

ΣΠ. Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΤΕΥΧΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1976

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΩΡΕΑΝ

ΣΠ. Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΤΕΥΧΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1976



Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

Μ Ε Ρ Ο Σ Π Ρ Ω Τ Ο Ν

ΕΚ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

- §1. Κατασκευαί.
- §2. Βασικαί κατασκευαί.
- §3. Ἡμιαφαπτομένη τόξου.
- §4. Κατασκευή τόξου ἐκ τῆς χορδῆς καὶ τῆς ἡμιαφαπτομένης του.
- §5. Τόξον ἰκανὸν γωνίας φ.
- §6. Εἰδικαί περιπτώσεις.
- §7. Ἡ γενικὴ μέθοδος.
- §§8 - 15. Παραδείγματα τῆς Ἀναλυτικῆς μεθόδου.
- §16. Μεταφορὰ σχήματος κατὰ διάνυσμα δ.
→
- §17. Γεωμετρικὸς τόπος.
- §18. Στοιχειώδεις γεωμετρικοὶ τόποι.
- §19. Εὗρεσις γεωμετρικῶν τόπων.
- §20. Χρῆσις τῶν γ.τ. εἰς γεωμετρικὰς κατασκευὰς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

- §21. Ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν κυρτῶν πολυγώνων
- §22. Ἐγγράψιμον τετράπλευρον.
- §23. Χαρακτηριστικαὶ ἰδιότητες.
- §24. Τέσσαρα ὀμοκυκλικά σημεῖα.
- §25. Γωνία ὄψους καὶ διαμέτρου.
- §§26,27,28. Ἰδιότητες τοῦ ὀρθοκέντρου.
- §29. Ἐῶθεῖα Euler τριγώνου.
- §30. Κύκλος τῶν ἑννέα σημείων τριγώνου.
- §31. Ἐῶθεῖα Simson.
- §32. Ἐῶθεῖα Steiner.
- §33. Γωνία δύο ἡμικυκλίων τεμνουσῶν περιφέρειαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

- §34. Πολλαπλασιασμός εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ θετικῶν ἀριθμῶν.
- §34a. Ἀκολουθίαι.
- §35. Ἡ ἔννοια τοῦ ὀρίου ἀκολουθίας.
- §36. Ἀξίωμα τοῦ Dedekind.
- §37. Ὁριον μονοτόνου ἀκολουθίας.
- §38. Θεώρημα τοῦ ἐγκιβωτισμοῦ.
- §39. Ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους.
- §40. Μέτρον ἑνὸς τμήματος.
- §41. Θεωρήματα ἐπὶ τοῦ μέτρου τῶν τμημάτων.
- §42. Ἐπίδρασις τῆς ἀλλαγῆς μονάδος μετρήσεως ἐπὶ τῶν μηκῶν.
- §43. Λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων.
- §44. Δεύτερος ὀρισμός τοῦ γινομένου τμήματος ἐπὶ θετικῶν ἀριθμῶν.
- §45. Μέτρον γωνίας.
- §46. Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ.
- §47. Ἀλγεβρικὴ διατύπωσις τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ.
- §48. Συνέπεια τοῦ (Θ) τοῦ Θαλοῦ.
- §49. Διαίρεσις τμήματος εἰς μέρη ἀνάλογα δύο δοθέντων τμημάτων.
- §50. Τέταρτον ἀνάλογον.
- §§51 - 54. Ὅμοια τρίγωνα.
- §55. Τὸ εἰς ἀπειρον ἀπόστασιν σημεῖον μιᾶς εὐθείας.
- §56. Ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν.
- §57. Μετρικαὶ σχέσεις μεταξύ τμημάτων.
- §§ 58, 59. Ἰδιότητες τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς διχοτόμου γωνίας τριγώνου.
- §60. Διαίρεσις διανύσματος εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ.

- §61. Διαίρεσις διανύσματος εις άλγεβρικών λόγον λ.
- §62. Άρμονική τετράς σημείων.
- §§63,64. Χαρακτηριστικά Ιδιότητες της άρμονικής τετράδος.
- §65. Συμβατικά συζυγή άρμονικά σημεία.
- §66. Άπολλώνιος κύκλος.
- §67. Περιοχαί του επιπέδου καθοριζόμεναι υπό μιάς άπολλωνίου περιφερείας.
- §68. Παρατήρησις.
- §69. Θεώρημα του Ευκλείδου.
- §70. Πυθαγόρειον θεώρημα.
- §§71,72,73,74. Μετρικά σχέσεις έν ορθογωνίω τριγώνω.
- §§75,76. Κατασκευαί άλγεβρικών παραστάσεων.
- §77. Κατασκευή του x εκ της $x^2/a^2 = μ/v$.
- §78. Η άλγεβρική μέθοδος εις Γεωμετρικάς κατασκευάς.
- §79. Έπεκτεταμένον πυθαγόρειον θεώρημα.
- §80. Κριτήριον του άν γωνία τριγώνου είναι όξετα, όρθή ή άμβλετα.
- §81. Άλγεβρική διατύπωσις του επέκτεταμένου πυθαγορείου θεωρήματος.
- §82. Πρώτον θεώρημα της διαμέσου.
- §83. Δεύτερον θεώρημα της διαμέσου.
- §84. Θεώρημα περί του γινομένου δύο πλευρών τριγώνου.
- §85. Σχέσις του Stewart.
- §86. Γενικευμένη σχέσις του Stewart.
- §§87,88. Μήκος της έσωτερικής και έξωτερικής διχοτόμου γωνίας τριγώνου.
- §89. Έφαρμογαί του πρώτου θεωρήματος της διαμέσου.
- §90. Τόπος : $MA^2 - MB^2 = c^2$.
- §91. Ύπολογισμός των ύψων τριγώνου συναρτήσει των πλευρών.
- §92. Έμβαδόν τριγώνου.
- §93. Ιδιότητες του έμβαδου των τριγώνων.
- §94. Η προσθετική Ιδιότης του έμβαδου.
- §95. Τύποι του έμβαδου τριγώνου.
- §96. Ύπολογισμός των ρ , ρ_a , R συναρτήσει των πλευρών του τριγώνου.
- §97. Σύγκρισις των έμβαδών δύο τριγώνων. Έφαρμογή.
- §98. Ίσοδύναμα τρίγωνα.
- §99. Έμβαδόν κυρτου πολυγώνου.
- §100. Έμβαδόν παραλληλογράμμου.
- §101. Έμβαδόν τραπεζίου.

- §102. Έμβαδόν τετραπλεύρου μέ καθέτους διαγωνίους.
- §103. Πολύγωνα Ίσοδύναμα.
- §104. Κατασκευή τριγώνου Ίσοδύναμου προς δοθέν πολύγωνον
- §105. Έφαρμογή της §104.
- §106. Πάν κυρτόν πολύγωνον τετραγωνίζεται.
- §107. Όμοια πολύγωνα.
- §§108,109. Κατασκευαί όμοίων πολυγώνων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

- §110. Θεώρημα των τεμνομένων χορδών και το αντίστροφον αυτού.
- §111. Θεώρημα των τεμνουσών και το αντίστροφον αυτού.
- §112. Θεώρημα τεμνώσης και έφαπτομένης και το αντίστροφον αυτού.
- §113. Άλγεβρική διατύπωσις των μετρικών σχέσεων έν κύκλω.
- §114. Μεταφορά ένός γινομένου.
- §115. Γεωμετρική κατασκευή των ριζών δευτεροβαθμίου εξισώσεως
- §116. Γεωμετρική κατασκευή των ριζών διτετραγώνου εξισώσεως.
- §117. Διαίρεσις τμήματος εις μέσον και άκρον λόγον.
- §118. Δύναμις σημείου ώς προς κύκλον.
- §119. Θεώρημα Euler και το αντίστροφον αυτού.
- §120. Ριζικός άξων δύο κύκλων.
- §121. Είδικαι περιπτώσεις.
- §122. Κατασκευή του ριζικού άξονος δύο κύκλων.
- §123. Τύπος της διαφοράς των δυνάμεων σημείου ώς προς δύο κύκλους.
- §124. Ριζικόν κέντρον τριών κύκλων.
- §125. Όρθογωνιότης δύο κύκλων.
- §126. Περιφέρεια τεμνομένη ψευδοορθογωνίας υπό έτέρας περιφερείας.
- §127. Δέσμη περιφερειών.
- §128. Ιδιότητες των περιφερειών μιάς δέσμης.
- §129. Όρθογώνιοι δέσμαι περιφερειών.
- §130. Πρόβλημα του Άπολλωνίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

- §131. Θεώρημα του Μενελάου.
- §132. Θεώρημα του Ceva.
- §133. Ιον Θεώρημα του Πτολεμαίου.
- §134. 2ον Θεώρημα του Πτολεμαίου.

ΕΚ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΚΑΙ ΤΟΠΟΙ

1. Κατασκευαί. α') Μολονότι τὰ γεωμετρικά σχήματα εἶναι ἀπολύτως ἰδεατά, ἐν τούτοις χαράσσονται (ἢ σχεδιάζονται) κατὰ λίαν ἰκανοποιητικὸν τρόπον ἐπὶ ἐπιπέδου σχεδίου. Διὰ τὴν χάραξιν τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων χρησιμοποιοῦμεν τὸν **κανόνα**, διὰ τοῦ ὁποίου σχεδιάζομεν εὐθύγραμμα τμήματα, καὶ τὸν **διαβήτην**, διὰ τοῦ ὁποίου σχεδιάζομεν περιφερείας ἢ τόξα καθὼς καὶ ἴσα τμήματα. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν δύναται νὰ χρησιμοποιηθῆται «τυφλός» διαβήτης μὲ δύο ἀκίδας, χωρὶς γραφίδα. (Μεταφορεύς).

Κάθε γεωμετρικὸν θεώρημα ἀνταποκρίνεται εἰς ἓν **σχῆμα**, τὸ ὁποῖον ὁ σπουδαστὴς πρέπει νὰ κατασκευάζῃ μόνος του χρησιμοποιῶν τ' ἀνωτέρω ὄργανα, καθὼς καὶ τινὰ βοηθητικά «διαφανῆ» ὀρθογώνια τρίγωνα, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιταχύνεται ἡ κατασκευὴ καθέτων ἢ παραλλήλων. Ἡ ὑπὸ τοῦ ἰδίου τοῦ μελετητοῦ κατασκευὴ τῶν σχημάτων διαφωτίζει αὐτὸν ἀσυγκρίτως περισσότερον ἀπὸ τὴν παρατήρησιν ἑνὸς ἤδη σχεδιασμένου εἰς τὸ βιβλίον σχήματος.

β') Εἰς τὴν γεωμετρίαν τίθενται προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ συγκροτηθῇ ἓν σχῆμα, ὅταν δίδονται **ὀρισμένα στοιχεῖα** αὐτοῦ. Ὁ θεωρητικὸς προσδιορισμὸς καὶ ἡ μετ' ἀκριβείας χάραξις ἑνὸς σχήματος

πληροδντος ὄρισμένους ὄρους (ἐπιτάγματα) καλεῖται εἰς τὴν γεωμετρίαν «κατασκευή».

Ὅταν τὸ πρόβλημα τῆς κατασκευῆς ἑνὸς σχήματος λύεται διὰ τῆς χρήσεως μόνον τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου, τότε λέγομεν (ἀκολουθοῦντες τὸν Πλάτωνα) ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπιδέχεται γεωμετρικὴν λύσιν ἢ «λύεται γεωμετρικῶς» καὶ ἡ κατασκευὴ ἢ ἐπιτυγχανομένη μόνον διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου λέγεται γεωμετρικὴ κατασκευὴ.

γ') Ὑπάρχουν προβλήματα κατασκευῶν μὴ δυνάμενα νὰ λυθοῦν διὰ τῆς χρήσεως κανόνος καὶ διαβήτου μόνον. Ταῦτα λέγονται προβλήματα μὴ λυόμενα γεωμετρικῶς. Οὕτω π.χ. ἔχει ἀποδειχθῆ διὰ τὰ κάτωθι 10 προβλήματα ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ λυθοῦν διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου (δηλ. δὲν λύονται γεωμετρικῶς).

Προβλήματα τινὰ μὴ ἐπιδεχόμενα γεωμετρικὴν λύσιν :

1. Νὰ διαιρεθῆ δοθεῖσα γωνία διάφορος τῆς ὀρθῆς εἰς τρεῖς ἴσα μέρη.

2. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ μεταξὺ δύο ἄλλων τεμνομένων εὐθειῶν περιεχόμενον τμήμα νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμήμα. (Τὸ δοθὲν σημεῖον νὰ μὴ κεῖται ἐπὶ μίᾳς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν, ἄς σχηματίζουσι αἱ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι).

3. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζουσι τὰς τρεῖς διχοτόμους.

4. Δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος μέτρου a , νὰ κατασκευασθῆ δεῦτερον, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον ἰσοῦται πρὸς $a\sqrt[3]{2}$.

5. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὗ δίδονται οἱ πόδες τῶν διχοτόμων.

6. Νὰ διαιρεθῆ δοθεῖσα περιφέρεια εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη.

7. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὗ δίδονται τὰ συμμετρικὰ τῶν κορυφῶν ὡς πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς.

8. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὗ δίδεται μία διάμεσος, μία διχοτόμος καὶ ἓν ὕψος ἀγόμενα ἐκ τριῶν διαφόρων κορυφῶν.

9. Διὰ δοθέντος σημείου κειμένου ἐντὸς δοθείσης γωνίας νὰ ἀχθῆ τμήμα περατούμενον ἐπὶ τῶν πλευρῶν καὶ ἔχον τὸ ἐλάχιστον δυνατόν μήκος.

10. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα ἀποτεμένοσα ἀπὸ δύο δοθείσας περιφερείας χορδὰς ἔχούσας διαφορὰν δεδομένην.

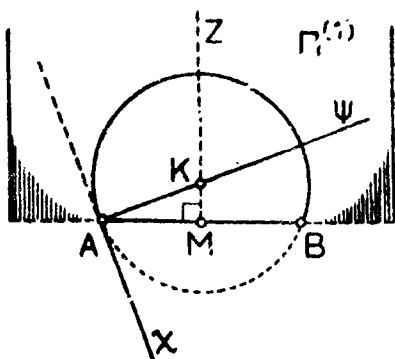
Ἐν τοῖς ἐπομένοις θὰ πραγματευθῶμεν μόνον προβλήματα ἐπιδεχόμενα γεωμετρικὴν λύσιν.

2. Βασικαὶ κατασκευαί. Αἱ ἀπλᾶί, βασικαὶ γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ εἶναι ἤδη γνωσταὶ εἰς τὸν μαθητὴν ἀπὸ τὴν προηγουμένην τάξιν. (Ἐπ' αὐτῶν βλέπε ἀσκήσεις 1 ἕως 10). Θὰ προσθέσωμεν μερικὰς ἀκόμη καθὼς καὶ παραδείγματα συνθετωτέρων κατασκευῶν.

3. Ήμιεφαπτομένη τόξου. Κάθε τόξον \widehat{AB} κείται επί του ενός εκ των δύο ήμιεπιπέδων, τα όποια όριζει ή ευθ AB . Καλεϊται ήμιεφαπτομένη ενός τόξου \widehat{AB} εις τó άκρον A ή ήμισευθεια Ax ή φερομένη επί τής εις τó A έφαπτομένης και κειμένη ως προς την ευθ AB εις τó ήμιεπίπεδον, τó μή περιέχον τó τόξον \widehat{AB} .

4. Νά κατασκευασθῆ τόξον, όταν δίδεται ή χορδή του AB και ή ήμιεφαπτομένη του Ax .

Ανάλυσις. Τó κέντρον του ζητουμένου τόξου κείται άφ' ενός επί τής μεσοκαθέτου του τμήματος AB (σχ. 1) και άφ' έτέρου επί τής εις τó A καθέτου επί την Ax .



Σχ. 1

Σύνθεσις. Φέροντες τας δύο άνωτέρω ευθείας MZ και $A\psi$ (σχ. 1) προσδιορίζομεν διά τής άλληλοτομής των, τó κέντρον K του ζητουμένου τόξου. Με κέντρον K και άκτίνα KA γράφομεν τόξον \widehat{AB} κείμενον επί του ήμιεπιπέδου $\Pi^{(1)}$ του όριζομένου υπό τής ευθ AB και μή περιέχοντος την ήμισευθειαν Ax .

(Τόξον μή περιεχόμενον έντός τής γωνίας \widehat{BAX}). Προφανώς τó πρόβλημα έχει πάντοτε μίαν λύσιν (έφ' όσον βεβαίως αι ευθείαι Ax , AB δέν ταυτίζονται).

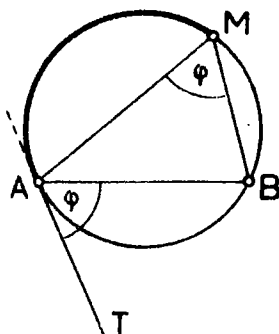
ΤΟΞΟΝ ΙΚΑΝΟΝ ΓΩΝΙΑΣ φ

5. α') Πρόβλημα. «Νά εύρεθῆ τó σύνολον των σημείων M , από των όποίων δοθέν τμήμα AB φαίνεται υπό δοθείσαν κυρτήν γωνίαν ($\neq 0$ και $\neq 180^\circ$)».

Έστω M έν σημείον του συνόλου, δηλαδή τοιοϋτον, ώστε :

$\widehat{AMB} = \varphi$ (δοθείσα κυρτή γωνία) (σχ. 2).

Τó σημείον M δέν κείται επί του τμήματος AB (θά είχομεν τότε $\varphi = 180^\circ$) ούτε επί τής προεκτάσεώς του (θά είχομεν $\varphi = 0$)· συνεπώς διά των A, M, B διέρχεται περιφέρεια. Θεωροϋμεν τώρα τó τόξον \widehat{AMB} τó περιέχον τó M και την ήμιεφαπτομένην αυτού AT κατά τó άκρον A (§ 3). Τότε ή υπό τής χορδής



Σχ. 2

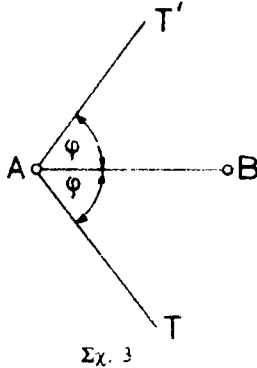
AB και τής ήμιεφαπτομένης AT σχηματιζομένη γωνία \widehat{TAB} ίσοϋται με

τὴν \widehat{AMB} , δηλ. $\widehat{TAB} = \varphi$. Ὡστε ἡ ἡμιευθεία AT εἶναι **σταθερά** (δηλ. ἡ αὐτὴ διὰ κάθε σημεῖον M τοῦ συνόλου).

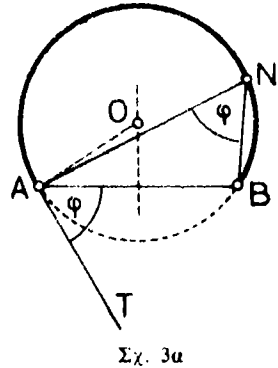
Ἐπομένως καὶ τὸ τόξον \widehat{AMB} εἶναι **σταθερόν** καὶ **κατασκευάσιμον** (§ 4).

Ἀντίστροφον. Ἄς χαράξωμεν τὰς δύο ἡμιευθείας AT καὶ AT' τοιαύτας, ὥστε $\widehat{TAB} = \widehat{T'AB} = \varphi$ (σχ. 3) καὶ ἄς κατασκευάσωμεν τὰ δύο τόξα τὰ ἔχοντα ταύτας ὡς ἡμιεφαπτομένας.

Εἰς τὸ σχ. 3α ἔχομεν κατασκευασεῖ τὸ ἐν ἑκ τῶν δύο τόξων συμφώνως πρὸς τὴν § 4.



Σχ. 3



Σχ. 3α

Ἐστω N τυχόν

σημεῖον τοῦ τόξου τούτου. Κατὰ τὸ θεώρημα τῆς ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης σχηματιζομένης γωνίας αἱ δύο γωνίαι \widehat{TAN} καὶ \widehat{ANB} εἶναι ἴσαι (ἐκάστη ἴση πρὸς τὸ ἡμισυ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου AOB) καὶ ἐπειδὴ $\widehat{TAN} = \varphi \Rightarrow \widehat{ANB} = \varphi$. Δηλ. τὸ N ἔχει τὴν ιδιότητα τῶν σημείων τοῦ συνόλου. Ὁμοία ἀπόδειξις γίνεται καὶ διὰ τὸ δεύτερον τόξον, συμμετρικὸν τοῦ πρώτου ὡς πρὸς τὴν AB .

β') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται τὸ θεώρημα :

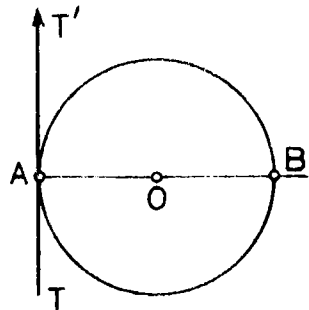
«Τὸ σύνολον τῶν σημείων, ἀπὸ τῶν ὁποίων δοθὲν τμήμα AB φαίνεται ὑπὸ δοθείσαν κυρτὴν γωνίαν φ , σύγκειται ἀπὸ δύο τόξα ἔχοντα ἄκρα τὰ A καὶ B καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἡμιεφαπτόμεναι εἰς τὸ A σχηματίζουν μετὰ τῆς AB γωνίαν φ ».

γ') Τόξον \widehat{ANB} , τοῦ ὁποίου πάντα τὰ σημεῖα βλέπουν τὸ τμήμα AB ὑπὸ δοθείσαν γωνίαν φ , λαμβάνει τὸ ὄνομα : **τόξον ἐπὶ χορδῆς AB , ἰκανὸν γωνίας φ .**

6. Εἰδικαὶ περιπτώσεις.

