρήγορα τον Φορμαλισμό του Peano και την ορολογία των προτάσεων, των αξιωμάτων και κανόνων.

Οι όροι: 0: x, y, z, …. : St : t+t' : t x t'.

όροι είναι: το 0, οι μεταβλητές x, y, z, …. ο επόμενος St ενός όρου t, το άθροισμα δυο όρων t+t' και το γινόμενο t x t'. Οι όροι αυτοί είναι η γραφιοκρατία των φυσικών αριθμών. Έτσι το 6 είναι SSSSSS0… η οπισθοδρομική αυτή προβαβυλωνιακή παλινδρόμιση με 6 S, είναι η όψη της μοντέρνου.

Πρόταση: $t = t'$, $\neg P$, $P \wedge P$, $P \vee P'$, $P \Longrightarrow P'$, $\forall x P$, $\exists x P$.

Που σημαίνει, μια πρόταση είναι ή μια ισότητα : t = t' μεταξύ 2 όρων, ή η άρνηση μιας πρότασης, ή η σύζευψη ή διάζευξη ή συνεπαγωγή δύο προτάσεων, ή η καθολική ή υπαρξιακή ποσόδειξη μιας πρότασης. Οι προτάσεις είναι η *γραφιοκρατία* των ιδιοτήτων. Για παράδειγμα η περίπτωση του θεωρήματος Fermat με εκθέτη 3 :

$\forall x \forall y \forall z(x\neq 0 \wedge y\neq 0 \wedge z\neq 0) \Longrightarrow(x*(x*x)+y*(y*y) \neq z*(z*z))$ με $a \neq b :: \neg (a = b)$

Το να γράψουμε μια πρόταση συντακτικά σωστά δεν υποδηλώνει και την αλήθεια της! Για την φορμαλιστική γραφιοκρατία όλες οι προτάσεις έχουν προς στιγμή τα ίδια δικαιώματα.

Αξιώματα:

$P \Longrightarrow P$: $x = x$ (Λογική)

$x + 0 = x$, $x + Sx = S(x+y)$, $x * 0 = 0$, $x*Sy = (x*y) + y$, $Sx \neq 0$, $Sx = Sy \Longrightarrow x = y$ (Αριθμητική)

Τα αξιώματα της Λογικής επαφίονται συχνά στη διακριτική ευχέρεια του εκάστοτε συγγραφέα. Δεν λένε σχεδόν τίποτα, αντίθετα αυτό που είναι εντυπωσιακό είναι ότι μπορείς με αυτά να κάνεις κάτι τι!

Με τη δεύτερη ομάδα αξιωμάτων ορίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο με τη βοήθεια του 0 και S. Τα δύο τελευταία αξιωματα λέν ότι όλοι οι φυσικοί είναι σαφώς διακεκριμένοι μεταξύ τους.

Κανόνες Απόδειξης

O modus Ponens (νόμος αποσπάσεως)

$\frac{P,\ P \Rightarrow Q}{Q}$ είναι η βάση όλων των παραγωγικών μαθηματικών επιχειρημάτων. Δείχνω το Λήμμα P στη συνέχεια αποδεικνύω P $\Longrightarrow$ Q (Q με την υπόθεση P), και παίρνω την αλήθεια της Q.

Επαγωγή

$\frac{P[0],\ P[x] \Rightarrow P[Sx]}{P[y]}$ Αν η αλήθεια μίας ιδιότητα ισχύει στο 0 και «περνά» στον επόμενο, τότε αληθεύει για όλους τους φυσικούς. Η επαγωγή είναι απαραίτητη: δοκιμάστε να αποδείξετε ότι 0+x=x.

Θεωρήματα

1) SSS0 + SS0 = SSSSS0

2) $\forall$ x : 0 + x = x

Μια **απόδειξη είναι** μια ακολουθία κανόνων, αρχίζοντας από τα αξιώματα, έτσι ώστε να πάρουμε το συμπέρασμα ενός θεωρήματος. Σημειώστε την αδυσώπητη ομοιότητα με την ακρίβεια της μηχανής.

Μαθηματικά vs Πληροφορική

Παρά τις υπερβολικές δηλώσεις, είναι αδύνατο να φαντασθούμε τα μαθηματικά σαν μια καθαρά τυπική (formal) διαδιακασία: καμμία γραφιοκρατική ομάδα δεν θα μπορούσε να αποδείξει το θεώρημα του Fermat με τη βοήθεια των δυνατοτήτων του φορμαλισμού του Peano, διότι πολύ απλά δεν έχει ιδέες για να αποδείξει το θεώρημα. Επιπλέον, το πρώτο θεώρημα μη-συνέπειας απορρίπτει εντελώς τις αυτοματοποιημένες αποδείξεις που πραγματοποιεί ο υπολογιστής, παρά το ότι οι αποδείξεις αυτές είναι σήμερα μια πραγματικότητα.

