Διαγωνισμός ΘΑΛΗΣ, ΕΜΕ 19-11-201
Θεματα-Λύσεις Α ΛΥΚΕΙΟΥ

Λυγάτσικας Ζήνων *

Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Βαρβακείου Σχολής

22 Νοεμβρίου 2011

1. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x-10)(x^2-7x+10) & = & 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{2x-1}{5} & < & \dfrac{x(x+1)}{2} \end{array}\right.$$

Λύση 1 *Λύνω την πρώτη εξίσωση:*

$$(x-10)(x^2-7x+10)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x-10=0 & \Leftrightarrow & x=10 \\ x^2-7x+10=0 & \Leftrightarrow & x=2,\ 5 \end{array}\right. \qquad (1)$$

Επίσης,

$$\frac{x^2+1}{2}+\frac{2x-1}{5}<\frac{x(x+1)}{2} \Leftrightarrow 5x^2+5+4x-2<5x^2+5x \Leftrightarrow x>3 \quad (2)$$

Άρα, απο 1 και 2 έχω: $x=7$ *ή* $x=10$.

Παρατηρήσεις: *Πρώτα-πρώτα το σύστημα δεν έχει πραγματικές λύσεις διαφορετικές των ακεραίων! Όλες ίδιες είναι είτε ζητήσεις τις θετικές ακέραιες είτε τις ρητές είτε τις πραγματικές το ίδιο πράγμα ... Ο συνδυασμός εξίσωσης και ανίσωσης έπρεπε να είχε διδαχθεί στο Γυμνάσιο, στη Α Λυκείου την περίοδο αυτή υπάρχουν τμήματα που μόλις έχουν τελειώσει τις Πιθανότητες! Μια άλλη παρατήρηση, των παιδιών που ετοιμάζω στο σχολείο μου είναι, γιατί μια απλή επαλήθευση λύσεων μπορεί να θεωρηθεί μαθηματική δεξιότητα; Η απάντηση είναι όχι: αν κερδίσεις μια παρτίδα δεν είσαι σκακιστής! δες Poincaré: La Science et l' Hypothèse, κεφ. 1 παρ.* I.

Αν η άσκηση χωρισθεί σε βήματα τότε η διαδικασία επίλυσης είναι προφανής, για παράδειγμα:

(α') Να λυθεί η εξίσωση: $(x-10)(x^2-7x+10)=0$.

*LaTeX c:\...\Concours_maths\ EME \ Thalis\ Thalis_Zenon\ 2011\Solution_Thalis_2011.tex

(β') *Ποιές απο τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης επαληθεύουν την ανίσωση:*
$$\frac{x^2+1}{2}+\frac{2x-1}{5}<\frac{x(x+1)}{2}$$

Αν την ¨καθαρίσουμε¨ λίγο, να τι μένει...

Ποιές λύσεις της εξίσωσης $(x-10)(x^2-7x+10)=0$ *είναι μεγαλύτερες του 3;*

Με το Mathematica σχεδόν τίποτα ...

$$\begin{aligned} In[1] &:= Reduce[(x-10)*(x^2-7*x+10)==0 \\ &\quad \&\&(x^2+1)/2+(2*x-1)/5<x*(x+1)/2,\{x\}] \\ Out[1] &:= x=5 \,||\, x=10 \end{aligned}$$

Πρόβλημα: Πως η άσκηση αυτή μπορεί να γίνει μαθηματική ερώτηση;

■

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση:
$$A(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}-\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)}$$

Λύση 2 *Μόνο πράξεις, (αν τις δεις), τα ονομαζόμενα heuristic mathematics...*

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} \\ &= \frac{1+x^4+1+3x+3x^2+x^3+x(1+3x+3x^2+x^3)}{1+x^2+1+2x+x^2} \\ &= \frac{2x^4+4x^3+6x^2+4x+2}{2(1+x+x^2)} \\ &= \frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{1+x+x^2} \\ &= \frac{(x^4+2x^3+x^2)+(2x^2+2x+1)}{1+x+x^2} \\ &= \frac{(x^2+x)^2+2\cdot 1\cdot(x^2+x)+1}{1+x+x^2} \\ &= \frac{((x^2+x)+1)^2}{1+x+x^2} \\ &= \frac{(x^2+x+1)^2}{1+x+x^2} \\ &= x^2+x+1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)} \\
&= \frac{3+3x^3+3x^2+3x}{3(x^2+1)} \\
&= \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1} \\
&= \frac{x^2(x+1)+(x+1)}{x^2+1} \\
&= \frac{(x^2+1)(x+1)}{x^2+1} \\
&= x+1
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$A(x) = B(x) - \Gamma(x) = x^2 + x + 1 - (x+1) = x^2$$

