Αυτόματες αποδείξεις με συστήματα Συμβολικού Υπολογισμού και Δυναμικής Γεωμετρίας

Λυγάτσικας Ζήνων
PhD in Pure Mathematics, France
e-mail: zenon7@otenet.gr
Ενιαίο Πειραματικό Λύκειο Βαρβακείου Σχολής
Παπαδιαμάντη και Μουσών
Π. Ψυχικό
τηλ. εργασιάς : 210 67 25 413

ΠΕΡΙΛΗΨΗ: Στο άρθρο αυτό θα δούμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιούμε τα Συστήματα Δυναμικής Γεωμετρίας και Συμβολικού Υπολογισμού για να χειριστούμε την αποδεικτική διαδικασία. Ένα μέρος της γεωμετρίας μπορεί σήμερα να αυτοματοποιήσει τις αποδείξεις του χρησιμοποιώντας ουσιαστικά μόνο τα Συστήματα Συμβολικού Υπολογισμού. Αν και οι περισσότεροι αλγόριθμοί τους είναι δύσκολοι, η χρησιμοποίησή τους στη δασκαλία και στην οργάνωση του μαθήματος είναι δυνατή. Η υλοποίηση όμως της συνλειτουργίας συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας και συμβολικού υπολογισμού σκοντάφτει σε αλγοριθμικά προβλήματα, τα οποία δεν είναι εν τούτοις δυσεπίλυτα. Απομένει βέβαια να θεμελιωθεί αυτή η συνεργασία. Και κάτι ακόμα: ο τομέας του σχεδιασμού της ύλης των μαθηματικών ο οποίος είναι τελικά υπεύθυνος για την επιτυχία ή όχι της εισαγωγής των νέων μαθηματικών και των υπολογιστών στη διδασκαλία πρέπει να ερευνηθεί και να ταξινομηθεί.

1. Εισαγωγή

Τα Συστήματα Δυναμικής Γεωμετρίας (ΣΔΓ) είναι συστήματα που δημιουργήθηκαν στην δεκαετία του '80 με αρχικό στόχο να αντικαταστήσουν την χρήση κανόνα και διαβήτη στις κατασκευές . Από τα ΣΔΓ (50 περίπου τον αριθμό) που υπάρχουν σήμερα, μόνο πέντε έχουν να κάνουν με αποδείξεις: το Cinderella, το Geometrix, το Geometry Explorer, το GeoView και το Gexp.

Τα συστήματα συμβολικού υπολογισμού (ΣΣΥ) εμφανίζονται ουσιαστικά στη δεκαετία του '50. Στη δεκαετία του '60 προγραμματίζονται με αλγορίθμους κυρίως ολοκλήρωσης και επίλυσης συστημάτων εξισώσεων. Από το 1980 αρχίζει ουσιαστικά η συστηματική επεξεργασία αλγεβρικών δομών και αλγορίθμων και δημιουργούνται τα περισσότερα συστήματα όπως το Reduce, Axiom, Mathematica, Maple, CoCoA, κλπ.

Με την ανοδική εξέλιξη των συγχρόνων υπολογιστών και των συμβολικών αλγεβρικών υπολογισμών, τα ΣΣΥ απέκτησαν μια δυναμική. Στη δεκαετία του '80 εμφανίζεται ο «*Chinese Prover*», με τις εργασίες του Wu[1], ένας από τους σημαντικότερους αλγορίθμους για την γεωμετρία. Ο αλγόριθμος αυτός μαζί με πέντε άλλους ενσωματώθηκε στο λογισμικό GExp. Ο αλγόριθμος του Wu καθώς και ο αλγόριθμος του Buchberger, εξαρτώνται άμεσα από συτήματα συντεταγμένων. Υπάρχουν όμως, στο GExp, και άλλοι ανεξάρτητοι αλγόριθμοι.

[1] Wen-tsün Wu, *Mechanical Theorem Proving in Geometries*, Texts and Monographs in Symbolic Computaton, Springer-Verlag, Wien, New York, 1994.

Πολλοί μαθηματικοί προσπάθησαν και προσπαθούν να πετύχουν ένα είδος συνεργασίας των ΣΔΓ και ΣΣΥ. Πιστεύουμε ότι αυτό είναι ένα φιλόδοξο πρόγραμμα και είναι ακόμα νώρις για να έχουμε αποτελέσματα. Στη συνέχεια θα δούμε ένα παράδειγμα στο οποίο μια μεγάλη κατηγορία ΣΔΓ δίνει λάθος αποτελέσματα. Μέχρι στιγμής το μοναδικό κατά τη γνώμη μας σύστημα το οποίο, χωρίς τεχνικά προβλήματα, εκπληρώνει καλύτερα το μαθηματικό και διδακτικό του έργο, και το οποίο συνλειτουργεί με έναν solver συμβολικού υπολογισμού, είναι το GExp. Παρ' όλες τις δυσκολίες, αλγοριθμικές κυρίως, τα δύο διαφορετικά αυτά συστήματα, ΣΔΓ και ΣΣΥ, μπορούν να συμπλεύσουν δίνοντάς μας αποτελέσματα αξιόλογα και στη διδακτική προσέγγιση. Στην τελευταία παράγραφο δίνουμε δύο παραδείγματα αυτής της συνεργασίας των συστημάτων αυτών.

Πιστεύουμε ότι η χρήση των υπολογιστικών συστημάτων μπορεί να δώσει πραγματικά νέα κατεύθυνση στη διδασκαλία των Μαθηματικών, αρκεί να μην περιορισθεί σε στοιχειώδη χρήση.