Αντιθέτως, τα μαθηματικά μπορεί να τυποποιηθούν, πράγμα που θέλει να πει ότι έχουν την δυνατότητα να γραφούν σε μια γλώσσα τυπική, αλλά μόνο σαν αρχή. Αυτό που δεν ήταν παρά ένας ευσεβής πόθος στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, έγινε πραγματικότητα: οι υπολογιστές σήμερα είναι ικανοί να επαληθεύσουν μαθηματικές αποδείξεις. Χρειάστηκε πολύ δουλειά από τους προγραμματιστές οι οποίοι έπρεπει να ερημνεύουν συντομεύσεις όπως «μπορούμε να δούμε ότι ..» ή

«αν φέρω την κάθετο …» και αυτό γιατί ο υπολογιστής δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένας κυβερνοκριτίνος που δεν βλέπει τίποτα, δεν αισθάνεται τίποτα και ο οποίος περνά την ώρα του ελέγχοντας το κλείσιμο των παρενθέσεων όπως άλλοι ξεριζώνουν φτερά από τις μύγες.

Η δραστηριότητα του υπολογιστή είναι πραγματικά φορμαλιστική, θυμηθείτε τα μηνύματα: «syntax error» ή « FATALE ERROR 0028 :C000BCED IN VXD VMM(01) + 0000ACED », απόλυτη ακρίβεια που αυτομάτως μας παραπέμπει στην γλώσσα του υπολογιστή.

Ο μαθηματικός φορμαλισμός είναι ένα είδος γλώσσας υπολογιστή: εκτελείται από ένα συνδυασμό των αξιωμάτων και κανόνων με μόνη διαφορά ότι, ενώ η γλώσσα του υπολογιστή είναι ντετερμινιστική, τρέχει με μια ορισμένη σειρά, στα μαθηματικά αυτό δεν ισχύει. Η αναλογία αυτή είναι πολύτιμη, αρκεί να θυμηθούμε ότι ο φορμαλισμός είναι μόνο μια πτυχή των μαθηματικών.

Ας γυρίσουμε λίγο στον φορμαλισμό, και ας αρχίσουμε από τις μηχανές, είναι πιο εύκολο. Πολύ συχνά ο υπολογιστής αρχιζει να λειτουργεί και υπολογίζει χωρίς να σταματά. Το ερώτημα είναι (είναι το βασικότερο ερώτημα των τυπικών γλωσσών), πρέπει να περιμένουμε ή να σταματήσουμε με Ctrl-C ? Το ερώτημα είναι τόσο παλαιό όσο η Ρώμη. Αν είστε στην Piazza Venezia και περιμένετε το λεοφορείο 64 χωρίς αυτό να εμφανίζεται, τι πρέπει να κάνετε, να περιμένετε ή να φύγετε? Στην πρώτη περίπτωση πρέπει να πιστέψετε ότι θα έρθει, ενώ στη δεύτερη έχετε την ευκαιρία να κάνετε ένα μικρό περίπατο μέχρι το σπίτι σας. Ερώτηση: μπορεί ο υπολογιστής να ανιχνεύσει μια επανάληψη και έτσι να έχει την δυνατότητα να κάνει Ctrl-C μόνος του?

Η απάντηση βρίσκετε στη κοινή λογική: όπως ακριβώς δεν υπάρχει καμμία υπηρεσία να σας πεί αν το λεωφορείο τελικά θα έλθει, έτσι δεν μπορεί να ελεχθεί ένας βρόχος επανάληψης. Ένας βρόχος είναι έλλειψη πληροφορίας στη καθαρότερη μορφή της. Τίποτα δεν είναι γνωστό αλλά θα μάθουμε σε 10 ώρες ,10 μέρες , 10 χρόνια κοκ.

Η απάντηση στο πρόβλημα τερματισμού αλγορίθμου είναι αρνητική. Αυτό δείχνει τη διαφορά ανάμεσα στο «δεν γνωρίζω» και στο «γνωρίζω πως όχι». Αυτή η ουσιαστική και ανεπαίσθητη διαφορά υποκρίπτεται στον κλασσικό τομέα της μαθηματικής θεμελείωσης. Θα τη βρούμε με διάφορες μορφές, ειδικότερα στην διάκριση μεταξύ υπολειποτητα/επεκτασιμότητα και το θεώρημα του Godel.