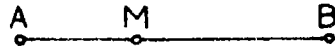
i) Ἐὰν $\varphi = 90^\circ$, αἱ ἡμιεφαπτόμεναι AT, AT' εἶναι ἡ μία προέκτασις τῆς ἄλλης καὶ τὰ δύο ἀντίστοιχα τόξα ἔχουν κοινὸν κέντρον τὸ μέσον τοῦ AB .

Ὅθεν : τὸ σύνολον τῶν σημείων, ἀπὸ τῶν ὁποίων δοθὲν τμήμα AB φαίνεται ὑπὸ γωνίαν ὀρθήν, εἶναι περιφέρεια διαμέτρου AB . Τὰ A καὶ B δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον.



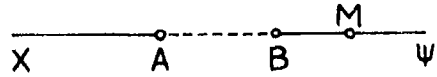
Σχ. 4

ii) Ἐὰν $\varphi = 180^\circ$, ἡ γωνία \widehat{AMB} εἶναι πεπλατυσμένη, τὸ Μ εὐρίσκειται ἐπὶ τοῦ τμήματος AB καὶ τὸ σημειοσύνολον εἶναι τὸ τμήμα AB (σχ. 5).



Σχ. 5

iii) Ἐὰν $\varphi = 0^\circ$, τὸ σημειοσύνολον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἡμιευθείας AX , $B\psi$, προεκτάσεις τοῦ τμήματος AB .



Σχ. 5α

7. Ἡ γενικὴ μέθοδος. Ὁ γενικὸς τρόπος τοῦ σκέπτεσθαι διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος κατασκευῆς εἶναι ὁ ἀκόλουθος.

i) **Ἀνάλυσις.** Τὸ πρῶτον καὶ κυριώτερον βῆμα πρὸς τὴν λύσιν εἶναι ἡ ἀνάλυσις τοῦ προβλήματος, ἥτοι ἡ συσχέτισις τοῦ ἀγνώστου σχήματος μεῖς ἄλλο σχῆμα, τοῦ ὁποῦ ἤδη γνωρίζομεν τὴν κατασκευὴν. Ἀνάλυσις λοιπὸν εἶναι ἡ ἀναγωγὴ τοῦ ἀγνώστου εἰς γνωστόν. Κατ' αὐτὴν ὑποθέτομεν προσωρινῶς τὸ πρόβλημα δυνατὸν καὶ τὸ ζητούμενον σχῆμα κατασκευασμένον. Κατόπιν μελετῶντες τὰ δεδομένα, ἐπιδιώκομεν νὰ φέρωμεν καταλλήλους γραμμὰς, διὰ τῶν ὁποίων, χρησιμοποιοῦντες τὰ δεδομένα (δηλ. τὰ γνωστὰ στοιχεῖα), νὰ δημιουργήσωμεν δευτέρον σχῆμα, κατασκευάσιμον καὶ ἀλληλένδετον μετὰ τὸ ζητούμενον. Ὡστε κατασκευασθέντος τοῦ δευτέρου νὰ προκύπτῃ καὶ τὸ πρῶτον.

ii) **Σύνθεσις.** Βάσει τῶν συμπερασμάτων τῆς ἀναλύσεως προσπαθοῦμεν νὰ ἀνασυγκροτήσωμεν (κατασκευάσωμεν) τὸ ζητούμενον σχῆμα διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτη. Ἡ ἐργασία αὐτὴ εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς ἀναλύσεως, διότι τώρα μεταβαίνομεν ἀπὸ γνωστοῦ σχήματος εἰς τὸ ζητούμενον.

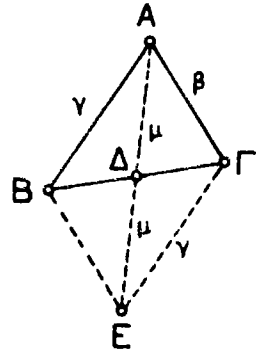
iii) **Ἀπόδειξις.** Ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ κατασκευασθὲν σχῆμα ἀναποκρίνεται πλήρως πρὸς τὰ δεδομένα (πληροῖ τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος).

iv) **Διερεύνησις.** Ἀναζητοῦμεν τὰς συνθήκας, εἰς τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ὑπόκεινται τὰ δεδομένα, ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν, δηλ. αἱ ἐνδεικνύομεναι κατασκευαὶ εἶναι πραγματοποιήσιμοι καὶ τὸ ζητούμενον σχῆμα ὄντως ὑπάρχῃ. Τὸ πλῆθος τῶν δυνατῶν λύσεων, δηλ. ἡ ὑπαρξίς διαφορετικῶν σχημάτων πληροῦντων τὰ ἴδια δεδομένα ἐπιτάγματα εἶναι ἐπίσης ἀντικείμενον τῆς διερευνήσεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

8. —Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τῆς μεταξύ αὐτῶν περιχομένης διαμέσου.

i) *Ἀνάλυσις.* Ἐστω ὅτι τὸ ζητούμενον τρίγωνον κατασκευάσθῃ καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 6). Γνωρίζομεν τὴν ΑΒ = γ, τὴν ΑΓ = β καὶ τὴν διάμεσον ΑΔ = μ. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν ΑΔ μέχρι διπλασιασμοῦ, δηλ. κατὰ τμῆμα ΔΕ = ΑΔ, ἐνώσωμεν δὲ τὸ Ε μὲ τὰ Β καὶ Γ, τὸ τετράπλευρον ΑΒΕΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται. Ὡστε καὶ ΓΕ = ΑΒ = γ. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι τὰ μήκη ΑΓ = β, ΓΕ = γ, ΑΕ = 2μ εἶναι δεδομένα, ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΕΓ εἶναι κατασκευάσιμον, διότι γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευράς του. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓΕ προκύπτει τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν ἐνώσωμεν τὸ Γ μὲ τὸ μέσον Δ τῆς ΑΕ, προεκτείνωμεν τὴν ΓΔ κατὰ μήκος ΔΒ = ΓΔ καὶ φέρωμεν τὴν ΑΒ.



Σχ. 6

ii) *Σύνθεσις.* Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΕΓ, τοῦ ὁποῦ αἱ τρεῖς πλευραὶ νά ἔχουν μήκη ΑΓ = β, ΓΕ = γ, ΕΑ = 2μ. Ἐνοῦμεν τὸ Γ μὲ τὸ μέσον Δ τῆς ΑΕ, προεκτείνωμεν τὴν ΓΔ κατὰ ΔΒ = ΓΔ καὶ φέρομεν τὴν ΑΒ. Τὸ τρ.ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

iii) *Ἀπόδειξις.* Λόγω τοῦ παραλληλογράμμου, εἶναι ΑΒ = ΓΕ = γ, δηλ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὴν δοθεῖσαν πλευράν γ, ἔχει προφανῶς καὶ τὴν β καὶ ἔχει καὶ διάμεσον ΑΔ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν μ, καθ' ὅσον $ΑΔ = \frac{ΑΕ}{2} = \frac{2μ}{2} = μ$.

iv) *Διερεύνησις.* Τὸ τρ.ΑΒΓ ὑπάρχει, ἂν ὑπάρχη τὸ τρ.ΑΕΓ. Ἡ κατασκευὴ τοῦ τελευταίου τούτου εἶναι δυνατὴ μόνον, ἂν

$$|\beta - \gamma| < 2\mu < \beta + \gamma \text{ (Συνθήκαι δυνατότητος).}$$

Σημείωσις. Αἱ κατάλληλοι γραμμαὶ κατὰ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος εἶναι ἡ προέκτασις ΔΕ = ΑΔ καὶ αἱ ΕΓ, ΕΒ, διότι δι' αὐτῶν δημιουργεῖται τὸ κατασκευάσιμον τρίγωνον ΑΓΕ.

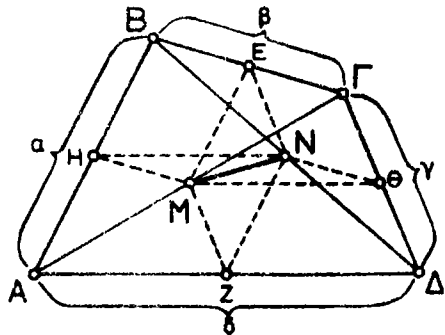
9. Νά κατασκευασθῆ τετράπλευρον, τοῦ ὁποῦ δίδονται τὰ μήκη τῶν τεσσάρων πλευρῶν καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν μέσων τῶν δύο διαγωνίων του.

i) *Ἀνάλυσις.* Ἐστω ὅτι τὸ ζητούμενον τετράπλευρον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ (σχ. 7).

Ἄν Μ καὶ Ν τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ, ἡ ΜΝ εἶναι κατὰ μέγεθος γνωστὴ. Ὅμοίως καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Ἐὰν τώρα τὸ μέσον Μ τῆς ΑΓ ἐνωθῆ μὲ τὸ μέσον Ε τῆς ΒΓ, ἡ ΜΕ εἶναι τὸ ἡμισυ τῆς ΑΒ καὶ ἐπομένως γνωστὴ.

Ὅμοίως ἡ ΝΕ = $\frac{1}{2}$ ΓΔ, ἄρα ἡ ΝΕ γνωστὴ. Ὡστε τὸ τρίγωνον ΜΕΝ εἶναι



Σχ. 7

κατασκευάσιμον. Ὅμοίως, ἂν Z τὸ μέσον τῆς AD , τὸ τρίγωνον MNZ εἶναι κατασκευάσιμον, διότι πάλιν γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευράς του:

$$MN, MZ = \frac{1}{2} \Gamma\Delta, \quad NZ = \frac{1}{2} AB.$$

Ἐπίσης, ἂν ἐνώσωμεν τὰ M καὶ N μὲ τὸ μέσον H τῆς BA , πάλιν προκύπτει κατασκευάσιμον τρίγωνον MHN , διότι $MH = \frac{1}{2} B\Gamma, NH = \frac{1}{2} A\Delta$.

Τέλος, ἂν Θ τὸ μέσον τῆς $\Gamma\Delta$, τότε τὸ τρίγωνον $M\Theta N$ ἔχει γνωστὰς πλευράς, ἄρα κατασκευάζεται.

Τῶν τεσσάρων τούτων τριγῶνων κατασκευασθέντων, εὐκόλως προκύπτει τὸ ζητούμενον τετράπλευρον. Διότι ἡ εὐθ $B\Gamma$ θὰ διέρχεται διὰ γνωστοῦ σημείου E καὶ θὰ εἶναι $//MH$ (τὴν ἐνόησαν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $AB, A\Gamma$).

Ὅμοίως ἡ $AB//ME$, ἡ $A\Delta//HN$ καὶ $\Gamma\Delta//NE$.

ii) *Σύνθεσις.* Λαμβάνομεν εὐθύγραμμον τμήμα MN ἴσον πρὸς τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν διαγωνίων καὶ ἐπ' αὐτοῦ ὡς βάσεως κατασκευάζομεν τρίγωνον MEN ἔχον τὰς δύο ἄλλας πλευράς ME καὶ NE ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς $\frac{\alpha}{2}$ καὶ $\frac{\gamma}{2}$ (ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ τὰ δοθέντα μῆκη τῶν πλευρῶν $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$). Κατόπιν φέροντες τὴν $NZ//ME$ καὶ $MZ//EN$ κατασκευάζομεν τὸ τρ. MNZ ἔχον πλευράς $MZ = EN = \frac{\gamma}{2}, NZ = EM = \frac{\alpha}{2}$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον κατασκευάζομεν τὰ τρίγωνα $MNH, MN\Theta$ ἔχοντα τὴν MH $N\Theta = \frac{\beta}{2}, NH = M\Theta = \frac{\delta}{2}$.

Τέλος φέρομεν ἐκ τοῦ E παράλληλον τῇ $N\Theta$, ἐκ τοῦ H παράλληλον τῇ ME , ἐκ τοῦ Z παράλληλον τῇ HN καὶ ἐκ τοῦ Θ παράλληλον τῇ EN .

Αἱ τέσσαρες αὐταὶ παράλληλοι σχηματίζουν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον.

iii) *Ἀπόδειξις.* Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου $HBEM$ ἔχομεν ὅτι:

$$HB = ME = \frac{\alpha}{2} \quad \text{καὶ ἐκ τοῦ } AHNZ, \text{ ὅτι } AH = NZ = \frac{\alpha}{2}.$$

Ὅστε $AB = HB + HA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$, δηλ. τὸ $AB\Gamma\Delta$ ἔχει τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν α . Ὅμοίως ἀποδεικνύομεν διὰ τῶν παραλληλογράμμων, ὅτι $B\Gamma = \beta, \Gamma\Delta = \gamma, \Delta A = \delta$. Μένει ἀκόμη ν' ἀποδείξωμεν ὅτι τὰ M καὶ N εἶναι τὰ μέσα τῶν διαγωνίων.

Πράγματι τὸ μέσον τῆς $A\Gamma$ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἄλλο ἀπὸ τὸ M , καθ' ὅσον $EM// = \frac{1}{2} BA$. Ὅμοίως τὸ N εἶναι τὸ μέσον τῆς $B\Delta$, διότι $EN// = \frac{1}{2} \Gamma\Delta$.

iv) *Διερεύνησις.* Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατόν, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάζωνται τὰ τρίγωνα EMN, HMN . Αἱ συνθήκαι δυνατότητος εἶναι:

$$\frac{|\alpha - \gamma|}{2} < MN < \frac{\alpha + \gamma}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{|\beta - \delta|}{2} < MN < \frac{\beta + \delta}{2}.$$

10. Δίδεται εὐθεῖα xy καὶ δύο σημεῖα A καὶ B ἐπὶ τοῦ ἐνὸς τῶν ἡμιεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ὀρίζει ἡ xy . Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ σημεῖον P τῆς xy τοιοῦτον, ὥστε :

$$\widehat{xPA} = \widehat{yPB}.$$

i) *Ανάλυσις*. Ἐστω P τὸ ζητούμενον σημεῖον (σχ. 8).

Ἐπειδὴ $\widehat{yPB} = \widehat{xPA}$, διὰ τοῦτο ἡ προέκτασις (P, Z) τῆς ἀκτίνος (P, B) (δηλ. τῆς ἡμιευθείας PB ἀρχομένης ἐκ τοῦ P καὶ περιεχούσης τὸ B) εἶναι συμμετρικὴ τῆς ἀκτίνος (P, A) ὡς πρὸς τὴν $\chi\psi$ καὶ περιέχει καὶ τὸ συμμετρικὸν A' τοῦ A. Ὡστε τὸ P κεῖται ἐπὶ τῆς γνωστῆς εὐθείας A'B.

ii) *Σύνθεσις*. Εὐρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν A' τοῦ A ὡς πρὸς τὴν $\chi\psi$ καὶ τὸ συνδέομεν μὲ τὸ B. Ἡ τομὴ τοῦ τμήματος A'B μετὰ τῆς $\chi\psi$ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον P.

iii) *Ἀπόδειξις*. Τὸ A' καὶ τὸ A κείνται ἐπὶ δύο ἀντιθετῶν ἡμιεπιπέδων ὡς πρὸς τὴν $\chi\psi$, ἄρα καὶ τὸ A' μὲ τὸ B. Διὰ τοῦτο τὸ τμήμα A'B τέμνει τὴν $\chi\psi$ εἰς σημεῖον P, μεταξὺ A' καὶ B. Ἔχομεν δέ: $\widehat{yPB} = \widehat{xPZ}$ (κατὰ κορυφὴν) καὶ $\widehat{xPZ} = \widehat{xPA}$ (συμμετρικαί), ἄρα $\widehat{xPA} = \widehat{yPB}$.

iv) *Διερεύνησις*. Ὡς προκύπτει ἐκ τῆς ἀποδείξεως, τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν.

11. Δοθεῖσιν εὐθείας $\chi\psi$ καὶ δύο σημείων A καὶ B πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν $\chi\psi$, ὁ συντομώτερος δρόμος ὁ ἄγων ἐκ τοῦ A εἰς τὸ B καὶ ἐγγίζων τὴν $\chi\psi$ εἶναι μία τεθλασμένη APB τοιαύτη, ὥστε :

$$\widehat{xPA} = \widehat{yPB}. \quad (P \in \chi\psi)$$

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον πρόβλημα γνωρίζομεν ὅτι τὸ P κεῖται ἐπὶ τοῦ τμήματος A'B (σχ. 8) καὶ ὅτι

$$(1) \quad PA + PB = A'B \quad (\text{διότι } PA = PA').$$

Ἐάν M εἶναι τυχόν ἄλλο σημεῖον τῆς $\chi\psi$, τότε, ἐπειδὴ MA = MA' (λόγῳ συμμετρίας), διὰ τοῦτο:

$$(2) \quad MA + MB = MA' + MB.$$

Τέλος ἐκ τοῦ τριγώνου A'MB εἶναι

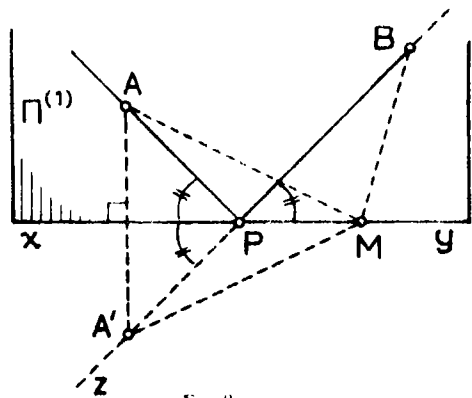
$$(3) \quad A'B < MA' + MB.$$

Βάσει τῶν (1) καὶ (2) ἢ (3) δίδει: $PA + PB < MA + MB$, ἤτοι ὁ δρόμος APB εἶναι συντομώτερος οἰουδήποτε ἄλλου δρόμου AMB τῆς αὐτῆς οἰκογενείας.

(Ἐὰν $M \in \chi\psi$, τότε $MA + MB = \text{minimum}$, ὅταν $\widehat{xMA} = \widehat{yMB}$).

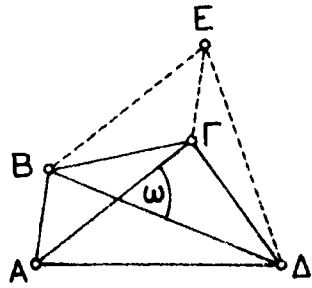
12. Μεταφορὰ τμήματος. Λέγομεν ὅτι τὸ τμήμα AB μεταφέρεται εἰς τὸ τμήμα KΛ, ὅταν $K\Lambda // AB$ καὶ $\angle AKB$ παρ/μον.

— Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ABΓΔ, οὗτινος δίδονται αἱ διαγώνιοι, δύο ἀπέναντι πλευραὶ AB, ΓΔ καὶ ἡ γωνία ω τῶν διαγώνιων ἢ περιέχουσα τὴν ΓΔ.



Σχ. 8

Ανάλυσις. Ἐάν χαράξωμεν τὸ τμήμα ΒΔ (σχ. 9), τότε μένει νὰ προσδιορισθοῦν τὰ Α καὶ Γ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τμήμα ΑΓ εἶναι τότε, ὄχι μόνον κατὰ μέγεθος, ἀλλὰ καὶ κατὰ διεύθυνσιν, γνωστὸν (λόγω τῆς δοθείσης γωνίας $\hat{\omega}$), διὰ τοῦτο τὸ μεταφέρομεν εἰς ΒΕ, δηλ. $BE \parallel = AG$, ὁπότε προκύπτουν κατασκευάσιμα τρίγωνα. Τὸ τρ. ΔΒΕ κατασκευάζεται ἐκ τῶν πλευρῶν ΒΔ καὶ ΒΕ (= ΑΓ) καὶ τῆς περιεχομένης γωνίας $\hat{EBD} = \omega$ καὶ τὸ $\Delta E \Gamma \Delta$ ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν: $E\Gamma = BA$, $\Gamma\Delta$ καὶ $E\Delta$ (γνωστὴ ἐκ τοῦ τρ. ΕΒΔ). Ἡ σύνθεσις καὶ ἀπόδειξις εἶναι εὐκόλοι.

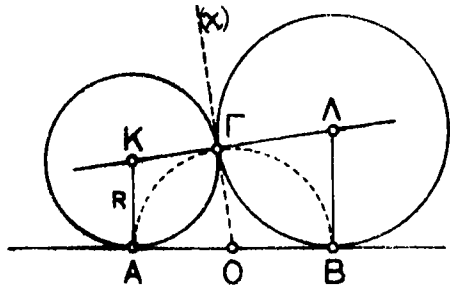


Σχ. 9

Διερεύνησις. Τὸ τρ. ΕΒΔ κατασκευάζεται πάντοτε. Τὸ σημεῖον Γ προσδιορίζεται, ἐφ' ὅσον $|\Gamma\Delta - GE| < EA \leq \Gamma\Delta + GE$ (ὅπου $GE = AB$). Ἐπειδὴ ἐν γένει τὸ Γ δύναται νὰ τοποθετηθῆ εἰς δύο θέσεις, συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὴν ΕΔ, διὰ τοῦτο τὸ πρόβλημα ἔχει δύο, τὸ πολὺ, λύσεις.

13. Δίδεται εὐθύγραμμον τμήμα ΑΒ καὶ περιφέρεια (Κ, R) ἑφαπτομένη τῆς εὐθ ΑΒ εἰς Α. Νὰ κατασκευασθῆ περιφέρεια ἑφαπτομένη τοῦ κύκλου (Κ, R) καὶ τῆς εὐθ ΑΒ εἰς Β.