2. Ο σχεδιασμός των ΣΔΓ

Τα ΣΣΥ είναι παλαιότερα και βασίζονται σε αλγεβρικούς υπολογισμούς. Τα ΣΔΓ είναι νεότερα και περισσότερο, από όσο πρέπει, φιλόδοξα. Η δυναμική τους αυτή δεν επικυρώθηκε με κάποια μαθηματική θεμελίωση. Μόνο το 1999 ο Kortenkamp[2] προσπάθησε να βάλει μια τάξη, χωρίζοντας τα ΣΔΓ σε δύο κατηγορίες: τα ντετερμινιστικά και τα συνεχή.

Επειδή τα περισσότερα από τα συστήματα αυτά δεν είχαν αρχικώς σχεδιασθεί για να καλύψουν πολύμορφες μαθηματικές ανάγκες, στη πορεία εμφανίστηκαν προβλήματα σχεδιασμού τους.

Το πρώτο πρόβλημα ήρθε από τη θεωρία των κατασκευαστικών αριθμών. Άλλωστε, ένας από τους βασικούς λόγους που δημιουργήθηκαν τα ΣΔΓ είναι να αντικαταστήσουν την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη στη Γεωμετρία. Πόσο όμως αυτό είναι εφικτό; Η τομή δύο κωνικών δεν είναι κατασκευάσιμη με κανόνα και διαβήτη γιατί οι συντεταγμένες των σημείων τομής βρίσκονται σε διπλή αλγεβρική επέκταση του αρχικού σώματος. Αν οι κωνικές ορισθούν σαν γ. τόποι, τότε κανένα σύστημα ΣΔΓ δεν δέχεται τον γ. τόπο σαν γεωμετρικό αντικείμενο και επομένως και την τομή τους. Μόνο το Cabri ver. 2 και μετά και το Cinderella δέχονται τομές καμπυλών, όχι γ. τόπων, αλλά κατασκευασμένες σαν γεωμετρικά αντικείμενα.

Το δεύτερο πρόβλημα, είναι αυτό που σήμερα ονομάζουν το παράδοξο μεταξύ ντετερμινιστικών και συνεχών συστημάτων ΣΔΓ. Χαρακτηρίζουμε ντετερμινιστικό κάθε σύστημα του οποίου οι μεταβλητές της κατασκευής οδηγούν σε μια και μόνο μια έξοδο, όχι τόσο του αντικειμένου αλλά των ιδιοτήτων του. Ένα τέτοιο σύστημα είναι το Cabri και το Sketchpad. Στο συνεχές σύστημα, η συνέχεια είναι ουσιαστικός παράγοντας. Κατά την διάρκεια της μετακίνησης η ταυτοποίηση του γεωμετρικού αντικειμένου και των ιδιοτήτων του παραμένει σταθερή. Ένα τέτοιο σύστημα είναι το Cinderella. Ωστόσο, η συνέχεια δεν συνεπάγεται ντετερμινισμό και το αντίστροφο. Το κλασσικό παράδειγμα της διχοτόμου γωνίας μπορείτε να το βρείτε στα άρθρα του Thomas Gawlick[3], δές επίσης παρ. 3.1.

---

[2] Kortenkamp U. *Foundation of Dynamic Geometry*, PhD, Institute of Technology Zurich, 1999.
[3] Gawlick T, *Konstruktion und Kontinuitat in der Dynamische Geometrie*, αναμένεται.

3. Δύο προβλήματα

Στη παράγραφο αυτή, θα δώσουμε δύο προβλήματα επεξεργασμένα με ένα ΣΔΓ και με ένα ΣΣΥ. Χρησιμοποιήσαμε τα ΣΔΓ ώστε να εμφανίσουμε τις «εικόνες» των αλγορίθμων και των πραγματοποιημένων υπολογισμών από τα ΣΣΥ. Στο δεύτερο παράδειγμα, στην επεξεργασία του προβλήματος εισάγαμε νέες έννοιες για μελλοντική χρήση. Πιστεύουμε ότι η εισαγωγή της νέας τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών μοιάζει με την κατασκευή ενός πολυόροφου κτιρίου. Τα συστήματα συμβολικού υπολογισμού παίζουν τον ρόλο των υποστηλωμάτων που επιτρέπουν να οικοδομήσουμε τον επόμενο όροφο ακόμα και αν ο προηγούμενος δεν έχει περατωθεί.

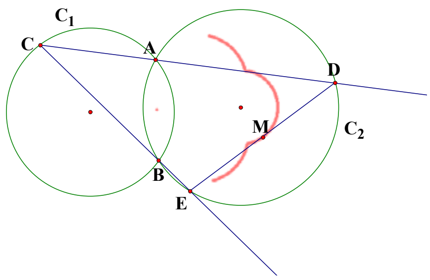
3.1. Ένας γεωμετρικός τόπος

Η αρχιτεκτονική του Sketchpad βασίζεται πάνω στον ντετερμινισμό. Στο παρακάτω παράδειγμα, θα χρησιμοποιήσουμε και το GExp, ένα ιδιόμορφο λογισμικό για τα συνήθη δεδομένα, που ή σχεδίασή του είναι παρόμοια με αυτή των συνεχών συστημάτων[4].