Το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor

Ας ξαναγυρίσουμε στο 1880. Είναι η στιγμή που ο Cantor ανακάλυψε τη Θεωρία Συνόλων βάζοντας στο προσκήνιο μια διαβολική μηχανή τα παράδοξα, που θα τα βρούμε σε όλες τις θεωρίες θεμελίων. Αυτό που ανακάλυψε ο Cantor είναι του ιδίου μεγέθους όπως αυτό της ύπαρξης αρρήτων αριθμών.

Πρόκειται για το παράδοξο της απαρίθμησης: μπορούμε να αριθμήσουμε την άπειρη λίστα των αρτίων αριθμών 0,2,4,6,…. Θα μπορούσαμε να φτιάξουμε μια λίστα όλων των προγραμμάτων μιας δεδομένης γλώσσσας προγραμματισμού, διατάσσοντας τα κατά σειρά μεγέθους ή αν είναι ίσα κατά αλφαβητική σειρά Το ερώτημα είναι: θα μπορούσαμε να σχηματίσουμε μια λίστα όλων των απείρων λιστών; Η απάντηση του Cantor είναι αρνητική και το επιχείρημα για την άρνηση αυτή είναι το διάσημο διαγώνιο επιχείρημα. Υποθέστε ότι έχουμε όλες τις άπειρες λίστες από 0 και 1 τοποθετημένες σε έναν πίνακα..

0	0	0	0	0	0	0	0	0	…
0	1	1	0	0	0	0	1	1	…
1	1	1	0	0	1	1	0	0	…
0	0	0	0	1	1	1	1	1	…
0	0	0	1	1	1	1	1	1	…
0	0	1	1	0	0	0	1	1	…
0	0	1	1	1	1	1	0	0	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	

Παίρνουμε τη διαγώνιο 0 1 1 0 1 0 1 …. και αλλάζουμε τα ψηφία έτσι ώστε αν το ψηφίο είναι 0 θέτουμε 1, αν είναι 1 θέτουμε 0. Έτσι το n-οστό στοιχείο της λίστας που βρίσκεται στην n-οστή γραμμή του πίνακα θα αλλάξει ψηφίο. Τότε θα σχηματισθεί η λίστα 1 0 0 1 0 1 0 … η οποία δεν ανήκει στον πίνακα αφού αν υποθεσουμε ότι βρισκόταν στην n-οστή σειρά το n-οστό ψηφίο της θα έχει αλλάξει.

1	0	0	0	0	0	0	0	0	…
0	0	1	0	0	0	0	1	1	…
1	1	0	0	0	1	1	0	0	…
0	0	0	1	1	1	1	1	1	…
0	0	0	1	0	1	1	1	1	…
0	0	1	1	0	1	0	1	1	…
0	0	1	1	1	1	0	0	0	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	

Η Επεκτασιμότητα

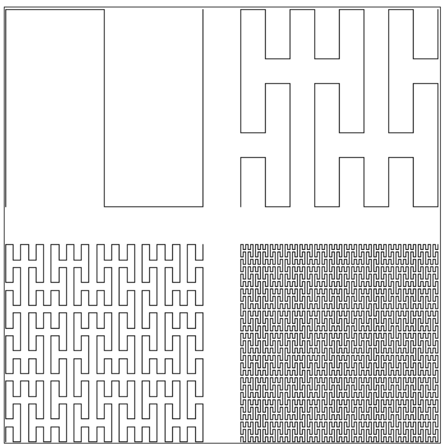
Η ερώτηση που γεννάται για τις τυπικές γλώσσες είναι η ακόλουθη: Μπορούμε να μελετήσουμε αρνητικές πληροφορίες; Με τον όρο αρνητική πληροφορία, εννοούμε απουσία πληροφορίας, για παράδειγμα κάτι που δεν έχει ακόμα ανακοινωθεί. Στη δεκαετία του 60, οι πληροφορικοί πίστευαν ότι αυτό είναι εφικτό και έφερναν για παράδειγμα αυτές τις περιπτώσεις που ερμηνεύονται από προκαθορισμένες επιλογές, σ' αυτές που η μηχανή δεν ανταποκρίνεται.

Αλλά το πρόβλημα της αρνητικής πληροφορίας είναι ακριβώς το παράδοξο του Cantor που μας λέει ακριβώς ότι είναι αδύνατο να μελετήσουμε αρνητικές πληροφορίες. Η λίστα των προγραμμάτων που σταματούν περιέχει ένα πρόγραμμα, κάτι σαν τη διαγώνιο λίστα, που δεν μπορεί να το σταματήσει ο αλγόρθμος επεξεργασίας.