Θὰ περιορισθῶμεν μόνον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τοῦ προβλήματος. Ἐστω (Λ, ΑΒ) ἡ ζητούμενη περιφέρεια καὶ Γ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῶν δύο περιφερειῶν. Ἐφ' ὅσον αἱ δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται εἰς Γ, θὰ ἔχουν καὶ μίαν κοινὴν ἑφαπτομένην (x) εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἐστω Ο τὸ σημεῖον τομῆς τῆς (x) μετὰ τοῦ ΑΒ. Τότε θὰ εἶναι: $OA = OG$ καὶ $OG = OB$ (ἐφαπτόμενα τμήματα ἐκ σημείου πρὸς περιφέρειαν). Ὡστε τὸ Ο εἶναι κέντρον περιφερείας διερχομένης διὰ τῶν Α, Γ, Β. Τὸ Γ λοιπὸν ὀρίζεται, ὡς τομὴ τῆς (Κ, R) καὶ τῆς μετὰ διάμετρον ΑΒ γραφομένης. Τὸ Λ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς εὐθ ΚΓ καὶ ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Β καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ.



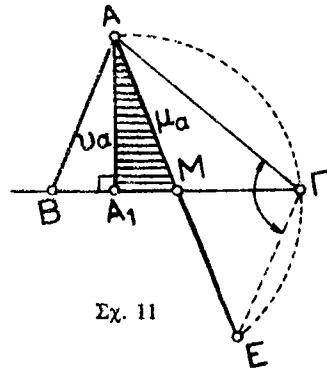
Σχ. 10

14. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς γωνίας \hat{A} , τοῦ ὕψους $AA_1 = u_a$ καὶ τῆς διαμέσου $AM = m_a$.

Ανάλυσις. (σχ. 11). Τὸ τρ. ΑΑ₁Μ κατασκευάζεται. Ἐὰς διπλασιάσωμεν τὴν διάμεσον: $AM = ME$. Ἐκ τοῦ σχηματιζομένου παρίμου ΑΓΕΒ συνάγεται ὅτι $\hat{AGE} = 2D - \hat{A}$ (*). Τὸ Γ βλέπει τὸ γνωστὸν τμήμα ΑΕ ὑπὸ γωνίαν γνωστήν, ἄρα κεῖται ἐπὶ τοῦ ξου χορδῆς ΑΕ καὶ ἰκανοῦ γωνίας $2D - \hat{A}$, ἐπίσης τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς γνωστῆς εὐθείας Α₁Μ, ἄρα προσδιορίζεται ὡς τομὴ τῶν δύο τούτων γραμμῶν.

(*) Διὰ τὸν συμβολισμόν τῆς ὀρθῆς γωνίας μεταχειρίζομεθα συνήθως τὸ σύμβολον $1D$, ἀλλ' ἐπίσης καὶ τὰ σύμβολα $1or\theta$ ἢ 90°

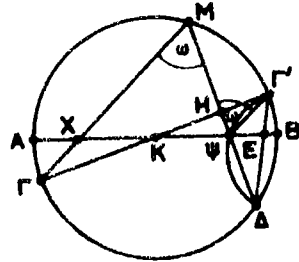
Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγ. AA_1M , προεκτείνομεν: $ME=MA$ καὶ γράφομεν ἐπὶ χορδῆς AE τόξον ἰκανὸν γωνίας $2^D - \hat{A}$, ἔστω εἰς τὸ ἡμιπέπεδον τὸ ὀριζόμενον ὑπὸ τῆς εὐθ AE καὶ μὴ περιέχον τὸ A_1 . Ἡ τομὴ τοῦ τόξου τούτου καὶ τῆς εὐθ A_1M εἶναι ἡ κορυφή Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου. Λαμβάνομεν καὶ τὸ συμμετρικὸν B τοῦ Γ ὡς πρὸς M καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον $AB\Gamma$.



Σχ. 11

Διερεύνησις. Πρέπει καὶ ἀρκεῖ $\alpha \leq \mu$.

15. Δίδεται περιφέρεια (K) , διάμετρος αὐτῆς AB καὶ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ ἐπὶ τῆς μῆς τῶν ἡμιπεριφερειῶν, τὰς ὁποίας ὀρίζει ἡ AB . Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῆ σημεῖον M ἐπὶ τῆς ἐτέρας ἡμιπεριφερείας τοιοῦτον, ὥστε αἱ εὐθῆσαι $M\Gamma$ καὶ $M\Delta$ νὰ τέμνουν τὴν AB εἰς δύο σημεῖα X καὶ Ψ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον K . (σχ. 12).

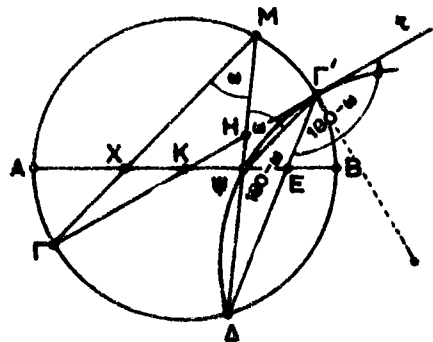


Σχ. 12

Ἀνάλυσις. Ἐστω $A\Gamma < A\Delta$. Ἐπειδὴ τὸ Ψ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ X ὡς πρὸς τὸ K , διὰ τοῦτο, ἂν Γ' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς K , ἡ εὐθ $\Psi\Gamma'$ εἶναι συμμετρικὴ τῆς εὐθ $X\Gamma$, αἱ δὲ ἡμιευθεῖαι (Ψ, Γ') καὶ (X, Γ) , καθὼς καὶ αἱ (Ψ, Γ') καὶ (M, Γ) παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι. Συνεπῶς αἱ γωνίαι $\hat{\Gamma'M\Psi}$ καὶ $\hat{M\Psi\Gamma'}$ εἶναι ἰσαι ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ τῶν παραλλήλων. Ἡ $\hat{\Gamma'M\Psi} \equiv \hat{\Gamma'M\Delta} = \omega$ εἶναι γνωστὴ κατὰ μέγεθος ὡς ἐγγεγραμμένη βαίνουσα ἐπὶ γνωστοῦ τόξου $\hat{\Gamma\Delta}$, ἄρα ἡ $\hat{\Gamma'\Psi\Delta} = 2^D - \omega$ ἐπίσης γνωστὴ. Ἐπομένως τὸ Ψ κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς $\Gamma'\Delta$ ἰκανοῦ γωνίας $2^D - \omega$ καὶ γραφομένου πρὸς τὸ μέρος τοῦ K . (Ἡ εὐθ $\Gamma\Gamma'$, τέμνουσα τὴν πλευρὰν $X\Psi$ καὶ μὴ τέμνουσα τὴν MX τοῦ τριγ $MX\Psi$, τέμνει τὴν πλευρὰν $M\Psi$ εἰς σημεῖον H (Pasch)(*)

Τὸ H ἀνήκον εἰς τὸ $M\Psi$, κεῖται ἐντὸς τοῦ ἡμικυκλίου AMB , ἐπομένως δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς ἀκτίνος $K\Gamma$, ἀλλ' ἐπὶ τῆς $K\Gamma'$. Ἡ εὐθ $M\Delta$, τέμνουσα τὴν πλευρὰν $K\Gamma'$ τοῦ τριγ. $K\Gamma'E$ καὶ μὴ τέμνουσα τὴν πλευρὰν $\Gamma'E$, τέμνει τὴν πλευρὰν \boxed{KE} . ἄρα τὸ Ψ κεῖται μεταξὺ K καὶ E .

Σύνθεσις. (σχ. 13). Γράφομεν τόξον μὲ χορδὴν $\Gamma'\Delta$ καὶ ἡμιεφαπτομένην $\Gamma'I$ (προέκτασιν τοῦ $\Gamma\Gamma'$). Τοῦτο εἶναι ἰκα-



Σχ. 13

(*) Ἄξιωμα τοῦ Pasch - «Ἐὰν εὐθεῖα κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τριγώνου ABI καὶ μὴ διερχομένη διὰ τινος κορυφῆς αὐτοῦ τέμνη μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου, τότε τέμνει μίαν καὶ μόνον μίαν ἐκ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν».

Πόρισμα. Εὐθεῖα τέμνουσα μίαν πλευρὰν τριγώνου καὶ μὴ τέμνουσα μίαν δευτέραν πλευρὰν αὐτοῦ τέμνει τὴν τρίτην πλευρὰν.

νόν γωνίας $\widehat{\Delta\Gamma\epsilon} = 180^\circ - \widehat{\Gamma\Gamma\Delta} = 180^\circ - \omega$ και τέμνει τὸ τμήμα ΚΕ εἰς σημεῖον Ψ.
Ἡ εὐθ ΔΨ ὀρίζει τὸ Μ.

Ἀπόδειξις. Ἐστω Χ ἡ τομὴ τῆς ΜΓ καὶ ΑΒ.

Ἐπειδὴ $\widehat{\Gamma\text{Μ}\Psi} = \widehat{\omega}$ καὶ $\widehat{\text{Μ}\Psi\Gamma'} = \widehat{\omega}$, διὰ τοῦτο αἱ εὐθεῖαι ΜΓ καὶ ΨΓ' εἶναι παράλληλοι καὶ μάλιστα συμμετρικαὶ ὡς πρὸς Κ, ἀφοῦ τὸ Γ' εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς Κ. Ἄρα τὰ Χ καὶ Ψ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Κ. (Ἡ εὐθ ΜΔ τέμνουσα τὴν πλευρὰν ΚΕ τοῦ τριγ ΚΓ'Ε καὶ μὴ τέμνουσα τὴν Γ'Ε, τέμνει τὴν ΚΓ' εἰς Η. Ἀφοῦ τὸ τμήμα ΓΓ' τέμνει τὴν εὐθ ΜΨ, τὰ Γ καὶ Γ' κείνται ἑκατέρωθεν τῆς ΜΨ, αἱ γωνίαι $\widehat{\Psi\text{Μ}\Gamma}$ καὶ $\widehat{\text{Μ}\Psi\Gamma'}$ κείνται ἑκατέρωθεν τῆς ΜΨ, ἄρα εἶναι ἐντὸς ἐναλλάξ τῶν ΜΓ καὶ ΨΓ' τεμονόμενων ὑπὸ τῆς ΜΨ).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ διαιρεθῆ δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα εἰς δύο μέρη, ὧν ἡ διαφορὰ νὰ ἴσῃται πρὸς ἄλλο δοθὲν τμήμα.
2. Νὰ εὐρεθῆ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ' σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε $MA + AG = MB + BG$.
3. Δοθεισῶν δύο γωνιῶν τριγώνου νὰ σχηματισθῆ ἡ τρίτη.
4. Νὰ κατασκευασθῆ παρίμῳ, οὐ δίδονται δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία.
5. Ὁμοίως παρίμῳ, οὐ δίδονται αἱ δύο διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία αὐτῶν
6. Ὁμοίως, ὅταν δίδεται μία πλευρά του καὶ αἱ δύο διαγώνιοι.
7. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὔτινος μία πλευρά εἶναι 5 cm, ἡ ἀπέναντι ταύτης γωνία 75° καὶ μία ἄλλη γωνία του $22^\circ, 5$.
8. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα σχηματίζουσα μετὰ δύο ἄλλων τεμονόμενων εὐθειῶν τρίγωνον ἰσοσκελές.
9. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον ΑΒΓ, οὔτινος ἡ ΒΓ = 7 cm, ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἡ περιέχουσα τὴν ΒΓ νὰ εἶναι 120° , ἡ δὲ γωνία τῆς διχοτόμου καὶ τοῦ ὕψους τῶν ἀγομένων ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α νὰ εἶναι 15° .
10. Διὰ δύο δεδομένων σημείων Α, Β νὰ ἀχθοῦν δύο εὐθεῖαι τοιαῦται, ὥστε μετὰ τρίτης δοθείσης νὰ σχηματίζουσαν ἰσόπλευρον τρίγωνον.
11. Νὰ κατασκευασθῆ τετράγωνον, οὔτινος δίδεται τὸ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαγωνίου.
12. Νὰ κατασκευασθῆ τετράγωνον, οὔτινος δίδεται ἡ διαφορὰ τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαγωνίου.
13. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὔτινος δίδεται μία πλευρά καὶ δύο ὕψη, ἐξ ὧν τὸ ἕν ἄγεται ἐπὶ τὴν δοθείσαν πλευρὰν.
14. Δοθέντων τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας νὰ ἀχθῆ διὰ τοῦ ἐνός ἐξ αὐτῶν εὐθεῖα ἀπέχουσα ἰσάκως ἀπὸ τὰ δύο ἄλλα.
15. Εἰς δοθὲν τετράγωνον νὰ ἐγγραφῆ τετράγωνον ἔχον μίαν κορυφὴν εἰς τυχὸν δοθὲν σημεῖον τῆς περιμέτρου τοῦ πρώτου.
16. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὔτινος δίδεται ἡ βᾶσις, μία τῶν παρ' αὐτὴν γωνιῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.
17. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὔτινος δίδεται ἡ περίμετρος καὶ αἱ γωνίαι.
18. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ δίδεται σημεῖον Δ. Νὰ εὐρεθῆ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε ἡ ΔΕ νὰ διχοτομηθῆται ὑπὸ τῆς ΑΓ.

19. Νά κατασκευασθῆ παρίμνον, οὔτινος δίδεται μία πλευρά α καὶ τὰ δύο ὕψη $υ_1$ καὶ $υ_2$.
20. Νά κατασκευασθῆ τραπέζιον, οὐ δίδονται αἱ τέσσαρες πλευραί.
21. Νά κατασκευασθῆ τραπέζιον, οὐ δίδονται αἱ βάσεις καὶ αἱ διαγώνιοι.
22. Νά κατασκευασθῆ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὔτινος ἡ βάση καὶ κείται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας, αἱ ἴσαι πλευραὶ τοῦ ἢ αἱ προεκτάσεις των νὰ διέρχωνται διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ τὸ ἐπὶ τὴν βάση ὕψος νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμήμα (βλ. § 10).
23. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὔτινος δίδονται αἱ τρεῖς διαμέσοι (βλ. §8).
24. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὔτινος δίδεται ἡ πλευρὰ α, ἡ ἀπέναντι γωνία \hat{A} καὶ τὸ ὕψος τὸ ἀγόμενον ἐπὶ μίαν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.
25. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον ἐκ τῆς βάσεως, μιᾶς τῶν προσκειμένων αὐτῇ γωνιῶν καὶ τοῦ ὕψους τοῦ ἀγομένου ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς δοθείσης γωνίας.
26. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὔτινος δίδεται ἡ περιμέτρος, μία γωνία καὶ τὸ ὕψος τὸ ἀγόμενον ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας.
27. Νά κατασκευασθῆ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὔτινος δίδονται τὰ ὕψη.
28. Νά ἀχθῆ εὐθεῖα ἀποτέμουσα ἀπὸ δύο κύκλους χορδὰς ἐχούσας δεδομένα μῆκη.
29. Νά ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι κύκλου παράλληλοι πρὸς δοθείσαν εὐθεῖαν.
30. Νά κατασκευασθῆ παρίμνον ἔχον δύο διαδοχικὰς κορυφὰς δεδομένας καὶ τὰς δύο ἄλλας κειμένας ἐπὶ δοθείσης περιφερείας.
31. Νά κατασκευασθῆ παρίμνον ἔχον δύο ἀπέναντι κορυφὰς δεδομένας καὶ τὰς δύο ἄλλας κειμένας ἐπὶ δοθείσης περιφερείας.
32. Νά γραφῆ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δεδομένων σημείων καὶ τέμνουσα δοθείσαν περιφέρειαν οὕτως, ὥστε ἡ κοινὴ χορδὴ νὰ εἶναι παράλληλος δοθείση εὐθεῖα.
33. Δοθέντων δύο ἴσων κύκλων (K, R), (Λ, R) ἐκτὸς ἀλλήλων, νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα // ΚΛ, τέμνουσα κατὰ σειράν τὰς περιφερείας εἰς Α, Β, Γ, Δ οὕτως, ὥστε $AB = BG = \Gamma\Delta$.
34. Δοθείσης περιφερείας (K, R) καὶ σημείου Λ ζητεῖται νὰ γραφῆ μὲ κέντρον τὸ Λ περιφέρεια τοιαύτη, ὥστε τὸ μῆκος τῆς κοινῆς ἐξωτερικῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς καὶ τῆς (K, R) νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος l.
35. Ἐστω AB χορδὴ περιφερείας (K, R). Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῆ χορδὴ κάθετος ἐπὶ τὴν AB καὶ διαιρουμένη ὑπὸ τῆς AB εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἓν εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου.
36. Δίδεται ταινία καὶ δύο σημεῖα O καὶ A μὴ κείμενα ἐπὶ τῶν παρίλων τῶν ὀριζουσῶν τὴν ταινίαν. Ζητεῖται νὰ ἀχθῆ διὰ τοῦ O εὐθεῖα τέμνουσα τὰς παρίλους εἰς M καὶ N οὕτως, ὥστε: $AM = AN$.
- Μεταφορά.**
37. Δοθέντος τριγώνου ABΓ νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα παράλληλος τῇ βάσει ΒΓ καὶ τέμνουσα τὰς AB καὶ ΑΓ εἰς M καὶ N οὕτως, ὥστε $AM = \Gamma N$.
(Ἐποδ.: Ἐὰν μεταφέρωμεν (§ 12) τὸ ΝΓ εἰς ΜΔ, τὸ Δ, (ἐπὶ τῆς ΒΓ), προσδιορίζεται).
38. Δίδεται τρίγωνον ABΓ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῆ τμήμα ἴσον πρὸς δοθὲν καὶ περνούμενον ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα M καὶ N τοιαῦτα, ὥστε $AM = \Gamma N$.
(Ἐποδ.: Ἐὰν μεταφέρωμεν τὸ ΝΓ εἰς ΜΔ, τὸ Δ προσδιορίζεται).
39. Νά κατασκευασθῆ τετράπλευρον, οὔτινος δίδονται τὰ μῆκη τῶν τεσσάρων πλευρῶν καὶ ἡ γωνία, τὴν ὅποιαν σχηματίζουν δύο ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ προεκτεινόμεναι
40. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῆ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ABΓ, οὔτινος ἡ βάση ΒΓ νὰ κείται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας xy καὶ νὰ ἔχη δεδομένον μῆκος, ἐνῶ αἱ ἴσαι πλευραὶ τοῦ AB, ΑΓ νὰ διέρχωνται διὰ δύο δεδομένων σημείων Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως, κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς xy.

(Υποδ.: Ἐν μεταφέρωμεν τὸ ΒΓ εἰς ΔΟ, ἡ εὐρεσις τοῦ Γ ἀνάγεται εἰς §10).

Συμμετρία.

41. Δοθεισῶν τριῶν εὐθειῶν (α), (β), (γ) νὰ εὐρεθῇ ἓν σημεῖον Α ἐπὶ τῆς (α) καὶ ἓν σημεῖον Β ἐπὶ τῆς (β) οὕτως, ὥστε ἡ (γ) νὰ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ.

42. Δίδονται δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι καὶ ἓν σημεῖον Μ, ἐπὶ οὐδεμιᾶς τούτων κείμενον. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Μ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ μεταξὺ τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέρος νὰ διχοτομηθῆται ὑπὸ τοῦ Μ.

43. Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα ἔχον δοθὲν μέσον, τὰ δὲ ἄκρα του ἐπὶ δοθείσης εὐθείας τὸ ἄλλο.

44. i) Κατασκευάσατε τὸ συμμετρικὸν περιφερείας ὡς πρὸς δοθὲν κέντρον συμμετρίας. ii) Νὰ κατασκευασθῇ τμήμα ἔχον δοθὲν μέσον, τὰ δὲ ἄκρα του ἐπὶ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.

45. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὐτινος δίδεται ἡ εὐθεῖα, ἐφ' ἧς κεῖται ἡ βάση του, ἡ εὐθεῖα, ἐφ' ἧς κεῖται ἡ διχοτόμος τῆς ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνίας καὶ δύο σημεῖα, δι' ὧν διέρχονται ἐκάστη ἐκ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν (ἓν ἀνάγκη προεκτεινομένη).

46. i) Κατασκευάσατε τὸ συμμετρικὸν περιφερείας ὡς πρὸς δοθέντα ἄξονα συμμετρίας. ii) Δίδεται ἡ εὐθεῖα χγ καὶ δύο περιφέρειαι κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν. Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς χγ σημεῖον Ρ τοιοῦτον, ὥστε ἂν ἀχθοῦν ἐκ τοῦ Ρ δύο εὐθεῖαι ΡΖ, ΡΤ ἐφαπτόμεναι ἀντιστοίχως τῶν δύο περιφερειῶν, νὰ εἶναι: $\widehat{XPZ} = \widehat{YPT}$.

47. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἄνισον ἀπέχοντα ἀπὸ ταύτης. Ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς (ε) τὸ σημεῖον ἐκεῖνο Μ, διὰ τὸ ὅποῖον ἡ $|MA - MB|$ εἶναι ἡ μέγιστη δυνατή.

48. Ἐντὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδεται σημεῖον Ε. Ζητεῖται ποῖον δρόμον πρέπει νὰ ἀκολουθήσῃ ὕλικὸν σημεῖον, τὸ ὅποῖον, ἀφοῦ ἐκσφενδονισθῇ ἐκ τοῦ Ε καὶ ἀνακλασθῇ ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου (κατὰ τοὺς νόμους τῆς ἀνακλάσεως τοῦ φωτός), νὰ διέλθῃ πάλιν διὰ τοῦ Ε.

Διάφορα ἄλλα προβλήματα κατασκευῶν.

49. i) Γνωρίζοντες τὴν \widehat{A} καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὑψῶν $u_\beta + u_\gamma = c$ τριγώνου ΑΒΓ, κατασκευάσατε τὸ ἄθροισμα $\beta + \gamma$.

ii) Ἐκ τῆς \widehat{A} καὶ τῆς διαφορᾶς $u_\gamma - u_\beta = c$ δεῖξατε ὅτι δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἡ διαφορὰ $\beta - \gamma$.

iii) Ἐκ τῶν $\beta + \gamma$ καὶ $u_\beta + u_\gamma$ κατασκευάσατε τὴν \widehat{A} .

iv) Ἐκ τῶν $u_\gamma - u_\beta$ καὶ $\beta - \gamma$ δεῖξατε ὅτι ὀρίζεται ἡ \widehat{A} .