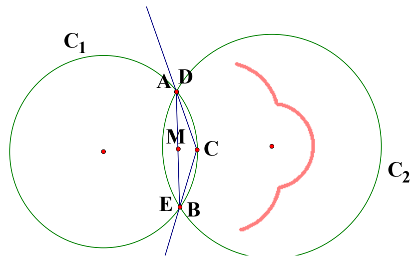
Το πρόβλημα ανήκει, από όσα γνωρίζω, στην Maria Alesandra Mariotti του Πανεπιστημίου της Πίζας.

Έστω δύο κύκλοι C_1 και C_2 τεμνόμενοι σε δύο σημεία A και B. Έστω σημείο C στον πρώτο κύκλο. Ενώνω τα C και A που τέμνει τον C_2 στο D και το C με το B που τέμνει τον C_2 στο E. Να βρεθεί ο γεωμερικός τόπος του μέσου M του DE.

Στο Σχήμα 1 βλέπουμε την κατασκευή του προβλήματος στο Sketchpad. Αν κινήσουμε στη περιφέρεια του C_1 το σημείο C, τότε το μέσο M αφήνει το ίχνος που φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Η κόκκινη καμπύλη δίνει κατά το Sketchpad τον γεωμετρικό τόπο του M όταν κινείται το C. Για προσέξτε τι συμβαίνει όταν το C κινείται στο τόξο AB του C_1 που βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου C_2, Σχήμα 2.

Στη θέση αυτή το σημείο D συνέπεσε με το A και το E με το B. Γιατί συνέβη αυτό;

Το Sketchpad είναι, όπως είπαμε, ένα σύστημα ντετερμινιστικό. Αυτό στην περίπτωσή μας σημαίνει το εξής: όταν κατασκευάσαμε το σημείο D σαν τομή της CA και του C_2, το D βρισκόταν στη θέση, όπως κοιτάζαμε από το C, μετά το A. Η σειρά αυτή διατηρήθηκε και στη νέα θέση του C στο μικρό τόξο AB. Το ίδιο συνέβη και όταν το C βρέθηκε σε μια θέση όπου η τομή της CA με τον C_2, θα βρισκόταν στο

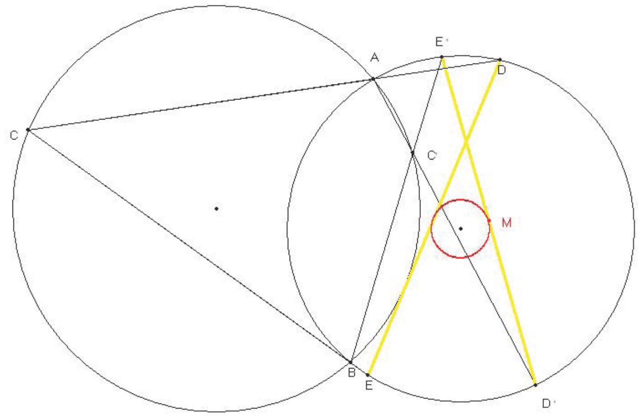
---

[4] Η έκδοση που διαθέτουμε είναι μια πειραματική έκδοση του συστήματος για Windows. Είναι μια ευγενική προσφορά του καθηγητή Xiao-Zan Giao και για τον λόγο αυτό τον ευχαριστούμε θερμά.

εσωτερικό του τόξου AB του κύκλου C_2 που βρίσκεται στο εσωτερικό του C_1. Για τον λόγο αυτό έχουμε τις δύο καμπύλες, πάνω και κάτω, στο ίχνος του σημείου M.

Είναι φανερό ότι το Sketchpad δεν είναι κατάλληλο για να μας βοηθήσει στην ανίχνευση του γεωμετρικού τόπου του M. Λογισμικά που δεν συμπεριφέρονται όπως το Sketchpad είναι το Cabri, το Cinderella.

Για να δούμε το ίδιο πρόβλημα σ'ένα άλλο λογισμικό νέας γενιάς με περισσότερες δυνατότητες και με πιο ευέλικτο και ακριβή σχεδιασμό, το GExp. Στο παραπάνω σχήμα, μπορούμε να δούμε την καμπύλη του γ. τόπου που παράγει το μέσο M της χορδής ED όταν το σημείο C κινείται στη περιφέρεια του πρώτου κύκλου.



Από το σχήμα μπορούμε να διατυπώσουμε τον ισχυρισμό ότι ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος ομόκεντρος του C_2. Παρατηρείστε ότι όταν το C βρίσκεται στο μικρο τόξο AB του C_1 και στο εσωτερικό του κύκλου C_2, η CA τέμνει τον C_2 στο σημείο D'. Έτσι η θέση του σημείου τομής της ευθείας και του κύκλου είναι ανεξάρτητη της θέσης ως προς τα σημεία C και A πάνω στην ευθεία.

Επιλέξαμε να αποδείξουμε τον ισχυρισμό για τη φύση του γ. τόπου με το GExp, αποδεικνύοντας ότι: σε δύο τυχαίες θέσεις του C η χορδή παραμένει σταθερή στο μήκος. Το GExp έχει την δυνατότητα να χρησιμοποιήσει 6 διαφορετικές αποδείξεις: έναν αλγόριθμο βασισμένο σε μία αποδεικτική βάση, τη μέθοδο της πλήρους γωνίας, τον αλγόριθμο που βασίζεται στην άλγεβρα Ritt, τον αλγόριθμο Buchberger, την υψηλού επιπέδου μέθοδο του εμβαδού και την διανυσματική μέθοδο. Έχει τη δυνατότητα να εμφανίζει όλα τα στάδια της απόδειξης σε οποιαδήποτε μέθοδο.