Αυτό το είδος συμπεριφοράς των γλωσσών της πληροφορικής θα το ονομάσουμε **επεκτασιμότητα**, γιατί δέχονται μόνο θετικές πληροφορίες και μόνο με αυτές κάνει υπολογισμούς, αρνητικές πληροφορίες δεν λαμβάνονται υπ'όψιν. Όσο περισσότερες πληροφορίες δίνουμε τόσο περισσότερο ικανοποιημένες είναι (δίνοντάς μας απαντήσεις), όπως ακριβώς στην αναζήτηση αρχείων σε έναν υπολογιστή. Όσο περισσότερες πληροφορίες δώσουμε στη μηχανή αναζήτησης τόσο λεπτομερέστερες πληροφορίες παίρνουμε.

Το ίδιο συμβαίνει με την μαθηματική γλώσσα, συσσσωρεύει θεωρήματα και όσα περισσότερα έχει τόσο περισσότερα παράγει. Η μαθηματική γλώσσα είναι λοιπόν **επεκτατική**. Αντιθέτως, η ιατρική είναι **υπολειπόμενη**, πάρτε για παράδειγμα ένα φάρμακο: μια ιατρική αλήθεια είναι κάτι που ακόμα δεν έχει ανατραπεί. Αυτό συμβαίνει και με την φυσική. Η πληροφορία είναι αυτού του είδους, είναι αληθής μέχρι να ανατραπεί, η ιατρική και η φυσική μελετά αρνητικές πληροφορίες.

Τα παράδοξα



Όπως έχουμε ήδη πεί, υπάρχουν πολλά είδη παραδόξων. Τα πιο ουσιαστικά είναι αυτά που αντιτίθενται στην διαίσθηση, τα οποία αντιτίθενται σε οποιαδήποτε προσπάθεια αναγωγής. Η καμπύλες χωρίς εφαπτομένη ή η καμπύλη Peano η οποία διέρχεται από όλα τα σημεία ενός τετραγώνου έτσι ώστε να θέτει σε αμφιβολία τη διαφορά αναμεσα στη γραμμή και στο επίπεδο, είναι αυθεντικά παράδοξα κόντρα στη διαίσθηση.

Αλλά υπάρχουν και παράδοξα του φορμαλισμού, ίσως λιγότερο ουσιαστικά αλλά περισσότερο θεαματικά, θα λέγαμε. Το παράδοξο του Russsell (1905) είναι μια αντίφαση μέσα στην απλοική θεωρία συνόλων (η θεωρία αναθεωρήθηκε από τους

Zermelo-Frankel και έγινε η γνωστή θεωρία ZF). Το παράδοξο αυτό λέει ότι αν θεωρήσουμε το σύνολο $X = \{x/x \notin x\}$, ισχύει ότι αν $X \in X$ τότε $X \notin X$: αντίφαση. Έτσι η αντίφαση $P \wedge \neg P \Longrightarrow Q$, οποιαδήποτε πρόταση Q. Η άνοιξη του φορμαλισμού διακόπηκε.

Ο Hilbert το 1900 πρότεινε να αποδειχθεί η συνέπεια (δηλαδή η μη-αντιφατικότητα) της αριθμητικής του Peano. Κοντά στο 1920, επανέρχεται πάλυ με ένα πρόγραμμα πιο εκλεπτυσμένο για το οποίο θα μιλήσουμε. Πρόκειται για μια αναγωγή των παραδόξων σε φορμαλιστικά παράδοξα, παραμελόντας αυτά που απευθύνονται στη διαίσθηση. Είναι αλήθεια ότι την εποχή αυτή τα φορμαλιστικά παράδοξα είναι πιο σημαντικά από τα παράδοξα της διαίσθησης, αλλά δυστυχώς τα παράδοξα της διαίσθησης επιμένουν. Είναι σαν κάποιος να διαξάγει ένα πόλεμο εφοδιάζοντας τη πρώτη γράμμη και αγνοώντας την τελευταία.

Η υπολειψιμότητα

Αστεία ιδέα να αποδειχθεί η συνέπεια των μαθηματικών από μεθόδους των ίδιων των μαθηματικών. Είναι σαν ένα κοινοβούλειο να ψηφίζει το ίδιο την αθοώτητά του. Ο Hilbert δεν έπεσε απόλυτα σ' αυτή τη παγίδα. Δεν είχε πλήρως το δικαίωμα να χρησιμοποιήσει όλες τις διαθέσιμες μεθόδους, παρά μόνο ένα μικρό πυρήνα εξ αυτών: τις πεπερασμένες (finitistes) μεθόδους (στην φιλοσοφία των μαθηματικών ο finitism είναι μια ακραία περίπτωση του κονστρουκτιβισμού, σύμφωνα με τον όποίο ένα μαθηματικό αντικείμενο δεν υπάρχει αν αυτό δεν μπορεί να κατασκευασθεί από τους φυσικούς αριθμούς σε ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων.)[1] Δεν είναι το Κοινοβούλιο που θα μπορούσε να αποφασίσει για την