50. Δίδεται ὀξεῖα γωνία \widehat{OxOy} , ἡ διχοτόμος αὐτῆς Οτ, σημεῖον Α ἐντὸς τῆς \widehat{Ox} καὶ σημεῖον Β ἐντὸς τῆς \widehat{Oy} . Ἐστῶσαν Α' καὶ Β' τὰ συμμετρικὰ τῶν Α καὶ Β ὡς πρὸς τὰς εὐθείας Οx, Οy ἀντιστοίχως. Νὰ δευχθῇ ὅτι τὸ τμήμα Α'Β' τέμνει τὰς ἡμιευθείας Οx, Οy εἰς σημεῖα Γ_ο καὶ Δ_ο ἀντιστοίχως καὶ ὅτι ὁ δρόμος ΑΓ_οΔ_οΒ εἶναι συντομώτερος παντὸς ἄλλου ΑΓΔΒ, ὅπου ΓΕΟx καὶ ΔΕΟy.

51. Νὰ κατασκευασθῇ παρίμον, τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ μέσα τριῶν πλευρῶν.

52. Νὰ κατασκευασθῇ παρίμον, οὐτινος δίδονται τὰ δύο ὕψη καὶ μία διαγώνιος.

53. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, ὅταν δίδονται αἱ μεσοκάθετοι δύο πλευρῶν του καὶ τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς.

54. Ἐντὸς δοθέντος ἰσοπλευροῦ τριγώνου νὰ ἐγγραφῆ ἄλλο οὕτως, ὥστε τὰ δύο τρίγωνα νὰ ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν.

55. Ἐπὶ τοῦ ὕψους AH ὀξυγωνίου τριγ $AB\Gamma$ νὰ εὑρεθῆ σημεῖον P τοιοῦτον, ὥστε $\widehat{APB} = \widehat{B\Gamma P}$.

56. Νὰ κατασκευασθῆ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, οὗτινος δίδονται τὰ μήκη τῶν $B\Gamma$ (ὑποτείνουσας) καὶ BA , ὅπου Δ ἡ τομὴ τῆς AB μετὰ τῆς διχοτόμου τῆς ὀξείας γωνίας $\widehat{\Gamma}$.

57. Νὰ κατασκευασθῆ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος δίδονται οἱ πόδες B', Γ' τῶν ἰσῶν ὕψων καὶ ἓν σημεῖον Σ τῆς βάσεως.

58. Νὰ κατασκευασθῆ τριγ $AB\Gamma$, οὗτινος δίδεται τὸ ἔγκεντρον O καὶ οἱ πόδες B', Γ' τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\widehat{B}, \widehat{\Gamma}$.

59. Νὰ κατασκευασθῆ τετράπλευρον ἔχον τρεῖς πλευράς ἴσας, ὅταν δίδονται τὰ μέσα τῶν τριῶν ἰσῶν πλευρῶν.

60. Νὰ κατασκευασθῆ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ὅταν δίδεται τὸ μέσον τῆς βάσεώς του, ἡ κορυφή καὶ τὸ ὀρθόκεντρον.

61. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον ἐκ τῶν στοιχείων $\mu\alpha, \upsilon\beta, \upsilon\gamma$.

62. Νὰ κατασκευασθῆ τετράγωνον, οὗτινος γνωρίζομεν δύο σημεῖα Π καὶ K κείμενα ἐπὶ τῶν φορέων τῶν δύο διαγωνίων του καὶ δύο σημεῖα E καὶ Z κείμενα ἐπὶ τῶν φορέων δύο ἀπέναντι πλευρῶν του.

16. Μεταφορὰ σχήματος κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$. α') Ἐὰν

δοθῆ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἓν σχῆμα F καὶ ἓν ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\delta}$ καὶ ἀπὸ κάθε σημεῖον M τοῦ F φέρωμεν διάνυσμα $\vec{MM'} = \vec{\delta}$, τότε τὰ πέρατα M' τῶν διανυσμάτων τούτων ἀποτελοῦν ἓν νέον σχῆμα (σημειοσύνολον) F' , τὸ ὅποσον λέγομεν ὅτι προκύπτει ἐκ τοῦ σχήματος F διὰ μεταφορᾶς κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$. Τὸ σχῆμα F' λέγεται καὶ «μετεσχηματισμένον τοῦ F διὰ μεταφορᾶς κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$ », τὰ δὲ σημεῖα M' τοῦ F' λέγονται καὶ «εἰκόνες» τῶν ἀντιστοιχῶν σημείων τοῦ σχήματος F .

β') Ἀπὸ τὰ ἀξιώματα κινήσεως (ἢ μετατοπίσεως) τοῦ χώρου προκύπτει ὅτι ὑπάρχει μία κίνησις H μεταφέρουσα ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$. Ἡ κίνησις αὕτη H (καλουμένη «μεταφορὰ») φέρει κατὰ συνέπειαν τὸ σχῆμα F εἰς τὸ F' , ἄρα τὰ σχήματα F καὶ F' προκύπτοντα τὸ ἓν ἐκ τοῦ ἄλλου διὰ κινήσεως εἶναι ἴσα. Ὡστε διὰ τῆς μεταφορᾶς σχήματος κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$ προκύπτει σχῆμα ἴσον.

γ') Εἶναι φανερόν ὅτι διὰ τῆς μεταφορᾶς εὐθείας κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$ προκύπτει εὐθεῖα παράλληλος καὶ διὰ τῆς μεταφορᾶς ἡμιευθείας προκύπτει ἡμιευθεῖα ὁμόρροπος πρὸς τὴν ἀρχικὴν.

δ') (Θ) — Ἐάν ὁ ἄξων συμμετρίας (ε) μεταφερθῆ κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$ κάθετον ἐπ' αὐτόν, τότε τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς οἰουδήποτε σημείου ὑφίσταται μεταφορὰν κατὰ διάνυσμα $2\vec{\delta}$.

Ἐστῶσαν A' καὶ A'' τὰ συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου A ὡς πρὸς δύο παραλλήλους εὐθείας (ε) καὶ (ε').

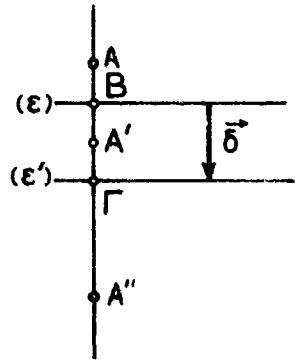
Ἀναφερόμενοι εἰς τὸ σχ. 14 καὶ θεωροῦντες τὰ σημεῖα A, B, A', Γ, A'' ἐπὶ ἄξονος, βλέπομεν ὅτι (Θεώρημα Chasles)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'A''} &= \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{2BA} + \overrightarrow{2A\Gamma} = \\ &= 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Gamma}) = \overrightarrow{2B\Gamma} \end{aligned}$$

$$\text{ἄρα καὶ } \overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{2B\Gamma} = 2\vec{\delta}.$$

ε') Ἐπομένως καὶ τὸ συμμετρικὸν ἡμιευθείας μεταφέρεται εἰς ἡμιευθεῖαν

παρῆλον καὶ ὁμόροπον, ὅταν ὁ ἄξων συμμετρίας μεταφερθῆ κατὰ $\vec{\delta}$.



Σχ. 14

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 63. Νὰ γραφῆ τμήμα ἴσον καὶ παρῆλον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.
- 64. Εὑρετε τὸ μετεσχηματισμένον περιφερείας (K, R) διὰ μεταφορὰς κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$.
- 65. Νὰ κατασκευασθῆ τμήμα ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ δοθείσης εὐθείας καὶ δοθείσης περιφερείας.
- 66. Νὰ γραφῆ τμήμα παρῆλον καὶ ἴσον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.
- 67. Νὰ κατασκευασθῆ τετράπλευρον, οὗτινος δίδονται τρεῖς πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν προσκείμεναι εἰς τὴν τετάρτην πλευράν.
- 68. Δοθεισῶν δύο περιφερειῶν καὶ εὐθείας (ε) ζητεῖται νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα ||(ε) καὶ ἀπόκοπτος ἴσας χορδὰς ἀπὸ τὰς δύο περιφερειῶν.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

17. Γεωμετρικὸς τόπος.—α') Καλεῖται «γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἔχόντων μίαν δεδομένην ιδιότητα (A)» (ἢ πληροῦντων μίαν συνθήκην (A)) τὸ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν σημείων τῶν ἔχόντων τὴν δεδομένην ιδιότητα (A).

Κατὰ κανόνα ὑπάρχουν ἄπειρα τὸ πλῆθος σημεία κατέχοντα τὴν ιδιότητα (A) καὶ ταῦτα συνιστοῦν σχήμα τι E, τὸ ὅποιον εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τῶν τόπος. (Συντόμως γ.τ. ἢ «τόπος»).

β') Συνθήκαι, ἵνα ἔν δεδομένον σχῆμα F εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ἐχόντων δεδομένην τινὰ ιδιότητα (A). Ἐστω E τὸ σύνολον τῶν σημείων τῶν ἐχόντων τὴν ιδιότητα (A) (δηλαδή ὁ γ.τ. ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς τὴν ιδιότητα (A)) καὶ ἔστω F ἔν δοθὲν σχῆμα, τὸ ὅποιον θέλομεν νὰ ἐξακριβώσωμεν, ἂν εἶναι ὁ γ.τ. E . Διὰ νὰ συμβαίη τοῦτο, πρέπει τὸ σχῆμα F , θεωρούμενον ὡς σημειοσύνολον, νὰ ταυτίζεται μὲ τὸ σημειοσύνολον E . Ἄλλὰ δύο σύνολα F καὶ E ταυτίζονται, ὅταν συγχρόνως :

$$F \subseteq E \wedge E \subseteq F.$$

Ταῦτα σημαίνουν κατὰ σειρὰν ὅτι :

(1) $F \subseteq E$: πᾶν σημεῖον τοῦ F ἔχει τὴν ιδιότητα (A).

(2) $E \subseteq F$: πᾶν σημεῖον ἔχον τὴν ιδιότητα (A) ἀνήκει εἰς τὸ F .

Ἄν αἱ (1) καὶ (2) πληροῦνται, τότε : $F \equiv E$.

— Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ δεῖξωμεν ὅτι τὸ F εἶναι ὁ γ.τ. τῶν σημείων τῶν ἐχόντων τὴν ιδιότητα (A), ἂν δεῖξωμεν ὅτι :

1ον) πᾶν σημεῖον τοῦ F ἔχει τὴν ιδιότητα A καὶ

2ον) πᾶν σημεῖον μὴ ἀνήκον εἰς τὸ F δὲν ἔχει τὴν ιδιότητα (A).

Διότι τὸ 1ον) ἐξασφαλίζει ὅτι $F \subseteq E$ καὶ τοῦτο συνεπάγεται :

(3) $F' \supseteq E'$

ὅπου F', E' τὰ συμπληρωματικὰ τῶν F, E ὡς πρὸς τὸ ὅλον ἐπίπεδον.

Τὸ 2ον) σημαίνει :

(4) $F' \subseteq E'$

Ἐκ τῶν (3) \wedge (4) $\Rightarrow F' \equiv E' \Rightarrow F \equiv E$.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

18. i) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων M τῶν ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεία A καὶ B εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος AB .

Ἄρκει νὰ δεῖξωμεν ὅτι πᾶν σημεῖον M τῆς μεσοκαθέτου ἔχει τὴν ιδιότητα : $MA = MB$ καὶ ὅτι πᾶν σημεῖον P ἔχον τὴν ιδιότητα $PA = PB$ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου. Ἄλλὰ ταῦτα ὡς γνωστὸν συμβαίνουν.

ii) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων M τοιούτων, ὥστε $MA > MB$, ὅπου A, B δύο δεδομένα σημεία, εἶναι τὸ ἡμιεπίπεδον τὸ ὑπὸ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ AB ὀριζόμενον καὶ περιέχον τὸ B .

iii) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων τῶν κειμένων ἐντὸς δοθείσης γωνίας καὶ ἰσαπεχόντων ἀπὸ τὰς πλευρὰς εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας.

iv) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων τῶν ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας εἶναι ζεῦγος εὐθειῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας, ἕς σχηματίζουν αἱ τεμνόμενα εὐθεῖαι.

v) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων δεδομένην ἀπόστασιν d ἀπὸ δοθείσης εὐθείας (ϵ) εἶναι τὸ ζεῦγος τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν (ϵ), ὧν ἑκάστη ἀπέχει τῆς (ϵ) ἀπόστασιν d .

vi) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων δεδομένην ἀπόστασιν d ἀπὸ σταθεροῦ σημείου K εἶναι περιφέρεια (K, d).

vii) Ὁ γ.τ. τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθὲν τμήμα AB φαίνεται ὑπὸ γωνίαν ὀρθήν, εἶναι ἡ περιφέρεια διαμέτρου AB , ἀφ' ἧς ἐξαιροῦνται τὰ A καὶ B (§ 6).

19. Εὗρεσις γεωμετρικῶν τόπων. Ἡ στοιχειώδης μέθοδος εὐρέσεως ἑνὸς γεωμετρικοῦ τόπου συνίσταται εἰς τὴν ἀναγωγὴν τοῦ ζητουμένου τόπου εἰς ἄλλον γνωστὸν. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν (ἢ κατασκευάζομεν) **τυχὸν** σημεῖον M τοῦ ζητουμένου γ.τ., δηλ. ἔχον τὴν ὀρισμένην ἰδιότητα (A) καὶ ἀναζητοῦμεν μίαν συνέπειαν τῆς ἰδιότητος (A), δηλ. μίαν **νέαν ἰδιότητα** τοῦ σημείου M , ἔστω τὴν (B), ἢ ὁποῖα προέρχεται διὰ καταλλήλου χρησιμοποίησεως τῆς ἰδιότητος (A). Διὰ τὴν B προχωρήσωμεν ἐκ τῆς (A) εἰς τὴν (B), συνδέομεν συνήθως τὸ σημεῖον M μὲ **κατάλληλον σταθερὸν σημεῖον ἢ σταθερὰ σημεῖα** ἢ φέρομεν ἄλλας καταλλήλους γραμμὰς οὕτως, ὥστε νὰ ἀξιοποιηθῇ ἡ ἰδιότης (A), δηλ. νὰ δώσῃ μίαν συνέπειαν (B). Πολυάκις ἡ ἰδιότης (B) ἔχει γνωστὸν γεωμετρικὸν τόπον (γ). Ἐὰν τοῦτο συμβαίῃ, τότε **κάθε** σημεῖον M τοῦ τόπου, ὡς ἔχον τὴν ἰδιότητα (A), θὰ ἔχη καὶ τὴν συνέπειαν αὐτῆς (B) καὶ ἐπομένως θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόπου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν (B), δηλ. ἐπὶ γνωστῆς γραμμῆς (ἢ σχήματος) (γ). Οὕτω εὐρίσκομεν σταθερὸν σχῆμα (γ), ἐφ' οὗ κεῖνται ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόπου, καὶ μένει νὰ ἐξετάσωμεν βάσει τῆς ἰδιότητος (A), εἰς ποίαν περιοχὴν τοῦ (γ) εὐρίσκονται τὰ σημεῖα τοῦ ζητουμένου τόπου καὶ ἂν καὶ πᾶν σημεῖον τῆς περιοχῆς ταύτης ἔχη τὴν ἰδιότητα (A).

Μία ἀπὸ τὰς δυσκολίας τῆς μεθόδου ἐγκεῖται εἰς τὴν ἀνεύρεσιν τῶν **σταθερῶν** σημείων, πρὸς τὰ ὁποῖα συσχετίζομεν τὸ τυχὸν (ἢ «τρέχον») σημεῖον M τοῦ τόπου (μὲ τὸν σκοπὸν τὴν ἀνακάλυψιν μιᾶς νέας ἰδιότητος (B) ἀπορροῦσης ἐκ τῆς (A)). Ὡς σταθερὰ σημεῖα ἐκλέγομεν πολλάκις δύο **ἀκρατὰ** σημεῖα τοῦ ζητουμένου τόπου ἢ καὶ σταθερὸν σημεῖον μὴ ἀνήκον εἰς τὸν τόπον, τὸ ὁποῖον ὅμως, ἂν συνδεθῇ μὲ τὸ τρέχον σημεῖον M , δίδει τὴν δυνατότητα νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ἰδιότης (A) τοῦ M , ὥστε νὰ προκύψῃ νέα ἰδιότης (B) τοῦ M .

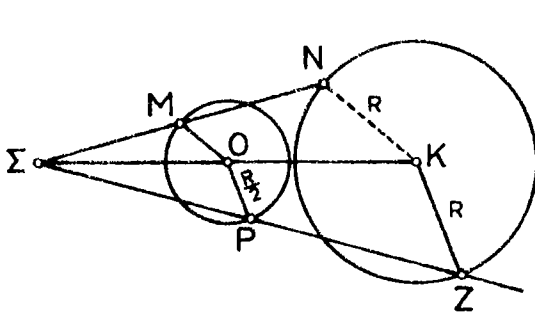
Εἰς τὴν ἀκριβεστέραν εὐρεσιν γεωμετρικῶν τόπων βοηθοῦν οὐσιωδῶς οἱ σημειακοὶ μετασχηματισμοὶ καὶ αἱ διευθυνόμεναι γωνίαι, περὶ ὧν γίνεται λόγος εἰς τὸ τρίτον μέρος τοῦ βιβλίου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ I. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γ.τ. (ἢ σύνολον) τῶν μέσων ὄλων τῶν τμημάτων, τῶν ὁποίων τὸ ἓν ἄκρον εἶναι σταθερὸν σημεῖον S , τὸ δὲ ἄλλο εὐρίσκεται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας (K, R).

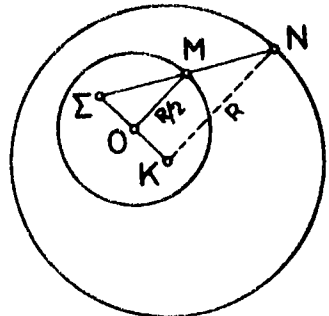
i) Ἐστω M σημεῖον τοῦ τόπου, δηλ. τὸ μέσον κάποιου τμήματος SN ἔχοντος τὸ ἄκρον N ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας (K, R) (σχ. 15 ἢ 15(α)).

ii) Ἐπειδὴ τὸ NE (K, R), εἶναι $KN = R$ καὶ ἐπειδὴ τὸ M εἶναι μέσον πλευρᾶς τριγώνου SNK , ἄς τὸ ἐνώσωμεν μὲ τὸ μέσον O τῆς σταθερᾶς πλευρᾶς SK τοῦ τριγώνου.

Τότε θα είναι $MO = NK/2$, ήτοι $MO = R/2 =$ σταθερά απόστασις και επομένως το κάθε σημείον M του ζητουμένου τόπου κείται επί της σταθεράς περιφέρειας $(O, \frac{R}{2})$. (Τά επί της ευθΣΚ κείμενα δύο σημεία του τόπου ανήκουν επίσης εις την $(O, R/2)$).



Σχ. 15



Σχ. 15(α)

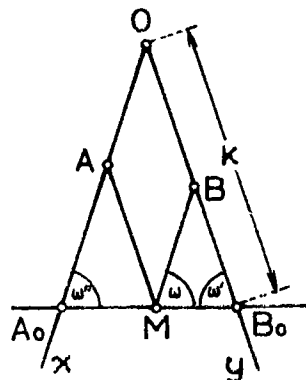
Ἀντίστροφον. Ἐστω P σημείον τῆς $(O, \frac{R}{2})$. Τότε εἶναι $OP = R/2$. Ἄν τώρα φέρωμεν ἀκτίνα KZ τῆς (K, R) παράλληλον καὶ ὁμόροπον τῆς OP , θά εἶναι: $\vec{OP} = \frac{1}{2} \vec{KZ}$. Ἐπομένως τὸ P εἶναι κατ' ἀνάγκην τὸ μέσον τοῦ ΣZ , δηλ. μέσον τμήματος ἔχοντος ἄκρα τὸ Σ καὶ σημείον Z τῆς (K, R) . Δηλ. τὸ P εἶναι σημείον τοῦ τόπου.

Συμπέρασμα. Ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ μέσον O τοῦ ΣK καὶ ἀκτίνα $R/2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ II. Ἐπί τῶν πλευρῶν Ox, Oy γωνίας \widehat{xOy} θεωροῦμεν ζεῦγος σημείων A καὶ B ($A \in Ox$ καὶ $B \in Oy$) τοιοῦτον, ὥστε $OA + OB = K =$ δοθὲν τμήμα καὶ κατασκευάζομεν παρ/μον $OAMB$. Ζητεῖται ὁ γ.τ. (τὸ σύνολον) τῶν κορυφῶν M τῶν παρ/μιων τούτων.

i) Ἐστω M σημείον τοῦ τόπου, δηλ. ἡ τετάρτη κορυφή παρ/μου $OAMB$ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τυχὸν ζεῦγος σημείων A, B μὲ $OA + OB = K$.

ii) Ἄκρικόν σημείον. Ἐὰν τὸ A πέσῃ ἐπὶ τοῦ O , δηλ. τὸ OA μηδενισθῇ, τότε πρέπει τὸ B νὰ ἔλθῃ εἰς σημείον B_0 τῆς Oy τοιοῦτον, ὥστε $OB_0 = K$. Ἄς ἐνώσωμεν τὸ τυχὸν σημείον M τοῦ τόπου μὲ τὸ ἄκρικόν σημείον B_0 καὶ ἄς προεκτείνωμεν τὸ B_0M , μέχρις ὅτου τμήση τὴν Ox , ἔστω εἰς A_0 .



Σχ. 16

Παρατηροῦμεν ὅτι $BB_0 = OA$ (διότι $OA + OB = K$ καὶ $BB_0 + OB = K$).