Το λογισμικό μας έδωσε την απόδειξη σε τρείς σελίδες σε μορφή $\LaTeX$. Ας δώσουμε ένα διάγραμμα του πώς αρχίζει η απόδειξη η οποία αποτελείται από 16 συλλογισμούς.

- τριγ. DD'E = τριγ. E'ED
  - DE' = E' D
  - ∠ D'DE = ∠DE'E
    - ∠ D'DE = ∠DE'E
    - ∠ DE'E= ∠ DBC
  - ∠DD'E = ∠ DEE'
    - ∠ DE'E= ∠ DBC
    - ∠DEE' = ∠DYE'

κοκ …

Η μέθοδος αναγνώρισε (οι πληροφορίες φυλάσσονται στην *Geometry Information Base)* 468 γεωμετρικές ιδιότητες στο σχήμα. Από αυτές τις γεωμετρικές ιδιότητες μπορούμε να κατασκευάσουμε νέες ασκήσεις ή tests.

Έτσι για παράδειγμα, μια νέα σειρά υποερωτήσεων μπορεί να προκύψει:

▪ Δείξτε ότι οι ευθείες CC’ και ED’ είναι μεταξύ τους παράλληλες. (2 ζεύγη παραλλήλων ευθείων υπάρχουν στο σχήμα).
▪ Δείξτε ότι οι γωνίες CBC’ και DBD’είναι μεταξύ τους ίσες (Υπάρχουν 419 ζεύγη ίσων γωνιών).
▪Δείξτε ότι BC '*CE = C 'D '*AC (Υπάρχουν 26 ισότητες γινομένων ευθ. τμημάτων).

Συγγεκριμένα, στην περίπτωση του ψευδο-ορθογωνίου[5] τριγώνου ΑΒΓ, βρήκαμε 21 ιδιότητες του τριγώνου με το πρόγραμμα GExp. Νομίζουμε ότι τα αποτελέσματα υπερκαλύπτουν τις απαιτήσεις του μαθήματος της γεωμετρίας.

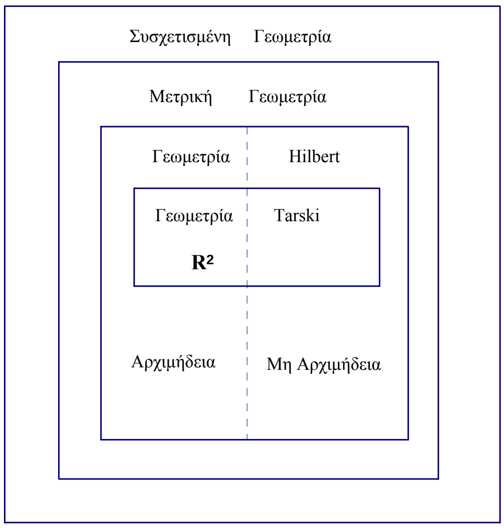
Ας δούμε όμως τον αριθμό των αντιστοίχων γεωμετρικών ιδιοτήτων του σχήματος μερικών παραδειγμάτων στη τύχη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Απλή Αποδεικτική Μέθοδος	**# Ίσων Γωνιών**	**# Ομοίων Τριγώνων**	**# Γεωμετρικών Ιδιοτήτων**
Το ορθόκεντρο τριγώνου	24 ομάδες	7 ομάδες	151
Ευθεία Simson	38 ομάδες	6 ομάδες	72
Κύκλος Miquel	540 ομάδ.	30 ομάδες	671
Κύκλος 9 σημείων	53 ομάδες	1 ομάδα	85

Θα θέλαμε να σημειώσουμε επίσης ότι σε κάθε αλλαγή μεθόδου απόδειξης, όπως μέθοδος εμβαδού, αλγόριθμος Buchberger κ.λ.π., το λογισμικό ανακαλύπτει διαφορετικές γεωμετρικές ιδιότητες του σχήματος.

Πρίν περάσουμε στο άλλο παράδειγμα, ας μείνουμε σε δύο χαρακτηριστικά των συστημάτων αυτοματοποίησης της απόδειξης.

1. Με τα συστήματα αυτά μπορείτε να βρείτε νέα θεωρήματα. Όπως για παράδειγμα: διάφορα θεωρήματα πάνω στις ευθείες Leiserning (Wang, 1989), γενίκευση του θεωρήματος του Gauss της μέσης-γραμμής ενός πλήρους ενός τετράπλευρου σε εξαπολική σχεδίαση επίπεδης κίνησης (Wu, 1989), διάφορες μετρικές σχέσεις στους κύκλους ενός τριγώνου και άλλα.
2. Η γνωστή ταξινόμηση της γεωμετρίας, προβολική, ευκλείδεια, μη-ευκλείδια, διαφορική και αλγεβρική κ.λ.π. έχει προσαρμοσθεί στις αλγοριθμικές απαιτήσεις. Μια τέτοια ταξινόμιση έχει προταθεί από τον Wu και η οποία περιέχεται στο βιβλίο του Chou[6]. Την παραθέτουμε χωρίς σχόλια.



[5] Ένα τρίγωνο ΑΒΓ λέγεται ψευδο-ορθογώνιο στο Α αν | Β – Γ | = 90°.
[6] Shang-Ching Chou, *Mechanical Geometry Theorem Proving*, D. Reidel Publishing Company,, 2001.