[1] (Σμ. Μετ.) Είναι καλό να αναφέρουμε στο σημείο αυτό μια άλλη ενδιαφέρουσα αφετηρία του εγχειρήματος του Hilbert. Την ονομαζόμενη «καθαρότητα». Η καθαρότητα αυτή δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια πρακτική των μαθηματικών. Πάρτε για παράδειγμα το θεώρημα των πρώτων αριθμών « Αν π(x) είναι ο αριθμός των πρώτων αριθμών μικροτέρων του x (x θετικός πραγματικός) το θεώρημα των πρώτων αριθμών λέει ότι $\lim_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\ln(x)}{x} = 1$ ». Η απόδειξη του Hadamard και De La Valee-Poussin (1896) βασίζεται πάνω στη θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων, μια θεωρία ανεξάρτητη από την θεωρία αριθμών. Αργότερα το 1949 οι Erdos και Selberg έδωσαν μια απόδειξη του θεωρήματος χρησιμοποιώντας στοιχειώδη μαθηματικά ικανοποιώντας μια αισθητική αρχή για τα μαθηματικά την αρχή της «καθαρότητας». Η αρχή αυτή θέλει να μην χρησιμοποιούμε ξένες έννοιες στην προς απόδειξη πρόταση. Το πρόγραμμα του Hilbert βασίζεται στην αρχή αυτή. Θα πρέπει εδώ να σκεφτούμε την «πολυπλοκότητα του μαθηματικού αντικειμένου» όπως την οραματήσθηκε ο Poincare και φυσικά την πολυσημία της απόδειξης του θεωρήματος του Fermat από τον Willes.

αθοώτητά του αλλά ένα club «σοφών». Το club αυτό των σοφών είναι ουσιαστικά οι υπολοιπόμενες ιδιότητες.

Για να επιτευχθεί ο στόχος αυτός πρέπει να περιορισθούμε μόνο στις υπολοιπόμενες ιδιότητες. Οι ιδιότητες αυτές είναι αυτές που επαληθεύονται κατά περίπτωση, όπως το θεώρημα του Fermat:

$$\forall \alpha,\beta,\gamma,\ \alpha\beta\gamma\neq 0 \Longrightarrow \alpha^3+\beta^3\neq\gamma^3$$

για παράδειγμα: ο Hilbert προτείνει να αποδείξουμε την πρόταση

« ένα θεώρημα έχει πάντα (*υπολειπόμενη ιδιότητα*) ένα άρτιο αριθμό συμβόλων» αποδεικνύοντας ότι: «αν P είναι αποδείξιμο έχει άρτιο αριθμό συμβόλων και η άρνησή του έχει περιττό αριθμό συμβόλων και δεν είναι αποδείξιμη».

Αλλα όμως αυτό είναι εντελώς αφελές.

O Popper

O Popper είναι ένας νέο-θετικιστής φιλόσοφος (*Ο **Θετικισμός** είναι ένα επιστημονικό φιλοσοφικό δόγμα το οποίο υποστηρίζει πως μία πρόταση ή ένας φυσικός νόμος είναι αληθής μόνο όταν είναι λογικά επαληθεύσιμος.*) ξαναπήρε τη θεωρία του Hilbert. Σύμφωνα με αυτόν, μια επιστημονική αλήθεια δεν έχει αξία παρά μόνο αν υπάρχει ένα εκ των προτέρων πρωτόκολλο επαλήθευσης ικανό να επαληθεύση με κάποια σχετική ακρίβεια ένα φυσικό νόμο. Αυτή η προσέγγιση ωφελεί τις δραστηριότητες όπως της ιατρικής, και η φράση «μέχρι εδώ καλά» είναι η επιτομή της επιστημονικότητας σύμφωνα με τον Popper. Φαίνεται λοιπόν ότι ο καλός οδηγός είναι αυτός που ξέρει τον κώδικα κυκλοφορίας και όχι αυτός που δεν είχε ποτέ ατύχημα!