Ἐπειδὴ $BB_0 = OA$ καὶ $OA = BM \Rightarrow BM = BB_0 \Rightarrow \omega = \omega'$ (1).

Ἐπειδὴ $MB//A_0O \Rightarrow \omega = \omega' (2)$.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2): $\Rightarrow \omega' = \omega \Rightarrow OA_0 = OB_0 = K$.

Βλέπομεν ὅτι πᾶν σημεῖον M τοῦ τόπου κεῖται ἐπὶ τῆς βάσεως σταθεροῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου OA_0B_0 μὲ ἴσας πλευρὰς $OA_0 = OB_0 = K$.

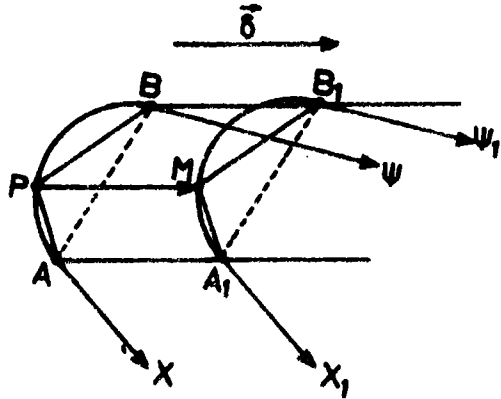
Ἀντίστροφον. Ἐστω M τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως A_0B_0 τοῦ σταθεροῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου OA_0B_0 μὲ $OA_0 = OB_0 = K$ (σχ. 16).

Φέροντες τὰς $MA//O\gamma$ καὶ $MB//O\chi$ σχηματίζομεν τὸ παρ/μιον $OAMB$. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων, $\omega = \omega'$ καὶ $\omega' = \omega \Rightarrow \omega = \omega' \Rightarrow BM = BB_0$. Ἀλλὰ $BM = OA$ καὶ συνεπῶς $OA = BB_0$. Ἐπομένως $OA + OB = BB_0 + OB = K$, δηλ. τὸ M εἶναι ἡ τετάρτη κορυφή παρ/μιου $OAMB$ μὲ $OA + OB = K$, δηλ. τὸ M εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Συμπέρασμα. Ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι ἡ βάση A_0B_0 τοῦ ἰσοσκελοῦς $\triangle OA_0B_0$ μὲ $OA_0 = OB_0 = K$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ III. (Μεταφορά τόξου). Δίδεται κυκλικὸν τόξον \widehat{AB} καὶ σταθερὸν διάνυσμα $\vec{\delta}$. Ἀπὸ κάθε σημεῖον P τοῦ τόξου \widehat{AB} φέρομεν διάνυσμα $\vec{PM} = \vec{\delta}$. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῶν περάτων M τῶν διανυσμάτων τούτων \vec{PM} .

i) Ἐστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου (σχ. 17). Ἄν μεταφέρωμεν τὰ A καὶ B εἰς A_1 καὶ B_1 κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$, δηλ. φέρομεν: $\vec{AA}_1 = \vec{\delta}$, $\vec{BB}_1 = \vec{\delta}$ καὶ ἐνώσωμεν τὸ M μὲ τὰ A_1, B_1 , τότε, ἐπειδὴ καὶ $\vec{PM} = \vec{\delta}$, τὰ τετράπλευρα PMB_1B καὶ PMA_1A εἶναι παρ/μια καὶ συνεπῶς αἱ γωνίαι $\widehat{A_1MB_1}$ καὶ \widehat{APB} ἴσαι ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς τῶν παρ/λous καὶ ὁμορρόπους.



Σχ. 17

Τὸ M βλέπει τὸ τμήμα A_1B_1 ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν ἴσην πρὸς \widehat{APB} καὶ συνεπῶς κεῖται ἐπὶ τόξου $\widehat{A_1B_1}$ ἰκανοῦ γωνίας \widehat{APB} , δηλ. ἐπὶ τόξου $\widehat{A_1B_1} = \widehat{AB}$. Ὄταν τὸ P τείνη νὰ συμπίσῃ μὲ τὸ A , τότε καὶ τὸ M τείνει νὰ συμπίσῃ μὲ τὸ A_1 . Ἀλλὰ τότε ἡ ἡμιευθεῖα (P, A) τείνει νὰ γίνῃ ἡμιεφαπτομένη AX τοῦ τόξου \widehat{AB} (§ 3) καὶ ἡ (M, A_1) τείνει νὰ γίνῃ ἡμιεφαπτομένη A_1X_1 τοῦ τόξου $\widehat{A_1B_1}$. Ἐπειδὴ δὲ πάντοτε αἱ ἡμιευθεῖαι (P, A) καὶ (M, A_1) εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι, διὰ τοῦτο καὶ αἱ ὀριακαὶ τῶν θέσεις AX, A_1X_1 εἶναι παρ/λοι καὶ ὁμόρροποι.

Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι ἡ ἡμιεφαπτομένη A_1X_1 τοῦ τόξου $\widehat{A_1MB_1}$ εἶναι γνωστή, ἄρα τὸ $\widehat{A_1MB_1}$ ὀρισμένον καὶ κατασκευάσιμον (βλ. § 4).

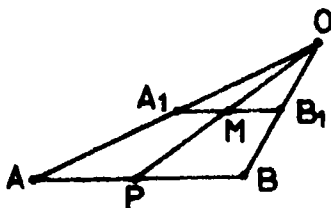
ii) **Ἀντίστροφον.** Ἐστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου $\widehat{A_1B_1}$ προκύπτοντος ἐκ τοῦ τόξου \widehat{AB} διὰ μεταφοράς κατὰ $\vec{\delta}$ (§ 16). Ἐπειδὴ ἡ μεταφορά εἶναι κίνησις, θὰ ὑπάρχη

καὶ ἡ ἀντίστροφος κίνησις ἢ φέρουσα τὸ $\widehat{A_1B_1}$ εἰς τὸ \widehat{AB} . Δηλ. διὰ μεταφορᾶς κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$ τὸ τόξον $\widehat{A_1B_1}$ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ \widehat{AB} , ἄρα καὶ τὸ M ἔρχεται εἰς τι σημεῖον P τοῦ τόξου \widehat{AB} . Θὰ ὑπάρχη λοιπὸν σημεῖον P τοῦ τόξου \widehat{AB} τοιοῦτον, ὥστε $\vec{MP} = \vec{\delta}$ ἄρα καὶ $\vec{PM} = \vec{\delta}$. Δηλ. τὸ M ἔχει τὴν ἰδιότητα τοῦ τόκου.

III) Θεώρημα. Διὰ μεταφορᾶς τόξου \widehat{AB} κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta}$ προκύπτει τόξον $\widehat{A_1B_1}$ ἴσον πρὸς τὸ \widehat{AB} καὶ ἔχον εἰς τὰ ἄκρα του ἡμισφατομένας παρ/λους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰς ἀντιστοιχοῦς ἡμισφατομένας τοῦ \widehat{AB} .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ IV. Δίδεται τμήμα AB καὶ σημεῖον O ἐκτὸς τῆς εὐθ AB . Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν ἀρχομένων ἀπὸ τοῦ O καὶ περατουμένων εἰς τὰ σημεῖα τοῦ τμήματος AB .

Ἐστω M σημεῖον τοῦ τόκου, δηλ. μέσον τοῦ τμήματος OP , ὅπου $P \in AB$ (σχ. 18). Ἄν ἐνώσωμεν τὸ M μὲ τὸ (σταθερὸν) μέσον A_1 τοῦ OA , τότε εὐθ $A_1M \parallel AB$. Ἐποὶ ἡ εὐθ A_1M εἶναι $\parallel AB$ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς OA τοῦ τρ. OAB , θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου B_1 τῆς πλευρᾶς OB . Ὡστε τὸ M ἀνήκει εἰς τὸ σταθερὸν τμήμα A_1B_1 τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν OA, OB .



Σχ. 18

Ἀντίστροφον. Ἐστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ τμήματος A_1B_1 . Τότε ἡ ἀκτίς (O, M) , ὡς ἐσωτερικὴ ἀκτίς τῆς γωνίας \widehat{AOB} , θὰ τέμνῃ τὸ τμήμα AB εἰς τι σημεῖον P . Ἐπειδὴ ἡ εὐθ A_1M διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς OA καὶ εἶναι $\parallel AP$, θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς OP . Ἄρα τὸ M εἶναι μέσον τοῦ OP ὅπου $P \in AB$, δηλ. πληροῖ τὴν ἰδιότητα τοῦ τόκου.

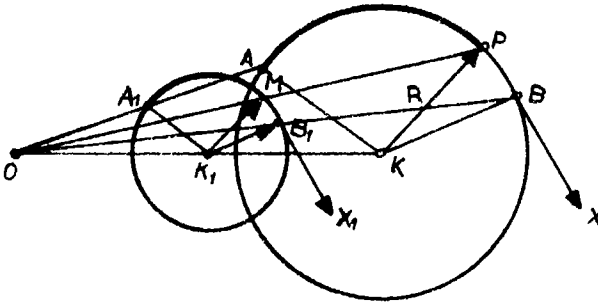
Συμπέρασμα. Ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι τὸ τμήμα τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν OA καὶ OB .

Ὅρολογία. Τὸ M λέγεται καὶ ὁμοίωθεν τοῦ P ἐν λόγῳ $1/2$ ὡς πρὸς κέντρον O . Τὸ τμήμα A_1B_1 λέγεται ἐπίσης ὁμοίωθεν τοῦ AB ἐν λόγῳ $1/2$ καὶ ὡς πρὸς κέντρον O .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ V.— Δίδεται τόξον \widehat{AB} κέντρου K , ἀκτίνοσ R , καὶ σημεῖον O . Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν ἀρχομένων ἀπὸ τοῦ O καὶ περατουμένων εἰς τὰ σημεῖα τοῦ τόξου \widehat{AB} .

Ἐστω \widehat{AKB} ἡ ἐπίκεντροσ γωνία ἢ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ τόξον \widehat{AB} , P τυχὸν σημεῖον τοῦ \widehat{AB} , M τὸ μέσον τοῦ OP , A_1 τὸ μέσον τοῦ OA , B_1 τὸ μέσον τοῦ OB , K_1 τὸ μέσον τοῦ OK (σχ. 19). Ἐπειδὴ $\vec{KA_1} = \frac{1}{2}\vec{KA}$ καὶ $\vec{KB_1} = \frac{1}{2}\vec{KB}$, διὰ τοῦτο αἱ γωνίαὶ \widehat{AKB} καὶ $\widehat{A_1K_1B_1}$ ἔχουν τὰς πλευράσ των παρ/λους καὶ ὁμορρόπους. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀκτίς \vec{KP} εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς \widehat{AKB} , διὰ τοῦτο ἡ ὁμόρροπος ἀκτίς $\vec{K_1M}$ (ὅπου $K_1M = R/2$) θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς $\widehat{A_1K_1B_1}$, ἄρα τὸ σημεῖον τοῦ τόκου, τὸ M , ἀνήκει εἰς τὸ τόξον $\widehat{A_1B_1}$ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἐπίκεντροσ γωνίαν $\widehat{A_1K_1B_1}$.

Ἄντιστροφον. Ἐστω M τυχόν σημεῖον τοῦ τόξου $\widehat{A_1B_1}$. Τότε ἡ ἀκτίς $\vec{K_1M}$ εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς γωνίας $A_1K_1B_1$, ἀρα ἡ παράλληλος καὶ ὁμόρροπος ἀκτίς \vec{KP} θὰ εὑρίσκε-



Σχ. 19

ται εἰς τὸ ἐσωτερικόν τῆς \widehat{AKB} , δηλ. τὸ $P \in \widehat{AB}$. Ἐπειδὴ $KP = R$, $K_1M = R/2$ δηλ. $\vec{K_1M} = \vec{KP}/2$, διὰ τοῦτο τὸ M εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ OP , δηλ. ἔχει τὴν ιδιότητα τοῦ τόπου.

Συμπέρασμα. Ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι τόξον $\widehat{A_1B_1}$ ἀκτίνος $R/2$, ἔχον κέντρον τὸ μέσον τοῦ OK καὶ ἀντίστοιχον ἐπίκεντρον ἔχουσαν πλευρὰς παρ/λους καὶ ὁμορροπούς πρὸς τὰς τῆς ἐπίκεντρον γωνίας \widehat{AKB} .

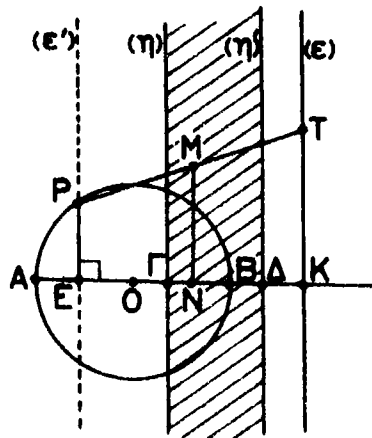
Ὅρολογία. Τὸ ἀνωτέρω τόξον $\widehat{A_1B_1}$ λέγεται ὁμοιόθετον τοῦ \widehat{AB} ὡς πρὸς O καὶ ἐν λόγῳ $1/2$.

Παρατηρήσεις. 1ον. Αἱ ἡμιεφαπτόμεναι BX , B_1X_1 τοῦ \widehat{AB} καὶ τοῦ ὁμοιόθετου τοῦ $\widehat{A_1B_1}$ εἶναι παρ/λοι καὶ ὁμόρροποι (βλ. παρ/γμα III, θεώρημα).

2ον. Ὁ γ.τ. τοῦ παραδείγματος I εἶναι τὸ ὁμοιόθετον τῆς (K,R) ὡς πρὸς Σ καὶ ἐν λόγῳ $1/2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ VI. Δίδεται περιφέρεια (O, R) καὶ εὐθεῖα (ϵ) ἐξωτερικὴ τῆς περιφέρειας. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν συνδεόντων ἐν σημεῖον τῆς περιφέρειας μὲ ἐν σημεῖον τῆς εὐθείας.

Ἐστω PT τυχόν τμήμα συνδέον τὴν περιφέρειαν μὲ τὴν εὐθεῖαν (σχ. 19α). Τὸ μέσον M αὐτοῦ εἶναι ἐν τυχόν σημεῖον τοῦ τόπου. Ἄς φέρωμεν διάμετρον AB κάθετον ἐπὶ τὴν (ϵ) εἰς τὸ K , ὅπου $OK > R$ καὶ $KA > KB$. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ P εἶναι συμμετρικόν τοῦ T ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ M καὶ συνεπῶς, ἀφοῦ $TE \perp (\epsilon)$, τὸ P ἀνήκει εἰς τὴν συμμετρικὴν τῆς (ϵ) εὐθείαν ὡς πρὸς M , ἔστω τὴν (ϵ') . Ἡ (ϵ') πρέπει λοιπὸν νὰ ἔχη ἐν τουλάχιστον σημεῖον P κοινὸν μετὰ τῆς περιφέρειας (O,R) καὶ ἐπειδὴ (ϵ') εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον AB , διὰ τοῦτο πρέπει νὰ τέμνη τὴν AB εἰς σημεῖον E κείμενον ἐπὶ τοῦ τμήματος AB ἢ, τὸ πολὺ, συμπίπτει μὲ τὸ A ἢ τὸ B . Ἐντεῦθεν ἡ συνθήκη: $KB \leq KE \leq KA$



Σχ. 19α

$\longleftrightarrow \frac{KB}{2} \leq \frac{KE}{2} \leq \frac{KA}{2}$. Ἐπειδὴ τὸ M

προβάλλεται εἰς τὸ μέσον N τοῦ KE , διὰ τοῦτο $KN = \frac{KE}{2}$ καὶ ἡ τελευταία συνθήκη γίνεται $\frac{KB}{2} \leq KN \leq \frac{KA}{2}$, ἢ, ἂν Δ καὶ Γ τὰ μέσα τῶν KB , KA , εἶναι τελικῶς:

$$(1) \quad K\Delta \leq KN \leq K\Gamma$$

Ἡ (1) δεικνύει ὅτι τὸ N ἀνήκει εἰς τὸ τμήμα $\Gamma\Delta$ συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ἄκρων του καὶ συνεπῶς τὸ τυχόν σημεῖον M τοῦ τόπου εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς ταινίας τῶν καθέτων (η) καὶ (η') τῶν ἀγομένων ἐπὶ τὴν εὐθ AB εἰς Γ καὶ Δ , ἢ καὶ ἐπὶ τῶν συνόρων (η) καὶ (η') τῆς ταινίας.

Ἀντίστροφον. Ἐστω M σημεῖον τῆς ταινίας $\{(\eta), (\eta') \}$, εἰς ἣν περιλαμβάνομεν καὶ τὰς (η) καὶ (η') . Τότε ἡ προβολὴ τοῦ N ἐπὶ τὴν εὐθ AB θὰ κείται ἐπὶ τοῦ τμήματος $\Gamma\Delta$ συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ἄκρων του. Ἄρα: $K\Delta \leq KN \leq K\Gamma \Rightarrow 2K\Delta \leq 2KN \leq 2K\Gamma \Rightarrow KB \leq KE \leq KA$ (ὅπου $KE = 2KN$). Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ E κείται ἐπὶ τοῦ τμήματος AB συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ἄκρων του ἄρα ἡ εἰς E ἀγομένη $\perp AB$ ἔχει ἐν τουλάχιστον σημεῖον P κοινὸν μετὰ τῆς περιφέρειᾶς (O,R) . Ἐνοομεν τὸ P μετὰ τὸ M , ὅποτε ἡ εὐθ PM , τέμνουσα τὴν EP , τέμνει καὶ τὴν περιλὸν τῆς (e) , ἔστω εἰς T . Ἐπειδὴ τὸ N εἶναι μέσον τοῦ KE , διὰ τοῦτο καὶ τὸ M εἶναι μέσον τοῦ PT , ἦτοι τὸ M ἔχει τὴν ιδιότητα τοῦ τόπου.

Συμπέρασμα. Ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι μία ταινία ὀριζομένη ὑπὸ τῶν μεσοκαθέτων τῶν τμημάτων KA καὶ KB , εἰς ἣν περιλαμβάνονται καὶ τὰ σύνορα αὐτῆς.

20. Χρῆσις τῶν γεωμετρικῶν τόπων εἰς γεωμετρικὰ κατασκευὰς.—Πολλάκις ἡ λύσις ἑνὸς γεωμετρικοῦ προβλήματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν κατασκευὴν (προσδιορισμὸν) ἑνὸς σημείου X · δηλ. συμβαίνει ἢ εὐρεσις τῆς θέσεως τοῦ X νὰ συνεπάγεται τὴν ἄμεσον λύσιν τοῦ προβλήματος. Ἐάν, τώρα, γνωρίζωμεν ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον X πληροῖ δύο συνθηκὰς (A) καὶ (B), εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν γνωστοὶ γεωμετρικοὶ τόποι (γ_1) καὶ (γ_2) , τότε τὸ X ὡς σημεῖον ἀνήκον εἰς ἀμφοτέρους τοὺς τόπους (γ_1) καὶ (γ_2) (διότι ἔχει ἀμφοτέρας τὰς ιδιότητας (A) καὶ (B)) κατασκευάζεται ὡς τομὴ τῶν δύο τόπων. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν θὰ ἔχη τόσας λύσεις, ὅσα σημεῖα ἔχει τὸ σύνολον $(\gamma_1) \cap (\gamma_2)$. Ἐάν $(\gamma_1) \cap (\gamma_2) = \emptyset$, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν. Ἡ μέθοδος αὐτὴ δὲν εἶναι πάντοτε ἐφαρμοσίμος εἰς τὰ γεωμετρικὰ προβλήματα, διότι ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ ἀμφοτέρων τῶν τόπων (γ_1) καὶ (γ_2) δὲν εἶναι πάντοτε δυνατὴ. Παρατηρητέον ἀκόμη ὅτι κατὰ τὴν ἔρευναν τοῦ προβλήματος δεόν νὰ καταλήξωμεν εἰς δύο ιδιότητας (A) καὶ (B) τοῦ X , ἀνεξαρτήτους ἀλλήλων, διὰ νὰ ὀδηγοῦν αὐταὶ εἰς δύο διαφορετικοὺς τόπους.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

69. Τόπος τῶν μέσων τῶν ἀπείρων τμημάτων τῶν ἐχόντων ἓν ἄκρον εἰς σταθερὸν σημεῖον A καὶ τὸ ἄλλο ἐπὶ σταθερᾶς εὐθείας (e) .

70. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ $\triangle AB\Gamma$ λαμβάνεται τυχόν σημεῖον M καὶ ἐκ τοῦ M ἄγονται παρ/λοι πρὸς τὰς AB , $A\Gamma$. Τίς ὁ γ.τ. τοῦ κέντρου τοῦ σχηματιζομένου παρ/μου;

71. Τόπος τῶν συμμετρικῶν σταθεροῦ σημείου A πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας (τοῦ ἐπιπέδου) τὰς διερχομένας δι' ἑτέρου σταθεροῦ σημείου B .

72. Έκ δεδομένου σημείου περιφέρειας (K, R) άγομεν χορδύς και τάς προεκτείνουμε μέχρι διπλασιασμοῦ. Τόπος τών άκρων τών προεκτάσεων.

73. Νά εύρεθῆ ὁ γ.τ. τών μέσων τών τμημάτων τών παρ/λων πρὸς τὴν διάμεσον ΑΔ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (\widehat{A} ἡ ὀρθή γωνία) και περατουμένων ἐπὶ τών εὐθειῶν, ἐφ' ὧν κείνται αὐ κάθετοι πλευραί.

74. Νά εύρεθῆ ὁ γ.τ. τών σημείων, τών ὁποίων τὸ ἄθροισμα τών ἀποστάσεων ἀπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν εἶναι σταθερόν, ἴσον πρὸς δοθὲν τμήμα λ.