3.2. Ένα πρόβλημα μεγίστου ελαχίστου

Ας περάσουμε τώρα σε ένα άλλο είδος προβλημάτων που δεν έχουν λεπτομερώς αναλυθεί, ούτε και είναι προσβάσιμα από τα συστήματα αυτοματοποίησης αποδείξεων. Παράγουν όμως πλούσιο εκπαιδευτικό υλικό. Η απόδειξη θα σχεδιασθεί ταυτόχρονα σε ένα σύστημα συμβολικού υπολογισμού, το Mathematica, και σε ένα ΣΔΓ, το EucliDraw. Η σύζευξη που επιχειρούμε δεν είναι εσωτερική, δεν υπάρχει κάποιος μεταφραστής (translator) μεταξύ των δύο συστημάτων. Τα δύο συστήματα ενεργούν ανεξάρτητα και πιστοποιούν το ένα τα αποτελέσματα του άλλου. Ανάλογα παραδείγματα μπορούμε να δώσουμε για παράδειγμα, στην εύρεση της μορφής της κωνικής που διέρχεται από πέντε σημεία (πρόβλημα Pascal).

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει εδώ είναι πολύ γνωστό:

ΠΑ. Να αποδειχθεί ότι το εγγεγραμμένο τρίγωνο σε δοθέντα κύκλο με την μεγαλύτερη περίμετρο είναι το ισόπλευρο τρίγωνο.
ΠΒ. Να αποδειχθεί ότι από τα εγγεγραμμένα σε κύκλο ν-γωνα με την μεγαλύτερη περίμετρο είναι τα κανονικά ν-γωνα, για κάθε ν φυσικό [7].

Υπάρχουν στο βιβλίο των Ιησουιτών, 3 κλασσικές αποδείξεις του **ΠΑ**. Ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει επίσης τη λύση που έδωσε ο Kazarinoff[8]. Η απόδειξη Kazarinoff είναι αλγεβρική, βασίζεται στην ανάλυση των Ιησουιτών, αλλά δεν γενικεύεται για ν-γωνα. Παρ'όλα αυτά είναι μια απόδειξη με πολλές αρετές γενικότερα.

Η 1^{η} variation αφορά την εποπτεία. Στη 2^{η} variation οι ισχυρισμοί και οι ad hock αποδείξεις δίνουν τη θέση τους σε μια τυπική αλγεβρική μοντελοποίηση, αξιοποιώντας απολύτως τις δυνατότητες των υπολογιστικών συστημάτων. Η λύση μπορεί εύκολα να γενικευτεί και να λύσουμε έτσι και το γενικό πρόβλημα **ΠΒ**. Αυτή θα είναι και η ουσιαστική μας διαφορά συγκριτικά με τις προηγούμενες αλγεβρικοποιήσεις του ίδιου προβλήματος.

5.1.1 1η Variation

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα τρίγωνο εγγράψιμο σ'ένα σταθερό κύκλο. Οι δύο κορυφές μετακινούνται πάνω στη περιφέρεια του κύκλου έτσι ώστε η περίμετρος να αλλάζει αριθμητικά. Στόχος είναι να παρατηρήσουμε την καμπύλη που γράφει το σημείο με συντεταγμένες (άθροισμα δύο γωνιών, περίμετρος τριγώνου).

Για τη συνέχεια επαναδιατυπώνουμε τη πρόταση **ΠΑ** ως εξής:
(ΕΠΑΝ 1 ΠΑ) *:Σχεδιάστε στο EucliDraw ένα τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) με δεδομένη ακτίνα.*

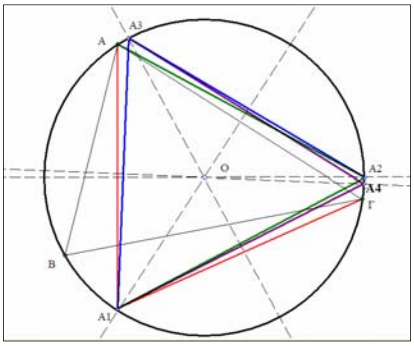
1. *Μετακινώντας μόνο την κορυφή Γ, με τη βοήθεια του EucliDraw, σχεδιάστε δύο καμπύλες: την C_1 που παράγεται από την κίνηση του σημείου Ξ με συντεταγμένες (ΓΒ/ΑΓ,περίμετρος), (ή την C_2 από την κίνηση του σημείου Κ με συντεταγμένες (ΓΒ-ΑΓ,περίμετρος)).*

[7] *Ασκήσεις Γεωμετρίας ΙΗΣΟΥΙΤΩΝ*, τόμος ΙΙ, Πρόβλημα 298 (1067), Εκδόσεις Π. ΧΙΩΤΕΛΛΗ.
[8] N. Kazarinoff, *Geometric Inequalities*, The Mathematical Association of America, 1961.