Στα μαθηματικά, επαλήθευση με ακρίβεια 1/N είναι επαλήθευση έως τον ακέραιο N, μη-αντίφαση για κάθε ακέραιο < N. Βλέπουμε ότι ο Popper δίνει ένα νόημα μόνο στις υπολειπόμενες προτάσεις, όπως ο Hilbert. Στην πραγματικότητα, η φορμαλιστική συνέπεια είναι μια υπολειπόμενη ιδιότητα που σύμφωνα με τον Popper μπορεί να συνοψισθεί σε μια φράση «μέχρι στιγμής δεν έχουμε αντίφαση». Η φορμαλιστική συνέπεια θα έχει ένα πρωτόκολο με το οποίο αν ανακάλυπτε μια αντίφαση αυτή θα ήταν όπως το παράδοξο του Russell , το άσπρο γραμμένο πάνω σε μαύρο. Το ότι η συνέπεια είναι ένα υπολειπόμενο δεν πρέπει να μας εκπλήσσει ιδαίτερα: Ο Hilbert άλλωστε δεν αρνήθηκε ποτέ μια τέτοια σημασία.

Η σχέση μεταξύ επεκτασιμότητας και υπολειψιμότητας είναι απλή: μια ιδιότητα είναι επεκτάσιμη αν η άρνησή της είναι υπολειπόμενη. Παράδειγμα το να είναι μια πρόταση «αποδείξιμη» (= το λεοφωρείο έφτασε) είναι μια επεκτάσιμη ιδιότητα, το να είναι «μη αποδείξιμη» (=το λεοφωρείο δεν θα έρθει) είναι υπολειπόμενη ιδιότητα.

Μια υπολειπόμενη ιδιότητα είναι μια μορφή γνώσης, ενώ μια επεκτάσιμη ιδιότητα είναι αποτέλεσμα αναγωγής.

Το Θεώρημα Godel

Ο φορμαλισμός είναι από μόνος του ένα μαθηματικό αντικείμενο, σημείωνε από το 1904 ο Hilbert [2]. Αυτό προέρχεται από την αδυσώπητη ακρίβεια των τυπικών γλωσσών. Επιπλέον αυτή η παρατήρηση είναι ένα ουσιαστικό κομμάτι του προγράμματος του Hilbert, ο οποίος θέλησε να χρησιμοποιήσει μαθηματικά για να επιτύχει τον στόχο του.

Παραδόξως έπρεπε να έρθει ο Godel το 1931 για να ληφθεί σοβαρά η παρατήρηση αυτή:

- Τα αντικείμενα του φορμαλισμού της ΑΡ, οι όροι, οι προτάσεις, αναπαριστάνονται με τους αριθμούς Godel : πρόκειται για τη «σύνηθη» απαρίθμιση των προτάσεων, στην οποία ορισμένοι ήθελαν να δούν κρυφά νοήματα σχεδόν αριθμολιγικά. Τελικά δεν είναι τόσο κοινότυπη η αρίθμιση αυτή αν σκεφτούμε τις τεχνικές δυσκολίες που συνάντησε ο Godel εκείνη την εποχή.

- Οι ιδιότητες του φορμαλισμού εκπροσωπούνται από τις προτάσεις της αριθμητικής του Peano (ΑΡ), έτσι η «Ρ είναι αποδείξιμη», γίνεται Thm_{AP}['P'] και «ΑΡ είναι συνεπής» γίνεται Coh AP. Οι προτάσεις αυτές δεν έχουν καμμία ευθεία σχέση με τη θεωρία αριθμών (Μια θεωρία είναι συνεπής – coherente- όταν καμμία αντίφαση δεν μπορεί να αποδειχθεί από τα αξιώματά της, στις μη-συνεπείς θεωρίες όλα μπορεί να αποδειχθούν και έτσι μια τέτοια θεωρία είναι κενή νοήματος) .

Ανακυκλώνοντας το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor μπορεί να παραχθεί μια πρόταση G = $\neg$ Thm_{AP}['G'] καθώς και η μη αποδειξιμότητά της. Οδηγούμαστε έτσι σε

[2] (Σμ. Μετ.) Κανένας δεν εναντιώθηκε περισσότερο στον φορμαλισμό όσο η εποπτική (intuitionism) θεωρία του Brouwer. Αν ο Hilbert έδωσε προτεραιότητα στην μηχανιστική πλευρά των μαθηματικών, ο Brouwer επιμένει στην υποκειμενικότητα του μαθηματικού. Ο Hilbert είναι πλατωνιστής (υπάρχει μια πραγματικότητα έξω από τον μαθηματικό) αντίθετα ο Brouwer είναι σοφιστής (δεν υπάρχει πραγματικότητα έξω από τον ίδιο τον μαθηματικό).