75. Τόπος τών σημείων τών κειμένων ἐντὸς δοθείσης γωνίας και τών ὁποίων ἡ διαφορὰ τών ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς εὐθείας τὰς φερούσας τὰς πλευράς τῆς γωνίας ἰσοῦται κωτ' ἀπόλυτον τιμὴν πρὸς δοθὲν τμήμα λ.

76. Τριγώνου ΑΒΓ αὐ κορυφαί Β, Γ παραμένουν σταθεραί, ἐνῶ ἡ κορυφή Α μετατοπίζεται οὕτως, ὥστε νά εἶναι πάντοτε $AB + AG = C$ (σταθερόν τμήμα $> BG$). Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῆς προβολῆς τῆς κορυφῆς Γ ἐπὶ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς \widehat{A} .

77. Ποῖος ὁ γ.τ. τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποῖου αὐ κορυφαί Β και Γ, καθὼς και τὸ μήκος τῆς ἐκ τῆς Β διαμέσου παραμένουν σταθερά;

78. Ἐπὶ τών πλευρῶν Οκ, Ογ γωνίας \widehat{XOY} θεωροῦμεν ζεῦγος σημείων Α και Β, τὸ Α ἐπὶ τῆς Οκ, τὸ Β ἐπὶ τῆς Ογ τοιοῦτον, ὥστε $OA - OB = C$ (δοθὲν τμήμα). Νά εύρεθῆ ὁ γ.τ. τών μέσων τών τμημάτων ΑΒ.

79. Τόπος τών κέντρων βάρους τών ὀρθογωνίων τριγώνων με σταθεράν ὑποτείνουσαν ΒΓ.

80. Δίδονται δύο σταθερά σημεία Β και Α. Ποῖος ὁ γ.τ. τών κορυφῶν Α τών ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΒΓ με $AB = AG$, τών ἐχόντων πάντοτε διάμεσον τὴν ΒΔ;

81. Δίδεται τρ.ΑΒΓ. Τόπος τών Μ, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει συγχρόνως:

$$MA = MB \wedge MA < MG.$$

82. Δίδεται τρ.ΑΒΓ. Τόπος τών Μ, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει συγχρόνως:

$$MA < MB \wedge MA < MG.$$

83. Ποῖος ὁ γ.τ. τών κέντρων τών περιφερειῶν, αἰτίνες ἐφάπτονται δύο δοθεισῶν τεμνομένων εὐθειῶν;

84. Σημεῖον Μ διατρέχει ἐν τμήμα ΑΒ. Εἰς ἐκάστην θέσιν τοῦ Μ κατασκευάζομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΜΓ ἐπὶ τοῦ ἐνός τών ἡμιεπιπέδων, ἅτινα ὀρίζει ἡ εὐθ.ΑΒ και φέρομεν εἰς τὸ Γ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΜ, ἥτις τέμνει εἰς Δ τὴν εἰς τὸ Β κάθετον ἐπὶ τὸ ΑΒ. Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ περικέντρου τοῦ τρ.ΔΒΓ;

85. Δίδεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ και κέντρου Κ. Ἐάν Μ τυχόν σημειον τῆς περιφέρειας, ποῖος ὁ γ.τ. τῆς τομῆς τῆς εἰς Μ ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου και τῆς ἐκ τοῦ Κ ἀγομένης παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΜ;

86. Δίδεται περιφέρεια (γ) και τμήμα ΑΒ. Τόπος τοῦ Ρ, όταν τὸ τετράπλευρον ΑΒΜΡ εἶναι παρ/μον, τοῦ Μ ἀνήκοντος εἰς τὴν (γ).

87. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν κύκλου (Κ, R) δίδεται σταθερόν σημειον Α. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς περιφέρειας (Κ, R) τυχόν σημειον Μ και διὰ τών τριῶν σημείων Κ, Α, Μ γράφομεν περιφέρεια, ἐστω τὴν (γ). Εἰς τὸ Μ φέρομεν ἐφαπτομένην τῆς (Κ, R), ἥτις ἐπαυάτμενει τὴν (γ) εἰς τὸ Ρ. Νά εύρεθῆ ὁ γ.τ. τοῦ Ρ.

88. Νά εύρεθῆ σημειον ἀπέχον ἀπόστασιν δ ἀπὸ δοθείσης εὐθείας και ταυτοχρόνως ἀπέχον ἰσάκεις ἀπὸ δύο ἄλλας δοθείσας εὐθείας ἢ δύο δοθέντα σημεία.

89. Νά γραφῆ περιφέρεια με δοθείσαν ἀκτίνα R και i) διερχομένη διὰ δύο σημείων Α και Β, ii) διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Α και ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας (ε) ἢ περιφέρειας (Ο, α).

90. Δίδονται δύο περιφέρειαι (Κ) και (Λ) κέντρων Κ και Λ, τεμνόμεναι εις τὰ σημεία Α και Β. Εὐθεΐα (ε) διερχομένη διὰ τοῦ Α ἐπανατέμνει τὰς περιφερείας (Κ) και (Λ) εἰς M_1 και M_2 . Ζητεῖται τὸ σύνολον τῶν μέσων τῶν τμημάτων M_1M_2 .

91. Δίδεται κύκλος (Κ, R) και σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου του.

i) Τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν τοῦ κύκλου, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς διέρχονται διὰ τοῦ Ρ. Δειξάτε ὅτι ὁ τόπος εἶναι περιφέρεια ἢ τόξον.

ii) Τόπος τοῦ Ρ, ὅταν ὁ ἀνωτέρω τόπος εἶναι ἡμιπεριφέρεια.

92. Περιφέρεια (γ) σταθερᾶς ἀκτίνος, ἀλλὰ μεταβλητῆς θέσεως, διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Α. Εἰς ἐκάστην θέσιν αὐτῆς ἄγονται ἐφαπτόμεναι παράλληλοι πρὸς σταθεράν εὐθεΐαν. Τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς.

93. Νὰ εὐρεθῆ ὁ γ.τ. τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων, αἵτινες ἄγονται παράλληλως πρὸς δοθεῖσαν εὐθεΐαν πρὸς τὰς περιφερείας, αἵτινες ἐφάπτονται δεδομένης εὐθείας εἰς σταθερὸν σημεῖον αὐτῆς.

94. Ὁρθογωνίου παρ/μου ΑΒΓΔ ἡ κορυφή Α μένει σταθερά, αἱ δὲ Β και Γ μένουσι ἐπὶ δεδομένης περιφερείας. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῆς τετάρτης κορυφῆς Δ.

95. Σημεῖον Ρ διατρέχει τὴν προέκτασιν τῆς διαμέτρου ΑΒ κύκλου (Κ, R). Ἀπὸ ἐκάστην θέσιν τοῦ Ρ φέρομεν ἡμιευθεΐαν ΡΤ ἐφαπτομένην τοῦ (Κ, R). Ζητεῖται ὁ τόπος τῆς προβολῆς τοῦ κέντρου Κ ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς \widehat{KPT} .

96. Τίς ὁ γ.τ. τῶν σημείων, καθ' ἃ τέμνονται αἱ εὐθεΐαι αἱ ἐνοδοῦσαι τὰ πέρατα τῆς διαμέτρου ἡμικυκλίου μετὰ τῶν περάτων τῶν καθέτων πρὸς ἀλλήλας ἀκτίνων τούτου;

97. Δοθέντος ὀρθογωνίου τρ.ΑΒΓ, ὄγουμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, τέμνουσαν εἰς Δ και Ε τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ. Τίς ὁ γ.τ. τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν εὐθειῶν ΕΒ και ΓΔ :

98. Δοθέντος κύκλου (Ο) και δύο διαμέτρων ΑΒ και ΓΔ καθέτων ἐπ' ἀλλήλας, φέρομεν τυχοῦσαν ἀκτίνα ΟΕ και ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα ΟΜ ἴσον πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ Ε ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν Μ :

99. Δίδεται κύκλος (Ο) και διάμετρος αὐτοῦ ΓΔ. Φέρομεν τυχοῦσαν ἀκτίνα ΟΑ και τὴν ἀπόστασιν ΑΒ τοῦ Α ἀπὸ τῆς ΓΔ. Τόπος τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ ΔΟΑΒ κύκλου.

100. Νὰ εὐρεθῆ ὁ γ.τ. τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ (ὀρθαί) προβολαὶ Ρ και Σ ἐπὶ δύο σταθεράς, τεμνομένης εὐθείας (ϵ_1) και (ϵ_2) ὀρίζουσι εὐθεΐαν ΡΣ παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεΐαν (δ).

101. Εἰς δοθέντα κύκλον ἄγομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΓΔ, παρ/λον πρὸς σταθεράν διάμετρον ΑΒ και λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (Α, Δ) τμήμα ΑΜ = ΑΓ. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν Μ ;

102. Τετραπλεύρου ΑΒΓΜ κυρτοῦ και ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ μένουσι σταθεραί, ἐνῶ ἡ Μ μεταβάλλεται. Τίς ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν τῶν συνδεουσῶν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β

ΟΜΟΚΥΚΛΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΥΤΩΝ

21. Ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν κυρτῶν πολυγώνων.

α') Πολύγωνα. Ἐς θεωρήσωμεν ἐπὶ ἐπιπέδου μίαν διαδοχὴν ἐκ n σημείων : A_1 τὸ πρῶτον, A_2 τὸ δευτέρον, ..., A_n τὸ τελευταῖον, ὅπου $n \geq 3$, καθὼς καὶ τὴν διαδοχὴν τῶν n τμημάτων $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$. Ἐφ' ὅσον δύο οἰαδήποτε ἐκ τῶν τμημάτων $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ δὲν ἀλληλοτέμνονται, τότε : τὰ n ἀνωτέρω σημεία $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ μαζί μὲ τὰ τμήματα $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ἓν ἀπλοῦν πολύγωνον. Συντόμως : «πολύγωνον».

Ἐάν τινα ἐκ τῶν τμημάτων $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ ἀλληλοτέμνονται, τότε ὑπὸ τῶν σημείων A_1, \dots, A_n καὶ τῶν τμημάτων A_1A_2, \dots, A_nA_1 ὀρίζεται διεσταυρωμένον πολύγωνον.

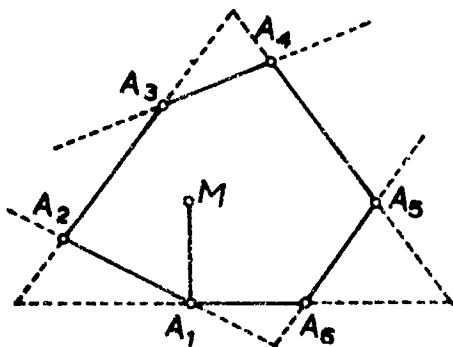
Δυνατὸν τὰ σημεία A_1, A_2, \dots, A_n , ἐνῶ ὀρίζουν ἀπλοῦν πολύγωνον, κατ' ἄλλην τάξιν λαμβανόμενα νὰ μὴ ὀρίζουν ἀπλοῦν πολύγωνον, ἀλλὰ διεσταυρωμένον πολύγωνον. Πάντως αἱ n διαδοχαὶ («κυκλικαὶ μεταθέσεις» λεγόμεναι) : (A_1, A_2, \dots, A_n) , $(A_2, A_3, \dots, A_n, A_1)$, $(A_3, A_4, \dots, A_n, A_1, A_2)$... $(A_n, A_1, \dots, A_{n-1})$ ὀρίζουν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πολύγωνον.

Τὰ σημεία A_1, A_2, \dots, A_n καλοῦνται κορυφαὶ καὶ τὰ τμήματα $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ καλοῦνται πλευραὶ τοῦ πολυγώνου. Εὐκόλως βλέπομεν ὅτι αἱ κορυφαὶ εἶναι ἰσάριθμοι πρὸς τὰς πλευράς.

β') Κυρτά πολύγωνα. Ἐάν ἐκάστη εὐθεῖα περιέχουσα (φέρουσα) μίαν πλευράν ἔχη πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἄλλας τὰς ἄλλας κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, τότε τὸ πολύγωνον καλεῖται κυρτὸν πολύγωνον.

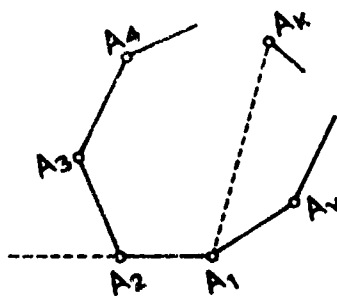
Ἐάν π.χ. τὸ πολύγωνον $A_1 A_2 \dots A_n$ εἶναι κυρτὸν, τότε αἱ κορυφαὶ A_3, A_4, \dots, A_n κείνται ἐπὶ ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἡμιεπιπέδου ἐκ τῶν δύο, τὰ ὁποῖα ὀρίζει ἡ εὐθ $A_1 A_2$ κ.τ.λ.

Ἐν σημεῖον M λέγεται ἔσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου, ἂν ὡς πρὸς τὸν φορέα ἐκάστης πλευρᾶς κείται εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, εἰς τὸ ὁποῖον κείνται καὶ αἱ λοιπαὶ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου (σχ. 21). Κατὰ συνέπειαν τὸ ἔσωτερικὸν σημεῖον δὲν κείται ἐπὶ πλευρᾶς τινος, διότι πᾶν σημεῖον ἀνήκον εἰς ἓν ἡμιεπίπεδον δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνορον (ἀρχικὴν εὐθεῖαν) τοῦ ἡμιεπιπέδου. Ἐσωτερικὸν τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ἔσωτερικῶν σημείων αὐτοῦ. Τὸ ἔσωτερικὸν εἶναι, ὡς λέγομεν, τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τὸ περικλειόμενον ὑπὸ τοῦ πολυγώνου.



Σχ. 21

Διαγώνιος κυρτοῦ πολυγώνου καλεῖται πᾶν εὐθύγραμμον τμήμα ἔχον ἄκρα δύο κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, μὴ διαδοχικάς. Δηλ. ἡ διαγώνιος συνδέει δύο κορυφὰς, χωρὶς νὰ εἶναι πλευρά. Κάθε διαγώνιος, π.χ. ἡ $A_1 A_k$ (σχ. 22) εὐρίσκεται εἰς τὸ ἔσωτερικὸν τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου. Διότι ὡς πρὸς πᾶσαν εὐθεῖαν φέρουσαν μίαν πλευράν τὸ τμήμα $A_1 A_k$ εὐρίσκεται ὀλόκληρον εἰς τὸ αὐτὸ μέρος μὲ τὰς ἄλλας κορυφὰς. Π.χ. ὡς πρὸς τὴν εὐθ $A_2 A_3$ τὰ σημεῖα A_1, A_k κείνται εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, εἰς ὃ κείνται καὶ αἱ λοιπαὶ κορυφαὶ A_4, \dots, A_n, A_1 ἄρα καὶ ὀλόκληρον τὸ τμήμα $A_1 A_k$ εὐρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον μὲ τὰς ἄλλας κορυφὰς, ὡς πρὸς τὴν εὐθ $A_2 A_3$. Ἐπειδὴ τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ μὲ ἄλλας τὰς εὐθείας τὰς φέρουσας μίαν πλευράν, διὰ τοῦτο κατὰ τὸν ὀρισμὸν τοῦ «ἔσωτερικοῦ» τὸ τμήμα $A_1 A_k$ ἀνήκει εἰς τὸ ἔσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου.

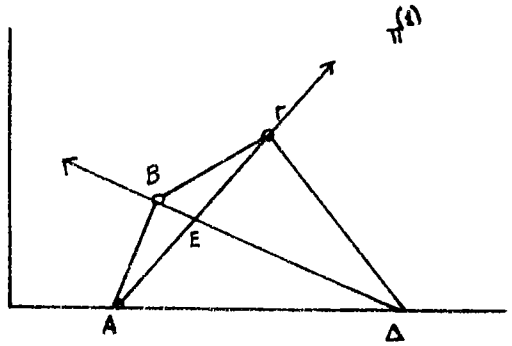


Σχ. 22

γ') Κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 23). Εἰς αὐτὸ διακρίνομεν δύο ζεύγη ἀπέναντι γωνιῶν: $(\widehat{A}, \widehat{\Gamma})$ καὶ $(\widehat{B}, \widehat{\Delta})$.

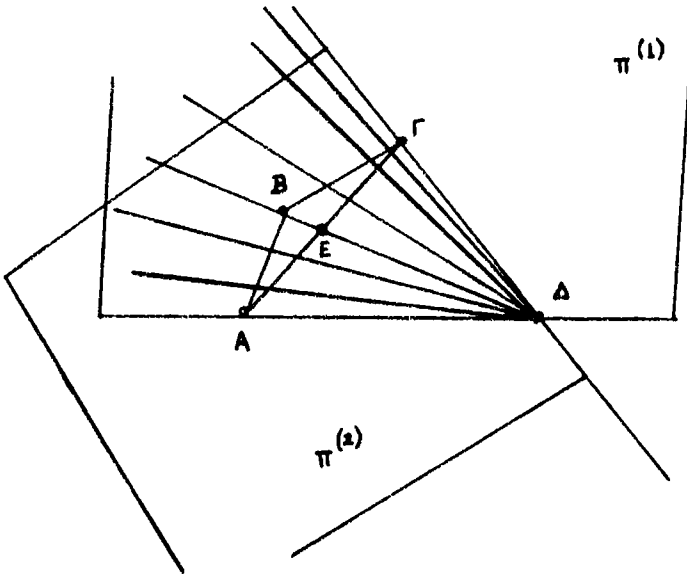
(Θ).— Ἐάν αἱ διαγώνιοι (δηλ. τὰ τμήματα $A\Gamma, B\Delta$) τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 23) τέμνονται εἰς E , τότε τὸ $AB\Gamma\Delta$ εἶναι κυρτὸν.

Πρὸς ἀπόδειξιν, ἄς θεωρήσωμεν τὸ ἡμιεπίπεδον $\Pi^{(1)}$ τὸ ὑπὸ τῆς $\epsilon\upsilon\theta\alpha\Delta$ καὶ τοῦ E ὀριζόμενον. Ἡ ἡμιευθεία (A, Γ) ἀρχομένη ἀπὸ τοῦ συνόρου τοῦ ἡμιεπιπέδου $\Pi^{(1)}$ καὶ περιέχουσα ἐν σημείον E τοῦ $\Pi^{(1)}$ κεῖται ὀλόκληρος ἐντὸς τοῦ $\Pi^{(1)}$. Ἄρα τὸ $\Gamma E \Pi^{(1)}$. Ὁμοίως τὸ $B E \Pi^{(1)}$. Ἦτοι ἡ $\epsilon\upsilon\theta\alpha\Delta$ ἔχει πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τὰ B καὶ Γ . Ὁμοίως ἐκάστη τῶν ἄλλων πλευρῶν τοῦ $AB\Gamma\Delta$ ἔχει πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τὰς δύο ἄλλας κορυφάς. Ἄρα τὸ $AB\Gamma\Delta$ εἶναι κυρτὸν (ἔδ. β').



Σχ. 23

Ἄντιστρόφως. Ἐάν τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι κυρτὸν, αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$ τέμνονται εἰς σημείον E ἐσωτερικὸν τοῦ $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 24). Διότι τὰ B καὶ Γ κεῖνται



Σχ. 24

ἐπὶ ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἡμιεπιπέδου $\Pi^{(1)}$ τοῦ ἔχοντος σῆμα τὴν $\epsilon\upsilon\theta\alpha\Delta$ (δηλ. πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς $\epsilon\upsilon\theta\alpha\Delta$, ἀφοῦ τὸ $AB\Gamma\Delta$ εἶναι κυρτὸν). Ἀναλόγως τὰ A καὶ B κεῖνται ἐπὶ ἑτέρου ἡμιεπιπέδου $\Pi^{(2)}$ ἔχοντος σῆμα τὴν $\epsilon\upsilon\theta\alpha\Delta$. Ὡστε τὸ B ἀνήκει εἰς ἀμφοτέρω τὰ ἡμιεπίπεδα $\Pi^{(1)}$ καὶ $\Pi^{(2)}$ δηλ. εἰς τὴν «τομὴν» αὐτῶν. Ἄλλ' ἡ τομὴ (τὸ κοινὸν μέρος) τῶν δύο ἡμιεπιπέδων $\Pi^{(1)}$ καὶ $\Pi^{(2)}$ εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{A\Delta\Gamma}$. Ἀφοῦ τὸ B εἶναι ἐσωτερικὸν σημείον τῆς $\widehat{A\Delta\Gamma}$, ἡ ἡμιευθεία (Δ, B) τέμνει τὸ τμήμα $A\Gamma$ τὸ συνδέον τὰς δύο πλευράς τῆς γωνίας $\widehat{A\Delta\Gamma}$ εἰς τι σημείον E , τὸ ὅποιον εἶναι ἐσωτερικὸν σημείον τοῦ τετραπλεύρου, ἀφοῦ τὸ $A\Gamma$ κεῖται ἐντὸς τοῦ κυρτοῦ τετραπλεύρου (ἔδαφ. γ'). Ὁμοίως δεῖκνύεται ὅτι ἡ ἡμιευθεία (Γ, A) τέμνει τὸ τμήμα $B\Delta$. ὁ.ἔ.δ.

ΤΟ ΕΓΓΡΑΨΙΜΟΝ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΝ

22. «*Εγγράψιμον*», όταν υπάρχει περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν τεσσάρων κορυφῶν του.

Τὸ ἐγγράψιμον τετράπλευρον παρουσιάζεται εἰς πλείστα σχήματα τῆς γεωμετρίας καὶ διὰ τοῦτο αἱ ἅπλαϊ ἰδιότητές του εἶναι εὐρείας χρήσεως εἰς τὰς γεωμετρικὰς ἐρεῦνας. Δι' αὐτῶν ἀνακαλύπτονται ἴσαι γωνίαι ὑπάρχουσαι εἰς ἓν σχῆμα καὶ ἀποδεικνύονται πολυάριθμοι γεωμετρικαὶ προτάσεις.