2. *Για ποια τιμή του πηλίκου ΓΒ/ΑΓ (ή της διαφοράς ΓΒ-ΑΓ) η καμπύλη C_1 (ή C_2) αντίστοιχα, έχουν μέγιστο; Διατυπώστε έναν ισχυρισμό που να αφορά τη θέση της κορυφής Γ ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να έχει μέγιστη περίμετρο .*
3. *Τι παρατηρείτε στην καμπύλη C_1 όταν το Α≡Γ ;*
4. *Ξεκινήστε από ένα συγκεκριμμένο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}$ = ω ακτίνια. Κρατώντας σταθερή την πλευρά ΑΓ κατασκευάστε το ισοσκελές τρίγωνο με βάση την ΑΓ. Έστω A_1 το σημείο τομής της μεσοκαθέτου με τον κύκλο. Το νέο τρίγωνο, A_1ΑΓ, έχει προφανώς μεγαλύτερη περίμετρο του ΑΒΓ. Υπολογίστε την γωνία $\hat{A}_1$ συναρτήσει της ω. Συνεχίστε την ίδια διαδικασία με τη βοήθεια του EucliDraw και κάθε φορά δώστε την εξίσωση της γωνίας της κορυφής $\hat{A}_\nu$ του ισοσκελούς τριγώνου συναρτήσει της ω. Με τη βοήθεια των μετρήσεων μπορείτε να εκτιμήσετε το είδος του τριγώνου σε μια οριακή για την σχεδίαση θέση; (Μπορείτε επίσης να εκφράσετε τις γωνίες σε μοίρες.)*
5. *Γράψτε την επαναληπτική συνάρτηση που δίνει την γωνία της κορυφής του ισοσκελούς τριγώνου της προηγούμενης κατασκευής στο Mathematica. Βρείτε τον αριθμό των βημάτων ώστε να προκύψει γωνία κορυφής $\hat{A}_\nu$ που προσεγγίζει ικανοποιητικά την γωνία π/3, μερικών γωνιών π.χ. π/16 και π/500000.*
6. *Διατυπώστε τον ισχυρισμό για το είδος του εγγεγραμμένου σε κύκλο τριγώνου με τη μέγιστη περίμετρο.*

Η προτεινόμενη εύρεση σχέσης γεωμετρικών και αλγεβρικών δεδομένων στο ερώτημα 1, είναι ενδιαφέρουσα γιατί δίνει, στον μαθητή, τη δυνατότητα να ανακαλύψει σχέσεις ορίου που θα χρησιμοποιηθούν σε ανώτερες ταξεις.

Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην ερώτηση 4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τέσσερα βήματα της κατασκευής. Αρχίζουμε από το τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρω τη μεσοκάθετο στην ΑΓ και σχηματίζω το ισοσκελές A_1ΑΓ. Προφανώς Περ.(ΑΒΓ)< Περ.(A_1ΑΓ). Στη συνέχεια φέρω τη μεσοκάθετο της ΑA_1, δηλαδή τη μεσοκάθετο σε μια από τις ίσες πλευρές. Κατασκευάζω το ισοσκελές A_1A_2Α με Περ.(A_1ΑΓ)< Περ.(A_1A_2Α). Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία έχω διαδοχικά : Περ.(ΑΒΓ)< Περ. (A_1ΑΓ)< Περ. (A_1A_2Α)< Περ.($A_1A_2A_3$)< Περ.($A_1A_3A_4$)<… .



Αν αναζητήσουμε την γενική μορφή της γωνίας A_ν συναρτήσει της A_1=ω, θα βρούμε: $A_\nu = \pi/2 - A_{\nu-1}/2$, με $A_1 = \omega$.

Την επαναληπτική αυτή συνάρτηση μπορούμε κάλλιστα να την βάλουμε στο Mathematica και να βρούμε τον αριθμό των βημάτων κατασκευής του τριγώνου που θα προσεγγίζει το ισόπλευρο τρίγωνο με όση ακρίβεια θέλουμε.

Δίνουμε ενδεικτικά έναν πίνακα των βημάτων της κατασκευής του ισοπλεύρου τριγώνου αρχίζοντας με μια γωνία ω=π/16 ακτίνια.

Προσέγγιση με δεκαδικά ψηφία	**# Βημάτων**
5 δεκαδικά	9
30 δεκαδικά	159
100 δεκαδικά	325
110 δεκαδικά	358

5.1.2 **2η Variation** (Η Τυποποίηση)

Στη variation αυτή θα δούμε πώς μπορούμε να αποδείξουμε ευθέως την πρόταση χωρίς να μεσολαβήσει η ενδιάμεση λύση του ισοσκελούς τριγώνου.

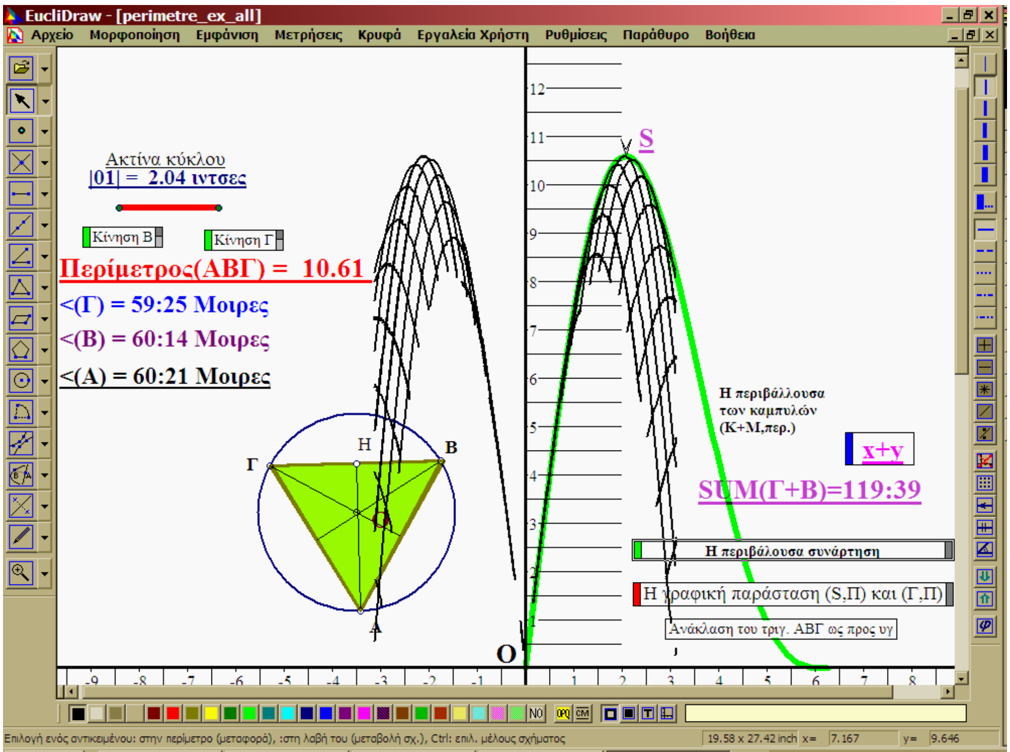
Το πρώτο πράγμα, και το πιο απλό, που μπορεί να σκεφθεί κάποιος είναι να κινήσει τις κορυφές του τριγώνου. Βάζοντας σε κίνηση πάνω στον κύκλο τα σημεία Β και Γ, το σημείο S = ((Β + Γ), Π) γράφει τις καμπύλες με το μαύρο χρώμα. Η πράσινη γραφική παράσταση είναι αυτή που θα πάρουμε όταν το άθροισμα Β + Γ πάρει τιμές στο [0, π).