μια νέα διατύπωση του παρδόξου του ψευδόμενου και σε μια αντιφατικότητα της ΑΡ;

Όχι : τίποτα δεν μας λέει ότι η αλήθεια και η αποδειξιμότητα ταυτίζονται, και έτσι η πρόταση «δεν είναι αποδείξιμη» δεν θέλει να πεί ότι «δεν είναι αληθής». Κοιτάζοντας προσεκτικά, υπάρχει μια μόνο δυνατότητα διαφυγής, για να διατηρήσουμε την συνέπεια της ΑΡ: να υποθέσουμε ότι η G είναι αληθής και ταυτόχρονα όχι αποδέιξιμη. Αυτό είναι το πρώτο θεώρημα της μη-συνέπειας του Godel το οποίο λέει ότι όλες οι συνεπείς θεωρείες, που έχουν έναν πεπερασμένο αριθμό αξιωμάτων σε μια γλώσσα που περιέχει την αριθμητική και μέσα στην οποία μπορούμε να αποδείξουμε κάποιες προτάσεις της αριθμητικής, περιέχουν προτάσεις μη-αποδείξιμες, δηλαδή προτάσεις που δεν μπορούμε ούτε να τις αποδείξουμε ούτε να τις απορρίψουμε.

Ξεκινώντας από την τυποποίηση του πρώτου θεωρήματος οδηγούμαστε στο δεύτερο θεώρημα: Μπορούμε να θεωρήσουμε την πρόταση Coh AP που εξηγεί την συνέπεια της ΑΡ σαν πρόταση αληθή αλλά μη αποδείξιμη: «Αν ΑΡ είναι συνεπείς, δεν μπορεί να αποδείξει την συνέπειά της».

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η G όπως και η Coh AP είναι υπολειπόμενες, αλλά όχι αποδείξιμες. Αντίθετα, η απόδειξη της G και της Coh AP είναι επεκτατικές. Οι G και η Coh AP δεν είναι ισοδύναμες με την αποδειξιμότητά τους: η διαφορά μεταξύ υπολειπόμενου και επεκτάσιμου είναι διαφορά μεταξύ του «να μη γνωρίζω» και «να γνωρίζω πως όχι» ανάμεσα στο «δεν μπορώ να αποδείξω» και στο «αποδεικνυω ότι δεν ισχύει». Είναι ακόμα το ζήτημα του τερματισμού της λειτουργίας, συνοπτικά:

Αρνήσεις και Αρνητές

Ένα τέτοιο αποτέλεσμα δεν σας δώσει πολλούς φίλους… Οι αντιδράσεις στα θεωρήματα του Godel ήταν ζωηρότατες και σχεδόν όλες αρνητικές.

Ας αρχίσουμε με αυτές που συχνά δημιουργούν ανασκευές του θεωρήματος. Όλες είναι συμβατές με κάποια συγκεκριμμένη άποψη της θεωρίας του Popper, σύμφωνα με την οποία τα πάντα είναι λάθος άρα πρέπει απλά να περιμένουμε… Μια διάψευση του θεωρήματος του G είσάγει μια αντίφαση στην θεωρία ΑΡ, το θεώρημα δεν λέει ότι η ΑΡ γίνεται αντιφατική αλλά ότι «αν η ΑΡ είναι συνεπής» τότε μπορούμε να εξάγουμε οτιδήποτε. Οι οπαδοί της θεωρίας αυτής προσπάθησαν να κατεδαφίσουν όλες τις επιτηδεύσεις των μαθηματικών.

Τελικά το θεώρημα του Godel είναι ακαταπόντιστο. Δεν υπάρχει καμμία διαδικασία να το θέσει εκτός. Παρατηρώντας το σκεπτικό της θεωρίας του Popper θα

καταλήγαμε μάλλον ότι είναι θεωρία που χάνει σε πλούτο εξυπνάδας παρά το θεώρημα το ίδιο.

Μετά τους κλόουν ήρθαν οι νοσταλγοί της τελικής λύσης για το πρόβλημα της συνέπειας – παίρνοντας υπ'όψιν τον επιστημονισμό της γερμανίας. Οι περισσότερο ιδιότροποι χαιρέτησαν τον Godel σαν το μεγαλύτερο Λογικό φιλόσοφο όλων των εποχών, ανεβάζοντας τους αρθμούς του Godel στην πιο ακραία τους μορφή. Ο ενταφιασμός αυτός κάτω από λουλούδια είναι χαρακτηριστικός αυτού του κινήματος της χυδαιότητας « Gödel-Escher-Bach ». Το άμεσο μήνυμα είναι καθαρό, το θεώρημα του Godel είναι ένα τελείως τεχνικό, κόντρα στη φύση, που δεν μπορεί να φθείρει τα αναγνωρισμένα βήματα των θετικών επιστημών.