23. Χαρακτηριστικαὶ ἰδιότητες.

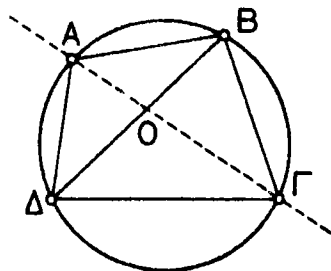
I. Ἐὰν τετράπλευρον $ΑΒΓΔ$ εἶναι ἐγγράψιμον, αἱ δὲ κορυφαὶ B καὶ $Δ$ κείνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθ $ΑΓ$, τότε αἱ γωνίαι $\widehat{ΑΒΓ}$ καὶ $\widehat{ΑΔΓ}$ εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ τὸ τετράπλευρον εἶναι κυρτόν.

Ἀντιστρόφως, ἂν εἰς τετράπλευρον $ΑΒΓΔ$ αἱ κορυφαὶ B καὶ $Δ$ κείνται ἑκατέρωθεν τῆς ευθ $ΑΓ$, ἐνῶ αἱ γωνίαι $\widehat{ΑΒΓ}$ καὶ $\widehat{ΑΔΓ}$ εἶναι παραπληρωματικαί, τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ κυρτόν.

Ἀπόδειξις. α') Ἐστω τετράπλευρον $ΑΒΓΔ$ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἔχον τὰς κορυφὰς B καὶ $Δ$ ἑκατέρωθεν τῆς ευθ $ΑΓ$ (σχ. 25). Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι \widehat{B} καὶ $\widehat{Δ}$ εἶναι ἐγγεγραμμέναι, διὰ τοῦτο :

$$\text{μέτρον τῆς } \widehat{B} = \frac{1}{2} \text{ μέτρον τόξου } \widehat{ΑΔΓ},$$

$$\text{μέτρον τῆς } \widehat{Δ} = \frac{1}{2} \text{ μέτρον } \widehat{ΑΒΓ} \Rightarrow$$

$$\text{μέτρον } \widehat{B} + \text{μέτρον } \widehat{Δ} = \frac{1}{2}.$$


Σχ. 25

$$(\text{μέτρον τόξου } \widehat{ΑΔΓ} + \text{μέτρον τόξου } \widehat{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

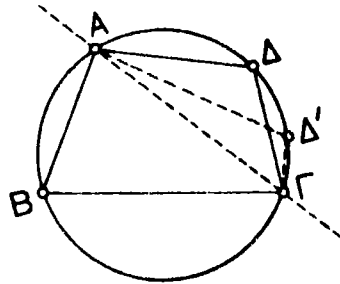
Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ αἱ ἡμιευθεῖαι $(Γ, B)$, $(Γ, Δ)$ κείνται ἑκατέρωθεν τῆς $(Γ, A)$, ἔπεται ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα $(Γ, A)$ εἶναι ἐσωτερικὴ ἀκτίς τῆς γωνίας $\widehat{ΔΓB}$, ἄρα θὰ τέμνῃ τὸ τμήμα $ΔB$ εἰς σημεῖον O . Τὸ O ἀνήκον εἰς τὴν χορδὴν $ΔB$ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, ἄρα καὶ ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς χορδῆς $ΑΓ$. Ἀφοῦ αἱ διαγώνιοι τοῦ $ΑΒΓΔ$ τέμνονται, τοῦτο εἶναι κυρτόν.

β') Ἐστω τετράπλευρον $ΑΒΓΔ$ ἔχον τὰς κορυφὰς B καὶ $Δ$ ἑκατέρωθεν τῆς ευθ $ΑΓ$ καὶ τὰς γωνίας $\widehat{ΑΒΓ}$ καὶ $\widehat{ΑΔΓ}$ παραπληρωματικὰς. Ἄς

γράφωμεν τὴν διὰ τῶν A, B, Γ διαρχομένην περιφέρειαν καὶ ὡς λάβωμεν σημεῖον Δ' τοῦ τόξου $\widehat{A\Gamma}$ τοῦ μὴ περιέχοντος τὸ σημεῖον B. Ἐπειδὴ τὸ ABΓΔ' εἶναι ἔγγεγραμμένον, θὰ εἶναι, ὡς ἐδείχθη: $\widehat{A\Gamma} + \widehat{A\Delta'\Gamma} = 2^D$, ἐνῶ συγχρόνως, ἐξ ὑποθέσεως, $\widehat{A\Gamma} + \widehat{A\Delta\Gamma} = 2^D$. Ἐπομένως:

$$\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{A\Delta'\Gamma} = 2^D - \widehat{B}$$

Τὰ δύο σημεῖα Δ καὶ Δ' βλέπουν τὸ τμήμα AΓ ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν καὶ κείνται ἐπὶ τοῦ ἰδίου ἡμιεπιπέδου ὡς πρὸς τὴν ευθ AΓ, τοῦ μὴ περιέχοντος τὸ B. Ἄρα εὐρίσκονται ἐπὶ τοῦ ἰδίου τόξου, ἰκανοῦ γωνίας $180^\circ - \widehat{B}$. Ἐπειδὴ τὸ Δ' κείνται ἐκ κατασκευῆς ἐπὶ τῆς περιφέρειας (A,B,Γ), ἄρα τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίη καὶ διὰ τὸ Δ. Τὸ τετράπλευρον ABΓΔ εἶναι λοιπὸν ἔγγράψιμον καὶ εἶναι καὶ κυρτόν, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω.



Σχ. 26

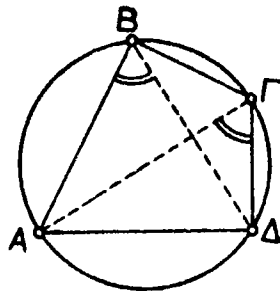
II. Ἐὰν τετράπλευρον ABΓΔ εἶναι ἔγγράψιμον εἰς κύκλον, αἱ δὲ κορυφαὶ B καὶ Γ κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθ AΔ, τότε αἱ γωνίαι $\widehat{A\Gamma\Delta}$ καὶ $\widehat{A\Delta\Gamma}$ εἶναι ἴσαι.

Ἀντιστρόφως, ἂν εἰς τετράπλευρον ABΓΔ αἱ κορυφαὶ B καὶ Γ κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθ AΔ καὶ βλέπουν τὴν AΔ ὑπὸ γωνίας ἴσας, δηλ. $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{A\Delta\Gamma}$, τὸ τετράπλευρον (ἀπλοῦν ἢ διεσταυρωμένον) εἶναι ἔγγράψιμον.

α') Ἐστω τὸ ἔγγεγραμμένον τετράπλευρον ABΓΔ, ὅπου αἱ κορυφαὶ B καὶ Γ κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς AΔ. Αἱ γωνίαι $\widehat{A\Gamma\Delta}$ καὶ $\widehat{A\Delta\Gamma}$ εἶναι ἔγγεγραμμένα, βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου $\widehat{A\Delta}$, ἄρα εἶναι ἴσαι. Δηλ. ἡ πλευρὰ AΔ φαίνεται ὑπὸ ἴσας γωνίας ἀπὸ τὰς δύο ἀπέναντί της κορυφᾶς B καὶ Γ.

β') Ἐστω τετράπλευρον ABΓΔ μὲ $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{A\Delta\Gamma}$, ὡς εἰς σχ. 27.

Τότε τὰ σημεῖα B καὶ Γ, κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ευθ AΔ, βλέπουν τὸ τμήμα AΔ ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν. Ἄρα τὰ B καὶ Γ κείνται ἐπὶ τοῦ



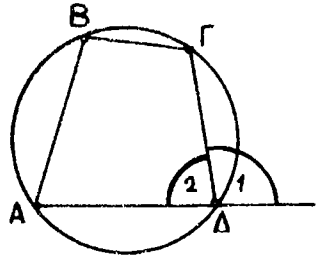
Σχ. 27

ἰδίου τόξου, χορδῆς AΔ καὶ ἰκανοῦ γωνίας $\widehat{A\Gamma\Delta}$. Τὰ A, B, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά.

III. Ἐάν κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον, τότε πᾶσα ἐξωτερικὴ γωνία αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπέναντι ἐσωτερικὴν καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐστω $\widehat{\Delta}_1$ μία ἐξωτερικὴ γωνία, \widehat{B} ἡ ἀπέναντι τῆς ἐσωτερικῆς καὶ $\widehat{\Delta}_2$ ἡ ἐσωτερικὴ γωνία τοῦ ἐγγραψίμου $AB\Gamma\Delta$, ἡ προσκειμένη τῆς $\widehat{\Delta}_1$.

Τότε: $AB\Gamma\Delta$ ἐγγράψιμον $\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{\Delta}_2 = 2\text{ορθ}$. Ἄλλ' εἶναι καὶ $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 2\text{ορθ}$ καὶ συνεπῶς $\widehat{B} = \widehat{\Delta}_1$. Ἀντιστρόφως: $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 2\text{ορθ} \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{\Delta}_2 = 2\text{ορθ} \Rightarrow AB\Gamma\Delta$ ἐγγράψιμον (βλ. I).



Σχ. 28

24. Τέσσαρα ὁμοκυκλικά σημεῖα. — Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων I καὶ II (τῆς § 23) γίνεται φανερόν τὸ ἐξῆς θεώρημα:

Τέσσαρα σημεῖα A, B, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά, ὅταν

i) Τὰ B καὶ Δ κείνται ἐκατέρωθεν τῆς εὐθ ΑΓ, αἱ δὲ γωνίαι $\widehat{AB\Gamma}$ καὶ $\widehat{A\Delta\Gamma}$ εἶναι παραπληρωματικαὶ

ἢ ὅταν

ii) Τὰ B καὶ Δ κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθ ΑΓ, αἱ δὲ γωνίαι $\widehat{AB\Gamma}$ καὶ $\widehat{A\Delta\Gamma}$ εἶναι ἴσαι

ἢ, τέλος, ὅταν

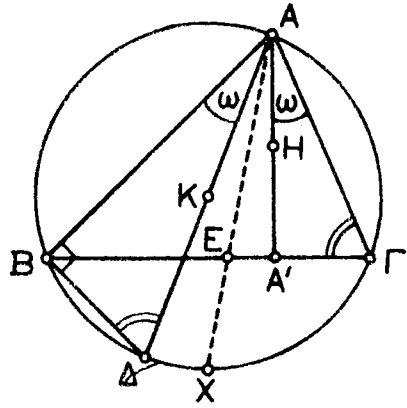
iii) $\widehat{AB\Gamma} = 1$ ὀρθή καὶ $\widehat{A\Delta\Gamma} = 1$ ὀρθή, ἀδιακρίτως διατάξεως τῶν σημείων. (Ἀσκήσεις: 103 - 117)

ΓΩΝΙΑ ΥΨΟΥΣ ΚΑΙ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ

25. (Θ) — Ἡ ὑπὸ τοῦ ὕψους καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς κορυφῆς A τριγώνου $AB\Gamma$ σχηματιζομένη κυρτὴ γωνία ἔχει τὰς πλευράς της συμμετρικὰς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς \widehat{A} καὶ μέτρον ἴσον πρὸς $\widehat{B}-\widehat{\Gamma}$.

Ἀπόδειξις. α') Ἐστῶσαν αἱ \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$ ὀξεῖαι (σχ. 29). Τότε τὸ περίκεντρον K κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς $B\widehat{A}\Gamma$, ἄρα καὶ τὸ Δ. Συνεπῶς τὰ Δ καὶ Γ κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ τὸ μέρος τῆς εὐθ AB καὶ συνεπῶς:

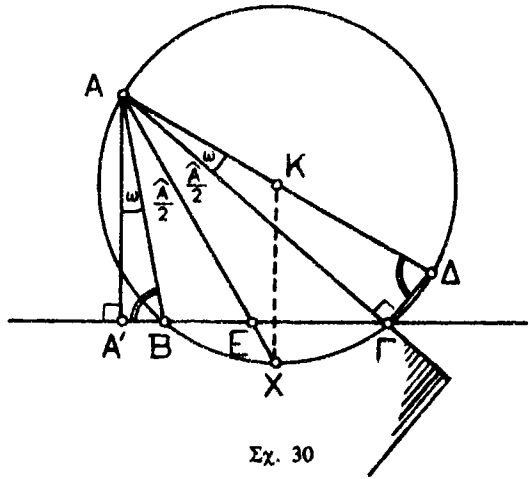
$\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Gamma}$. Τὸ A' κείται μεταξὺ B καὶ Γ , ἄρα καὶ τὸ AA' κείται ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$. Τέλος, ἐπειδὴ αἱ ἡμιευθεῖαι (A, Δ) καὶ (A, A') εἶναι ἐσωτερικαὶ τῆς γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ καὶ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὰς πλευράς, δηλ.: $\widehat{BA\Delta} = 90^\circ - \widehat{\Delta} = 90^\circ - \widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma AA'} = 90^\circ - \widehat{\Gamma}$, διὰ τοῦτο εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον AX τῆς $\widehat{BA\Gamma}$.



Σχ. 29

$$\text{Εἶναι ἐπίσης } A\widehat{A\Delta} = |A\widehat{A\Delta} - \Delta\widehat{A\Delta}| = |90^\circ - \widehat{B} - (90^\circ - \widehat{\Gamma})| = |\widehat{B} - \widehat{\Gamma}|.$$

β') Ἐστω ἡ \widehat{B} ἀμβλεῖα (σχ. 30). Τότε τὸ τόξον, ἐφ' οὗ βαίνει ἡ \widehat{B} , εἶναι μείζον τόξον καὶ ἡ διάμετρος AD περατοῦται εἰς τι σημεῖον Δ αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μείζον τόξον $\widehat{A\Delta\Gamma}$ καὶ τὸ ἔλασσον $\widehat{AB\Gamma}$ κείνται ἑκατέρωθεν τῆς χορδῆς AG , διὰ τοῦτο αἱ γωνίαι $\widehat{A\Delta\Gamma}$ καὶ $\widehat{AB\Gamma}$ εἶναι παραπληρωματικαὶ (§ 23).



Σχ. 30

Ἐξ ἄλλου τὸ A' κείται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΓB πρὸς τὸ μέρος τοῦ B . Ἐχομεν

λοιπὸν $A\widehat{BA'} + A\widehat{B\Gamma} = 2$ ὀρθαί, $A\widehat{B\Gamma} + A\widehat{\Delta\Gamma} = 2$ ὀρθ. $\Rightarrow A\widehat{BA'} = A\widehat{\Delta\Gamma}$ καὶ συνεπῶς καὶ τὰ συμπληρώματα αὐτῶν εἶναι ἴσα, ἔστω ω° ἕκαστον. Ἐν E ἡ τομὴ τῆς διχοτόμου AX τῆς $\widehat{BA\Gamma}$ μετὰ τοῦ τμήματος $B\Gamma$, τότε τὰ E καὶ A' κείνται ἑκατέρωθεν τοῦ B , τὰ δὲ E καὶ Δ ἑκατέρωθεν τῆς ευθ AG . Διὰ τοῦτο: $A\widehat{AX} = \omega + \frac{A}{2}$ καὶ $X\widehat{\Delta A} = \frac{A}{2} + \omega$, δηλ. αἱ ἀκτίνες (A, A') καὶ (A, Δ) εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον AX . Τέλος ἡ γωνία

$$\begin{aligned} \widehat{A'AA} &= \widehat{A} + 2\omega = \widehat{A} + 2(90^\circ - (180^\circ - \widehat{B})) = \widehat{A} + 2\widehat{B} - 180^\circ = \\ &= \widehat{A} + 2\widehat{B} - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma}) = \widehat{B} - \widehat{\Gamma} = |\widehat{B} - \widehat{\Gamma}|. \end{aligned}$$

(*Ασκήσεις: 118 - 124).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟΥ

26. (Θ) — Τα συμμετρικά του ὀρθοκέντρου ὡς πρὸς τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου κείνται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον περιφερείας.

Ἀπόδειξις. α') Ἐστω τὸ ὀξυγώνιον τρ.ΑΒΓ. Τὸ ὀρθόκεντρον Η κείται τότε εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου. Ἐστω Η₁ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Η ὡς πρὸς τὴν εὐθ ΒΓ. Τὰ Η καὶ Α κείνται ὡς πρὸς τὴν εὐθ ΒΓ εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον, τὸ μὴ περιέχον τὸ Η₁. Ἐξ ἄλλου εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΖΗΕ τὰ Ζ καὶ Ε κείνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθ ΑΗ καὶ ἐπειδὴ $\widehat{AZH} + \widehat{AEH} = 2$ ὀρθαί, ἔπεται ὅτι εἶναι ἐγγράψιμον καὶ κυρτόν. Ἐπομένως

$$(1) \widehat{BAG} + \widehat{ZHE} = 2 \text{ ὀρθαί.}$$

Εἶναι ὁμοίως, $\widehat{ZHE} = \widehat{BHG}$ (κατὰ

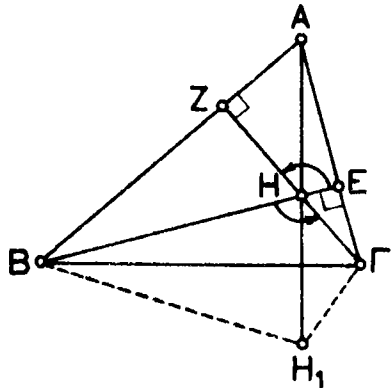
κορυφὴν) = $\widehat{BH_1G}$ (συμμετρικαί), ἄρα ἡ (1) γίνεται:

$$(2) \widehat{BAG} + \widehat{BH_1G} = 2 \text{ ὀρθαί.}$$

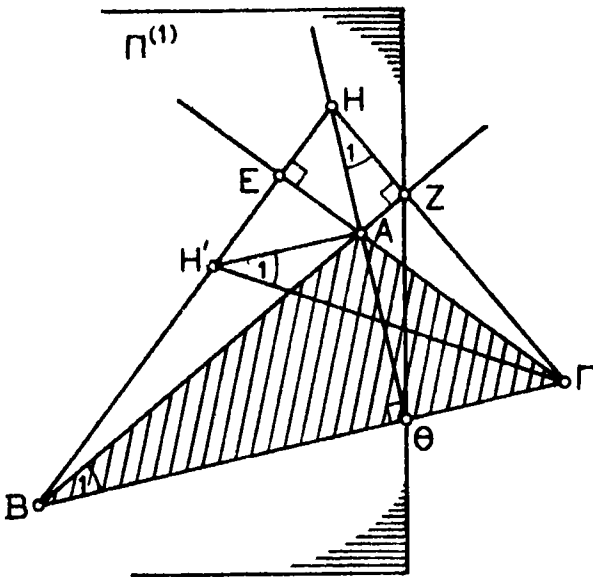
Εἰς τὸ τετράπλευρον ΒΑΓΗ₁ αἱ κορυφαὶ Α καὶ Η₁ κείνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθ ΒΓ καὶ λόγῳ τῆς (2) εἶναι τοῦτο ἐγγράψιμον. Ἄρα τὸ Η₁ κείται ἐπὶ τῆς περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ ἄλλα δύο συμμετρικά τοῦ ὀρθοκέντρου Η.

β') Ἐστω τὸ τρ.ΑΒΓ ἔχον τὴν \widehat{A} ἀμβλείαν. Τότε τὸ ὀρθόκεντρον Η κείται ἔκτος τοῦ τριγώνου καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς ἀμβλείας γωνίας. Ἐστω δὲ Η' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Η ὡς πρὸς τὴν εὐθ ΑΓ. (σχ. 32).

Ἐπειδὴ $\widehat{HZB} = \widehat{H'OB} = 1$ ὀρθή \Rightarrow ΗΖΟΒ ἐγγράψιμον καὶ μάλιστα τὰ Η, Β κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθ ΖΟ, δηλ. εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον Π⁽¹⁾ τὸ περιέχον τὸ Α (διότι, ἀφοῦ τὸ Α κείται μεταξὺ Ζ καὶ Β \Rightarrow Β \in Π⁽¹⁾, ὁμοίως καὶ τὸ Η). Διὰ τοῦτο $\widehat{ZH\Theta} = \widehat{ZB\Theta}$, ἦτοι $\widehat{H_1} = \widehat{B_1}$. Ἀλλὰ καὶ $\widehat{\Gamma HA} = \widehat{\Gamma H'A}$



Σχ. 31



Σχ. 32

ως συμμετρικαί, δηλ. $\widehat{H}_1 = \widehat{H}'_1$. Συνεπώς, $\widehat{B}_1 = \widehat{H}'$, δηλ. $\widehat{ΓΒΑ} = \widehat{ΓΗ'Α}$. 'Επειδή, άκόμη, τὰ Β και Η' κείνται εις τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον ὡς πρὸς τὴν ευθαΓ (τὸ περιέχον τὸ Β), διὰ ταῦτα τὸ ΒΗ'ΑΓ εἶναι ἐγγράψιμον, ἄρα τὸ Η' κείται ἐπὶ τῆς περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας.