Σκοπός μας τώρα είναι να δούμε αν αυτές οι ωραίες καμπύλες στο Φύλλο 3, είναι και μαθηματικά αντικείμενα. Αυτό θα θεμελειώσει και θα γενικεύσει την απόδειξη της πρότασης και θα το πετύχουμε αποκλειστικά χρησιμοποιώντας υπολογιστικό σύστημα.

<u>Η ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΛΥΣΗ</u>

Ας διατυπώσουμε το πρόβλημα στην αλγεβρική του διάσταση. Ένας από τους βασικούς στόχους, όπως άλλωστε τονίσαμε, είναι να ερμηνεύσει η άλγεβρα το γεωμετρικό αποτέλεσμα. Η γεωμετρία είναι πιο ισχυρή από την άλγεβρα. Αν ένα αλγεβρικό αποτέλεσμα δεν έχει γεωμετρική υπόσταση, δεν έχει θέση στην απόδειξη. Αυτό είναι ένα αξίωμα. Η τυποποίηση που προτείνουμε είναι η εξής:

(ΕΠΑΝ 3) *:* Αν (Ο,R) ο κύκλος και Α σταθερό σημείο σ'αυτόν, θεωρείστε τρείς αριθμούς a, b και c στο [0,2π] έτσι ώστε a + b + c = 2π. Έστω Α, Β και Γ σημεία του κύκλου με $A\hat{O}B = a$, $B\hat{O}\Gamma = b$ και $A\hat{O}\Gamma = c$. Δείξτε ότι :



Φύλλο 3

a. η περίμετρος Π του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με $\Pi = 2R\left(\eta\mu\left(\frac{a}{2}\right) + \eta\mu\left(\frac{b}{2}\right) + \eta\mu\left(\frac{c}{2}\right)\right)$ (1)

b. Έστω $\varphi(x) = \eta\mu\frac{x}{2} + 2\ \eta\mu\frac{x}{4}$. Μελετήστε τη μεταβολή της φ(x) στο $[0,2\pi]$ και αποδείξτε ότι $\forall x \in [0,2\pi],\ \ \varphi(x) \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

c. Με την βοήθεια της φ(x) αποδείξτε ότι $\Pi \le 3R\sqrt{3}$.

d. Ποια είναι η θέση των σημείων Α, Β και Γ ώστε το τρίγωνο να έχει την μεγίστη περίμετρο;

Μπορούμε να δείξουμε ότι Π ≤ 2R φ(b+c). Η φ(x) είναι μία συνάρτηση μιας μεταβλητής και μπορούμε εύκολα να την μελετήσουμε. Ας χρησιμοποιήσουμε το Mathematica γι' αυτό. Και πιο συγκεκριμένα το θεώρημα του Mathematica `Maximize`.

```
In[1]:= f=2*Sin[x/4]+Sin[x/2]

Out[1]= 2 Sin[x/4] + Sin[x/2]

In[3]:= Maximize[{f,0≤x≤2*Pi},x]

Out[3]= {3 √3/2, {x → 4 π/3}}
```

Εύκολα μπορείτε τώρα να ολοκληρώσετε την λύση.

<u>Σημείωση:</u> Η συνάρτηση που μας έδωσε το γράφημα μεταβολής του σημείου S, δες Φύλλο 3, είναι η 2Rφ(x).

<u>Η ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ</u>

Ας λύσουμε τώρα το πρόβλημα **ΠΒ**. Η λύση που θα δώσουμε είναι γενίκευση της αλγεβρικής λύσης στην προηγούμενη variation.

Η κλασσική απόδειξη των Ιησουιτών (βιβλίο ΙΙ, Προβλ. 1068) κατά τη γνώμη μας δεν ικανοποιεί.