Ωστόσο το θεώρημα αυτό είναι ένα απλό θεώρημα. Λέει ότι καμμία ομάδα δεν μπορεί να υπερασπισθεί την συνέπεια του από μια υποεπιτροπή ορισμένη από αυτήν την ίδια: χρειάζεται να ορισθούν αναξάρτητα μέλη, αλλα αυτό δεν είναι η απλή λογική;

Προφανώς δεν είναι πάντα που η κοινή λογική μπορεί να εκφρασθεί τόσο ριζικά. Ήταν ο ιερός πόλεμος που ξεκίνησε ο Hilbert αναζητώντας μια τυπική (φορμαλιστική) λύση στο πρόβλημα της συνέπειας.

Η μετα-Godel εποχή

Αυτό το σημείο του φορμαλισμού που σχολιάστηκε περισσότερο ήταν η ανάδειξη της συνέπειας στον κεντρικό ρόλο. Όπως σημείωσε ο καθηγητής της Λογικής Kreisel, ο οποίος εργάσθηκε σκληρά εναντίων των καταχρήσεων του φορμαλισμού, «οι αμφιβολίες σχετικά με τη συνέπεια είναι περισσότερο αμφίβολες από το ίδιο το πρόβλημα της συνέπειας».

Η συνέπεια, παρά τις προσπάθειες, παραμένει ένα υποκείμενο καθαρά ιδεολογικό: όπως έλεγε ο K. Schütte « γνωρίζω ότι μια απόδειξη της συνέπειας της ZF δεν έχει καμμία αξία, αλλά το βρίσκω εξ ίσου καθησυγαστικό να έχω μία». Καθησυγαστικό από πιο κίνδυνο και ποιες μεθόδους;

Αυτό όμως που είναι περισσότερο εντυπωσιακό, δεν είναι η ανάγκη πίστης των επιγόνων του Hilbert στο φορμαλισμό, αλλά η παράδοξη επιτυχία κάποιων εργασιών, όπως αυτή του Gentzen στη δεκετία το '30. Σχεδιασμένες να ανακαινίσουν το πρόγραμμα του Hilbert, δεν ανακαίνησαν τελικά τίποτα, αλλά οδήγησαν, πολύ αργότερα στη δεκαετία του '70 μια αναβίωση της προβληματικής πάνω στα θεμέλια.

Πως μπορούμε να ξαναδιαβάσουμε τον Gentzen στις μέρες μας; Το έργο του περιλαμβάνει τη μελέτη αλληλεπίδρασης μεταξύ μιας απόδειξης μιας πρότασης P και μιας απόδειξης (σε περίπτωση αντίφασης) ή μεταφραζόμενο στη γλώσσα της πληροφορικής σαν η μελέτη αλληλεπίδρασης μεταξύ ενός προγράμματος (που αντιστοιχεί στην απόδειξη της P) και του περιβάλλοντος (που αντιστοιχεί στην απόδειξη) ή ακόμα η αλλελιπίδραση μεταξύ ενός σημείου του πεδίου ορισμού και της ίδιας της συνάρτησης. Αυτό που σήμερα ονομάζουμε παράδειγμα Curry-Howard (1970)[3]. Οι ιδέες αυτές τελειοποιήθηκαν (~ 1985) με τη γραμμική λογική που εισήγαγε για το σκοπό αυτό μια συμμετρία ανάμεσα στο πρόγραμμα και στο περιβάλλον του. Η καινοτομία σε σύγκριση με την παλιά λογική (αυτή που σήμερα ονομάζουμε Κλασσική λογική), συνίσταται στο ότι πρόκειται για μια άποψη τελείως διαδικαστική (η γραμμική λογική άλλωστε παραπέμπει σε δικές της διαδικασίες) και όχι πια σε πραγματιστισμούς (Πραγματισμός = σύστημα που θεωρεί σαν πραγματικά όντα τις αφηρημένες ιδέες). Η κλασσική λογική αναφέρεται πάντα σε μια εξωτερική «πραγματικότητα».

■

Δες

http://www.canal-u.tv/themes/sciences_fondamentales/mathematiques/generalites/les_fondements_des_mathematiques

[3] Η αρχή Curry-Howard ή όπως αλλοιώς λέγεται «ισομορφισμός Curry-Howard» λέει ότι μια απόδειξη ταυτίζεται ουσιαστικά με ένα πρόγραμμα. Μάλιστα, δίνει το μέσο να τρέξουμε το πρόγραμμα αυτό εκτελόντας ένα είδος «απαλοιφής τομών», που δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένα λεξικό στο οποίο κάθε λέξη της θεωρίας αποδείξεων αντιστοιχεί σε έναν όρο προγραμματισμού.