■

3. (α') Αν k ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{kx}{2} + \frac{x}{4} = k(x+2) - \frac{3(kx-1)}{4}$$

(β') Για ποιές τιμές του ακεραίου k η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

Λύση 3 *(α') Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την:*

$$
\begin{aligned}
\frac{kx}{2} + \frac{x}{4} = k(x+2) - \frac{3(kx-1)}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad 2kx + x = 4k(x+2) - 3(kx-1) \\
&\Leftrightarrow \quad kx + x = 8k + 3 \\
&\Leftrightarrow \quad (k+1)x = 8k + 3
\end{aligned} \tag{3}
$$

Έτσι:

i. Αν $k = -1$ τότε η εξίσωση 3 γίνεται $0 \cdot x = -5$, άρα αδύνατη.

ii. Αν $k \neq -1$ τότε $x = \dfrac{8k+3}{k+1}$.

(β') Για να είναι η x ακέραια, πρέπει το κλάσμα $\dfrac{8k+3}{k+1}$ να είναι ακέραιος. Ή ισοδύναμα το $k+1$ να διαιρεί το $8k+3$, το οποίο μπορεί να γραφεί για την περίσταση $8(k+1)-5$ (γνωστό trick στη στοιχειώδη θεωρία αριθμών). Άρα, $\dfrac{8k+3}{k+1} = \dfrac{8(k+1)-5}{k+1} = 8 - \dfrac{5}{k+1}$. Οι ακέραιες τιμές του k που

μπορεί να κάνουν την $k+1$ να διαιρεί το 5 είναι: $k+1 = \pm 1, \pm 5$. Άρα, $k = -2, 0, -6, 4$, όλες αποδεκτές αφού $k \neq -1$.

Παρατηρήσεις: *Για εμάς η άσκηση είναι η εξής:*

Για ποιές τιμές του k το κλάσμα $\dfrac{8k+3}{k+1}$ είναι ακέραιος;

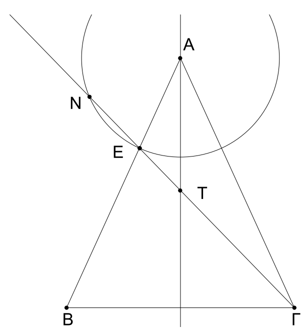
Η πρώτη εξίσωση της άσκησης είναι εντελώς περιττή, και μάλιστα οι παρανομαστές. Ένας μαθητής της Α Λυκείου με πολύ καλό επίπεδο (των μαθηματικών του σχολείου) δεν γνωρίζει το trick της θεωρίας αριθμών. Αν υποθέσουμε ότι το γνωρίζει η άσκηση γιάυτόν δεν έχει ενδιαφέρον! Πάλι, τι εξετάζουμε;

■

4. Δίδεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Κύκλος με κέντρο τη κορυφή Α και ακτίνα $\rho < AB$ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Δ, αντίστοιχα. Οι ευθείες ΒΔ και ΓΕ τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία Κ, Ν αντίστοιχα. Αν Τ είναι το σημείο τομής των ΒΔ, ΓΕ και Σ το σημείο τομής των ΔΝ, ΕΚ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Σ και Τ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Απόδειξη 1 *Ιδέες, παρα πολλές. Η ΕΜΕ προτείνει να δείξουμε ότι το T ανήκει στην μεσοκάθετο του ΒΓ και στη συνέχεια ότι το Σ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας Α, η οποία συμπίπτει με την μεσοκάθετο του ΒΓ αφού το ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Σημειώστε ότι θα χρειασθεί και το αξίωμα παραλληλίας αφού χρειάζεται και το άθροισμα των γωνιών τριγώνου.*