Έστω ένα ν-γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Θέλουμε να βρούμε τη θέση των κορυφών του ν-γώνου έτσι ώστε να έχει την μεγαλύτερη περίμετρο απ'όλα τα εγγεγραμένα στο κύκλο ν-γωνα. Θεωρούμε ν σημεία στην περιφέρεια του κύκλου. Έστω a_1, a_2, …, a_ν οι επίκεντρες γωνίες που βλέπουν τις πλευρές του ν-γώνου. Προφανώς $a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu = 2\pi$. Αν Π η περίμετρος του ν-γώνου τότε $\Pi = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu$, όπου λ_i οι πλευρές του πολυγώνου. Τότε $\lambda_i = 2R\ \eta\mu(a_i/2)$. Έτσι η περίμετρος:

Εύκολα μπορείται να δείτε ότι:

$$\Pi \le 2R\left[(\nu-1)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{\nu-1}\left[\frac{a_1+\ldots+a_{\nu-1}}{2}\right]\right) + \eta\mu\left(\frac{a_1+\ldots+a_{\nu-1}}{2}\right)\right] \text{ ή}$$

αν $x = a_1 + ... + a_{v-1}$, $\Pi \leq 2R\left[(v-1)\cdot \eta\mu\left(\frac{x}{2(v-1)}\right) + \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)\right]$ (*)

Έστω η συνάρτηση $f_v(x) = (v-1)\cdot \eta\mu\left(\frac{x}{2(v-1)}\right) + \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$ δίνει όπως και στην περίπτωση ν=3, το μέτρο της επικέντρου γωνίας a_v ώστε η $f_v(x)$ να έχει μέγιστο και συνεπώς το πολύγωνο να έχει μεγίστη περίμετρο, δες σχέση (*). Ας δούμε ένα παράδειγμα. Υποθέστε ότι ν = 6. Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μικρό procedure στο Mathematica για να αυτοματοποιήσουμε το αποτέλεσμα για τις διαφορετικές τιμές του ν. Η συνάρτηση $f_6(x)$ για ν = 6 στο Mathematica έχει μέγιστο 3 για x = 5π/3:

```
In[1]:= f=5*Sin[x/10]+Sin[x/2]
Out[1]= 5 Sin[x/10] + Sin[x/2]
In[2]:= FullSimplify[Maximize[{f,0≤x≤2*Pi},x]]
Out[2]= {3, {x → 5π/3}}
```

Αλλά για x = 5π/3 παίρνουμε a_6 = 2π - 5π/3 = π/3. Ομοίως βρίσκουμε $a_1 = a_2 = \ldots = a_6$ = π/3. Άρα, το εγγεγραμμένο σε κύκλο 6-γωνο με την μεγαλύτερη περίμετρο είναι το κανονικό εξάγωνο.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Είδαμε δύο παραδείγματα του πώς μπορούν να συμβαδίσουν τα λογισμικά της Δυναμικής Γεωμετρίας και του Συμβολικού Υπολογισμού. Για την επίτευξη του σκοπού αυτού υπάρχουν πολλές ιδέες. Η πλέον ολοκληρωμένη είναι αυτή που περιγράφουν οι Chou και Giao, του λογισμικού GExp.

Αυτό που θελήσαμε να φανεί από τον τρόπο και την έκταση χρήσης των δύο αυτών συστημάτων είναι 1) ο μαθηματικός πλούτος που εμπεριέχουν, και ιδίως οι νέες δυνατότητες που δίνουν στη διδασκαλία των μαθηματικών και 2) ότι οι αποδείξεις και ο χειρισμός της μεθοδολογίας δεν υπολείπονται δοόλου απο αυτές των κλασσικών μαθηματικών, αντίθετα πολλές φορές εμβαθύνουν περισσότερο.

Η χρήση των υπολογιστών και των αλγορίθμων στα μαθηματικά έδωσε έναν άλλο χαρακτήρα στην έννοια της απόδειξης. Τα βιβλία του Ευκλείδη, το βιβλίο του Berger, το βιβλίο των Ιησουιτών και το βιβλίο του Wu, δεν χειρίζονται με τον ίδιο τρόπο το εργαλείο αυτό. Η ακρίβεια και η συμπερασματική οργάνωση, αυτό που τέλος πάντων χαρακτηρίζει την απόδειξη, αλλάζει δια μέσου των εποχών. Ίσως πρέπει να αναζητήσουμε *ιστορικά αμετάβλητα*; Ή αν δεν υπάρχουν τέτοια αμετάβλητα, ποιά είναι τα στοιχεία που την μεταμορφώνουν; Να ένα αντικείμενο μελέτης.

Démonstrations Automatiques aux systèmes du Calcul Formel et de la Géométrie Dynamique

Ligatsikas Zénon
PhD in Pure Mathematics, France
e-mail: zenon7@otenet.gr
Lycée δε Varvakeio

RESUMÉ : Dans cet article, nous verrons comment on peut utiliser le couplage des logiciels de la géométrie dynamique et du calcul formel pour effectuer des démonstrations en maths. Une partie de la géométrie peut de nos jours automatiser (voire mécaniser) ses preuves en n'utilisant que les logiciels du calcul formel. Même si la plupart des algorithmes sont difficiles à comprendre, on peut les utiliser à l'enseignement et à l'organisation du cours. Cependant la réalisation du couplage des logiciels de la géométrie dynamique et du calcul formel bute sur des problèmes algorithmiques, lesquels ne sont néanmoins pas si difficiles à résoudre. Les utilisations d'un tel logiciel de ce couplage restent à conceptualiser. Ajoutons que le secteur de la planification de la matière des mathématiques lequel est finalement responsable du succès ou non de l'introduction des nouvelles mathématiques et des ordinateurs à l'enseignement, doit être examiné et classifié.