Η πιο απλή απόδειξη, που τελειώνει το σίριαλ με τα ίσα τρίγωνα είναι, είναι με συμμετρία. Το μισό σχήμα είναι συμμετρικό του άλλου μισού ως προς τη μεσοκάθετο του ΒΓ, δες Σχήμα 1. Οπότε όλες οι προτεινόμενες τομές ευθειών που σχηματίζονται απο σημείο με το συμμετρικό του, είναι πάνω στον άξονα συμμετρίας. Σας ικανοποιεί η απόδειξη;



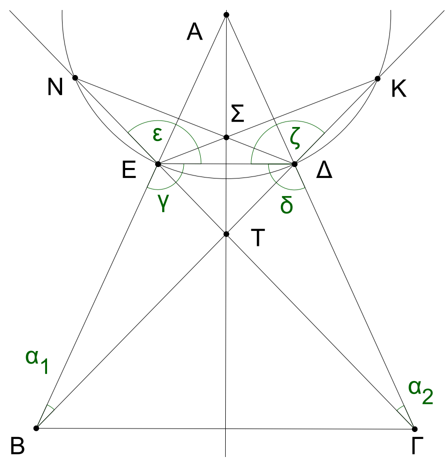
Σχήμα 1: Συμμετρία ως προς ΓΝ.

Πάμε σε άλλες αποδείξεις.

(α΄) *Να δείξουμε ότι τα ΣΑ και ΤΑ είναι παράλληλα σαν κάθετα στην ΚΝ.*

(β΄) *Να δείξουμε ότι ΤΓ=ΤΒ και ΣΓ=ΣΒ.*

(γ΄) *ότι άλλο μπορεί να φαντασθεί κανείς ανάμεσα απο 14 ζεύγη ίσων ευθ. τμημάτων, 7 σχηματιζόμενους κύκλους, 22 ζεύγη ομοίων τριγώνων, 31 ζεύγη ίσων τριγώνων και 27 ίσους λόγους ευθ. τμημάτων.*



Σχήμα 2: Άσκηση 4

Ας δώσουμε και εμείς μια απόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι $B\Delta$ και ΓE δεν είναι ύψη του τριγώνου, περίπτωση που καθιστά το συμπέρασμα προφανές.

(α΄) *Θα δείξουμε ότι: Τ ανήκει στη μεσοκάθετο του $E\Delta$. Πράγματι:* *Επειδή $\triangle AB\Delta = \triangle AE\Gamma$, τότε $\widehat{\alpha_1} = \widehat{\alpha_2} \to \widehat{TB\Gamma} = \widehat{T\Gamma B}$. Συνεπώς, $TB = T\Gamma \to TE = T\Delta$. Άρα, T σημείο της μεσοκαθέτου του $E\Delta$.*

(β΄) *Θα δείξουμε ότι Σ ανήκει στη μεσοκάθετο του $E\Delta$. Πράγματι:* *Επειδή $\widehat{\epsilon} = \widehat{\alpha_1} + \widehat{\gamma} = \widehat{\alpha_2} + \widehat{\delta} = \widehat{\zeta}$ και $\widehat{EN\Delta} = \widehat{EK\Delta}$ τότε $\triangle NE\Delta = \triangle KE\Delta \to \Sigma E = \Sigma\Delta$. Άρα, Σ σημείο της μεσοκαθέτου του $E\Delta$.*

(γ΄) *Εύκολα, A σημείο της μεσοκαθέτου του $E\Delta$.*

Συνεπώς, A, Σ, T συνευθειακά, αφου η μεσοκάθετος του $E\Delta$ είναι μοναδική.

Παρατηρήσεις: *Η πλήρης ρήξη με τα προηγούμενα! Ανατροπή των απαιτήσεων! Αρμόζει στο όλο σκηνικό; Φοβάμαι πως όχι. Χωρίς υπερβολή, πέρασα κάμποσα λεπτά να επιλέξω το σωστό μονοπάτι μεταξύ του φαύλου κύκλου των ίσων τριγώνων.* ■