27. (Θ) — Εἰς πᾶν τρίγωνον ἡ ἀπόστασις τοῦ περικέντρου ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς εἶναι τὸ ἡμισυ τῆς ἀποστάσεως τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς. 'Ακριβέστερον: ἐὰν Κ τὸ περικέντρον, Η τὸ ὀρθόκεντρον τριγώνου ΑΒΓ και ΚΜ ἡ ἀπόστασις τοῦ Κ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΒΓ, τότε :

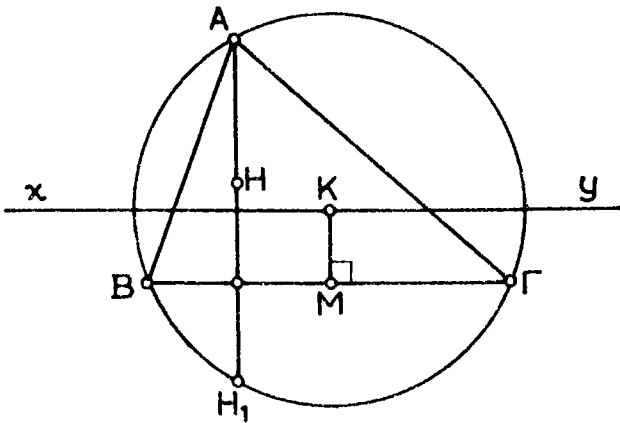
$$\vec{KM} = \frac{1}{2} \vec{AH}.$$

'Απόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν H_1 τοῦ ὀρθοκέντρου Η ὡς πρὸς τὴν ευθΒΓ κείται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοῦ τρ.ΑΒΓ. Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι πᾶσα διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι ἀξων συμμετρίας αὐτοῦ. 'Εὰν λοιπὸν φέρωμεν διὰ τοῦ κέντρου Κ εὐθεῖαν $xy \parallel ΒΓ$ (σχ 33), τότε:

1ον) Τὸ συμμετρικὸν τοῦ H_1 ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ εἶναι τὸ Η.

2ον) Τὸ συμμετρικὸν τοῦ H_1 ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy εἶναι τὸ Α. 'Αλλ' ὅταν ὁ ἀξων συμμετρίας ΒΓ μετατοπισθῇ κατὰ διάνυσμα $\vec{\delta} = \vec{MK}$ κάθετον ἐπ' αὐτόν, τότε τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς σημείου μετατοπίζεται κατὰ διάνυσμα $\vec{2\delta}$ (§ 16 δ').

'Επομένως, $\vec{HA} = 2\vec{MK} \Rightarrow \vec{AH} = 2\vec{KM} \Rightarrow \vec{KM} = \frac{1}{2} \vec{AH}$.



Σχ. 33

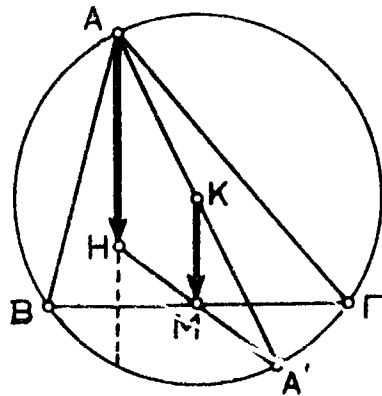
28. (Θ)—Τὰ συμμετρικά τοῦ ὀρθοκέντρου ὡς πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου κείνται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ εἶναι καὶ ἀντιδιαμετρικά τῶν κορυφῶν.

Διότι, ἂν φέρωμεν τὴν διάμετρον AA' (σχ. 34) καὶ θεωρήσωμεν τὸ τρ. AHA' , τότε, ἐπειδὴ τὸ διάνυ-

σμα \vec{KM} ἀρχόμενον ἀπὸ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς AA' τοῦ τρ. AHA' ἔχει τὴν ιδιότητα:

$$\vec{KM} = \frac{1}{2} \vec{AH},$$

διὰ τοῦτο περατοῦται εἰς τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς HA' . Ἀφοῦ τὸ M εἶναι μέσον τοῦ HA' , τὸ συμμετρικὸν τοῦ H ὡς πρὸς τὸ μέσον M τῆς πλευρᾶς $BΓ$ εἶναι τὸ A' , δηλ. κείται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.



Σχ. 34

Ἄλλη ἀπόδειξις: Εἶναι $\widehat{A'GA} = 1^{\circ}$ συνεπῶς $A'G \perp AG$. Εἶναι καὶ εὐθ. $BH \perp AG$, ἔκομένως $A'G \parallel BH$. Ὁμοίως $A'B \parallel ΓH$. Ὅθεν $BHGA'$ εἶναι παραλλ. καὶ συνεπῶς αἱ HA' καὶ $BΓ$ ἔχουν κοινὸν μέσον.

(Ἀσκήσεις: 125-131).

29. (Θ) Ἐθέλει τοῦ Euler — Εἰς πᾶν τρίγωνον τὸ περίκεντρον K , τὸ βυθόκεντρον G καὶ τὸ ὀρθόκεντρον H κείνται ἐπ' εὐθείας καὶ μάλιστα:

$$\vec{KG} = \frac{1}{2} \vec{GH}.$$

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν K καὶ H τὸ περίκεντρον καὶ τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τρ. $AB\Gamma$ καὶ M τὸ μέσον τοῦ $B\Gamma$ (σχ. 35).

Γνωρίζομεν ὅτι $\vec{AH} = 2\vec{KM}$,

ἄρα τὰ διανύσματα \vec{HA} καὶ \vec{KM} εἶναι ἀντίρροπα καὶ συνεπῶς τὰ A καὶ M κείνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθ. HK , ἄρα τὸ τμήμα AM τέμνει τὴν εὐθ. HK εἰς τι σημεῖον G κείμενον μεταξὺ H καὶ K , διότι τὸ AM κείνται ἐντὸς τῆς ταινίας τῶν παρῶν AH , KM .

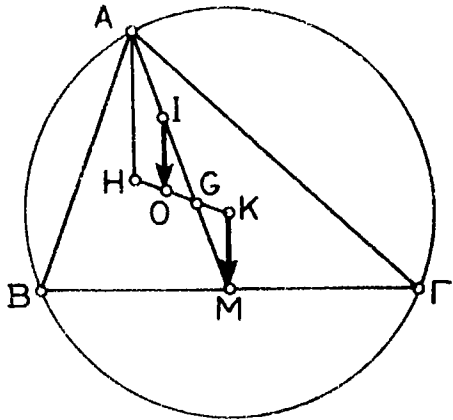
Ἄς ἐνώσωμεν τῶρα τὸ μέσον O τοῦ HG μὲ τὸ μέσον I τοῦ AG .

Ἔχομεν $\vec{IO} = \frac{1}{2}\vec{AH} = \vec{KM}$, ἄρα

τὸ τετράπλευρον $IOMK$ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς:

$KG = GO$ καὶ $MG = GI$. Ἐκ τοῦ ὅτι: $MG = GI = IA$ ἔπεται ὅτι τὸ G εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ ἐκ τοῦ ὅτι $KG = GO = OH$ ἔπεται.

$$\vec{KG} = \frac{1}{2}\vec{GH} = \frac{1}{3}\vec{KH}$$



Σχ. 35

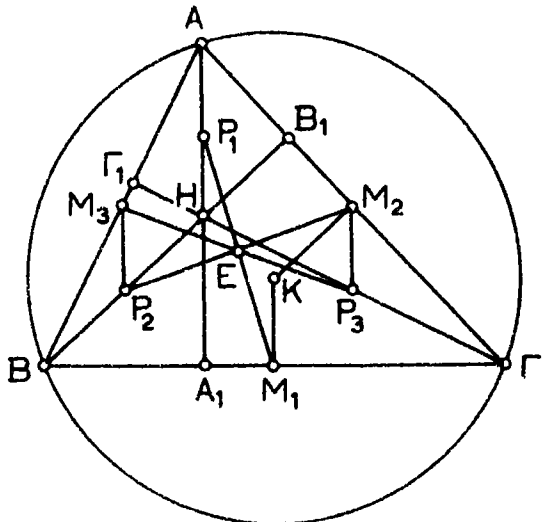
30. (Θ)—Εἰς πᾶν τρίγωνον τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, οἱ πόδες τῶν ὑψῶν καὶ τὰ μέσα τῶν ἀποστάσεων τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τὰς κορυφάς κείνται ἐπὶ μιᾷς περιφερείας. Τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ταύτης εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τοῦ περικέντρου ἀπὸ τοῦ ὀρθοκέντρου, ἢ δὲ ἀκτίς της ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμισυ τῆς ἀκτίνοσ της περὶ τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας. (Κύκλος τῶν ἑννέα σημεῖων ἢ τοῦ EULER).

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν A_1, B_1, Γ_1 οἱ πόδες τῶν ὑψῶν τοῦ τρ. $AB\Gamma$ (σχ. 36), M_1, M_2, M_3 τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, P_1, P_2, P_3 τὰ μέσα τῶν τμημάτων HA, HB, HG , ὅπου H τὸ ὀρθόκεντρον καὶ, τέλος, K τὸ περίκεντρον τοῦ τρ. $AB\Gamma$.

Παρατηροῦμεν ὅτι

$$\vec{M_2P_2} = \frac{1}{2}\vec{AH} = \vec{M_3P_3}$$

καὶ ὅτι $M_2P_2 \perp M_2M_3$ καὶ συνάγομεν ὅτι τὸ τετράπλευρον $P_2M_2M_3P_3$ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον. Ἐπομένως τὰ τμήματα P_2M_2 καὶ M_3P_3 εἶναι ἴσα καὶ ἔχουν καὶ κοινὸν μέσον, ἔστω τὸ E . Ἐντελῶς ὁμοίως τὸ $M_2P_2P_3M_1$ εἶναι ὀρθογώνιον παρῆμον καὶ τὰ τμήματα M_2P_2 καὶ P_1M_1 εἶναι ἴσα καὶ ἔχουν κοινὸν μέσον (τὸ E).



Σχ. 36

Ὡστε τὰ $P_2, M_2, P_1, M_2, P_2, M_1$ κείνται ἐπὶ περιφερείας, τῆς ὁποίας τὰ τμήματα $P_1 M_1, P_2 M_2, P_1 M_2$ εἶναι διάμετροι. Τέλος, ἐπειδὴ ἡ γωνία $P_1 \widehat{A}_1 M_1$ εἶναι ὀρθή, τὸ A_1 κείται ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης. Ὡστε καὶ οἱ πόδες τῶν ὑψῶν περιλαμβάνονται εἰς τὴν ἴδιαν περιφέρειαν.

Ἐπειδὴ τὰ τμήματα $A_1 M_1, M_1 B_1$ εἶναι χορδαὶ τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων, διὰ τοῦτο τὸ κέντρον τῆς E κείται ἐπὶ τῶν μεσοκαθέτων τῶν τμημάτων τούτων. Ἄλλ' αἱ μεσοκάθετοι τὸσον τοῦ $A_1 M_1$, ὅσον καὶ τοῦ $B_1 M_1$, διέρχονται ἀμφότεραι διὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος HK . Ἐπομένως τὸ μέσον τοῦ HK συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον E τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων. Ἡ ἀκτίς ταύτης $EP_1 = KA/2$, δηλ. πρὸς τὸ ἡμισυ τῆς ἀκτίνας KA τοῦ περὶ τὸ $\triangle AB\Gamma$ περιγεγραμμένου κύκλου.

(Ἀσκήσεις : 133 - 135).

31. (Θ) — Ἐθεῖα τοῦ Simson. Ἐάν ἐκ τυχόντος σημείου M , τῆς περιγεγραμμένης περὶ τρίγωνον περιφερείας, ἀχθοῦν κάθετοι ἐπὶ τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, οἱ πόδες τῶν καθέτων τούτων κείνται ἐπ' ἐθεῖας.

Ἀντιστρόφως : ἂν αἱ προβολαὶ σημείου M ἐπὶ τρεῖς ἐθεῖας ὀριζούσας τριγώνων κείνται ἐπ' ἐθεῖας, τότε τὸ M κείται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ὀρίζουν αἱ τρεῖς ἐθεῖαι.

α') Ἀπόδειξις βάσει ἐνὸς σχήματος. Ἐστώσαν M σημεῖον τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ $\text{τρ.} AB\Gamma$ περιφερείας, ὡς εἰς τὸ σχ. 37.

Εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο τὸ M προβάλλεται ἐπὶ τῶν πλευρῶν $B\Gamma$ καὶ $A\Gamma$ εἰς ἑσωτερικὰ σημεῖα τούτων E καὶ Z καὶ ἐπὶ τῆς ἐθεῖας BA προβάλλεται εἰς σημεῖον Δ κείμενον ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς BA , αἱ δὲ γωνίαι $\widehat{\Delta ZM}$ καὶ \widehat{MZE} ἐμφανίζονται ὡς διαδοχικαί, δηλ. τὰ τμήματα $Z\Delta$ καὶ ZE ἑκατέρωθεν τοῦ MZ . Ὅθεν, διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ Δ, Z, E κείνται ἐπ' ἐθεῖας, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι αἱ ἐφεξῆς

γωνίαι $\widehat{\Delta ZM}$ καὶ \widehat{MZE} εἶναι παραπληρωματικαί.

Τὰ εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο παρουσιαζόμενα τετράπλευρα $MZEG, MZ\Delta\Delta$ καὶ $MA-B\Gamma$ εἶναι ἐγγράψιμα καὶ ἔχομεν:

(1) $\widehat{MZE} + \widehat{M\Gamma E} = 2\text{ορθ.}$ (ἐκ τοῦ $MZEG$).

(2) $\widehat{M\Gamma E} = \widehat{M\Delta\Delta}$ (ὡς παραπληρώματα τῆς $\widehat{B\Delta M}$).

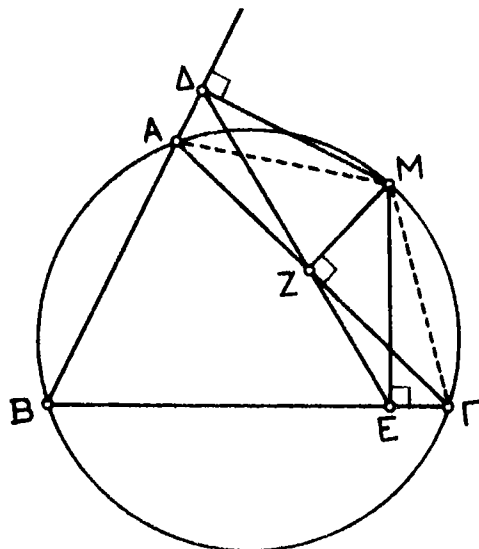
(3) $\widehat{M\Delta\Delta} = \widehat{MZA}$ (ἐκ τοῦ $MZ\Delta\Delta$).

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ἐπε-

ταὶ $\widehat{M\Gamma E} = \widehat{MZA}$, ὁπότε ἡ

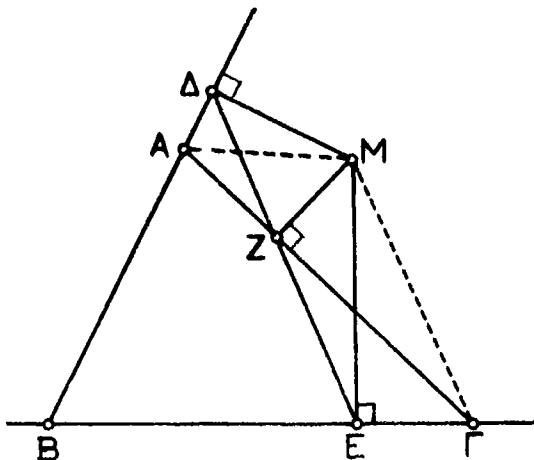
(1) δίδει:

$$\widehat{MZE} + \widehat{MZA} = 2\text{ορθ.} \Rightarrow \Delta, Z, E \text{ κείνται ἐπ' ἐθεῖας.}$$



Σχ. 37

β') 'Αντίστροφον. Ἐς ὑποθέσωμεν, ὡς ἐν σχήματι 38, ὅτι αἱ προβολαὶ Δ, Ε, Ζ τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοιχῶς κείνται ἐπ' εὐθείας. Τότε ἔχομεν βάσει τοῦ σχ. 38, $\widehat{\Delta AM} = \widehat{\Delta ZM}$ (ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου ΜΖΑΔ) καὶ $\widehat{\Delta ZM} = \widehat{MGE} \equiv \widehat{MGB}$ (ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου ΜΖΕΓ). Ἔπειτα: $\widehat{\Delta AM} = \widehat{MGB} \Rightarrow \text{ΜΓΒΑ ἐγγράψιμον} \Rightarrow$ τὸ Μ κείνται ἐπὶ τῆς διὰ τῶν ΑΒ Γ, διερχομένης περιφέρειας.



Σχ. 38

32. (Θ) Εὐθεία τοῦ Steiner. — Παντός σημείου Μ τῆς περι τριγώνου ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφέρειας τὰ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου κείνται ἐπ' εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου. Ἡ εὐθεῖα αὕτη καλεῖται εὐθεῖα Steiner ἀντίστοιχος πρὸς τὸ Μ καὶ εἶναι παρ/λος πρὸς τὴν εὐθεῖαν τοῦ Simson τὴν ἀντίστοιχον πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ.

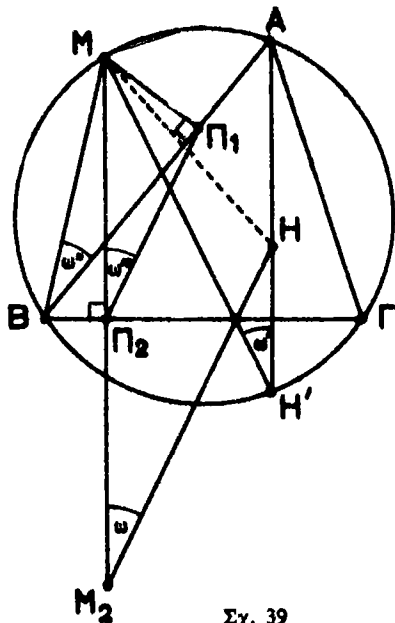
'Απόδειξις. α') Ἐάν Π_1, Π_2, Π_3 εἶναι αἱ προβολαὶ τοῦ Μ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοιχῶς καὶ M_1, M_2, M_3 τὰ συμμετρικὰ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰς ἰδίαις εὐθείαις, τότε $M_1M_2 // \Pi_1 \Pi_2$ καὶ $M_1M_3 // \Pi_1 \Pi_3$ καὶ ἐπειδὴ τὰ Π_1, Π_2, Π_3 κείνται ἐπὶ τῆς εὐθείας Simson, ἔπειτα ὅτι αἱ εὐθεῖαι M_1M_2 καὶ M_1M_3 εἶναι παρ/λοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν $\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3$, ἄρα ταυτίζονται καὶ τὰ M_1, M_2, M_3 κείνται ἐπὶ εὐθείας // πρὸς τὴν εὐθεῖαν Simson τοῦ σημείου Μ.

β') Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι ἡ εὐθεῖα Steiner $M_1M_2M_3$ διέρχεται διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ $\triangle AB\Gamma$ (σχ. 39). Γνωρίζομεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν Η' τοῦ Η ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ κείνται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περι τὸ $\triangle AB\Gamma$ περιφέρειας.

'Επειδὴ τὰ τμήματα ΜΗ' καὶ M_2H εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, διὰ τοῦτο τὸ τραπέζιον $MM_2H'H$ εἶναι ἰσοσκελές, ἄρα ἐγγράψιμον. Ἐκ τῶν ὀμοκυκλικῶν τετράδων (M_2, H', H, M) , (A, H', B, M) καὶ (M, B, Π_1, Π_2) ἔχομεν κατὰ σειρὰν τὰς ἰσότητας:

$$\widehat{\omega} = \widehat{\omega'} = \widehat{\omega''} = \widehat{\omega'''} \Rightarrow \widehat{\omega} = \widehat{\omega'''} \Rightarrow M_2H // \Pi_1 \Pi_2.$$

Ὡστε ἡ εὐθεῖα M_1H διέρχεται διὰ τοῦ συμμετρικοῦ M_2 τοῦ Μ ὡς



Σχ. 39

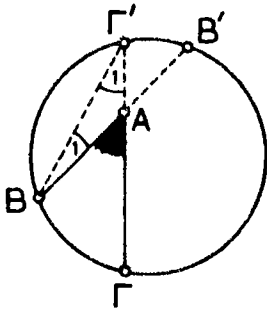
πρός την ευθBΓ και είναι παράλληλος προς την εὐθείαν Simson, δηλ. την ευθ Π₂Π₁. Ἐὰρ ἡ ευθM₂H ταυτίζεται με την εὐθείαν τοῦ Steiner.

Πόρισμα — Ἡ εὐθεῖα Simson, ἡ ἀντίστοιχος πρὸς τὸ M, διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀποστάσεως τοῦ M ἀπὸ τοῦ ὀρθοκέντρου H.

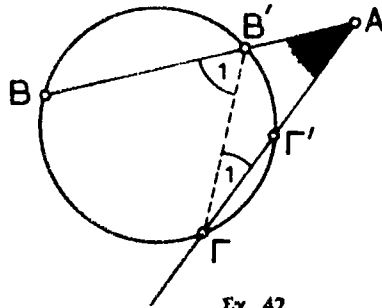
Τοῦτο γίνεται φανερόν ἐκ τοῦ τρ. MM₂H (σχ. 39), εἰς ὃ ἡ εὐθεῖα Π₂Π₁ εἶναι // M₂H καὶ διερχομένη διὰ τοῦ μέσου τῆς MM₂, διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς MH.

33. Γωνία δύο ἡμιευθειῶν τεμνουσῶν περιφέρειαν.

1) Γωνία ἔχουσα τὴν κορυφὴν τῆς ἐντὸς κύκλου ἔχει μέτρον τὸ ἡμίθροισμα τῶν μέτρων τῶν τόξων τῶν ἀποτεμνομένων ὑπ' αὐτῆς καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς.



Σχ. 41



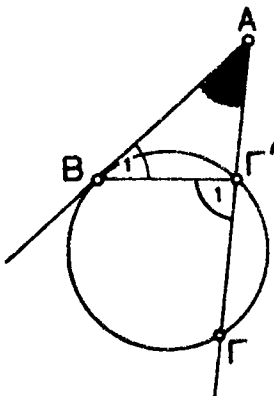
Σχ. 42

Ἐστω ἡ γωνία $\widehat{BA\Gamma}$, ὡς εἰς τὸ σχ. 41. Ἔχομεν κατὰ σειρὰν:

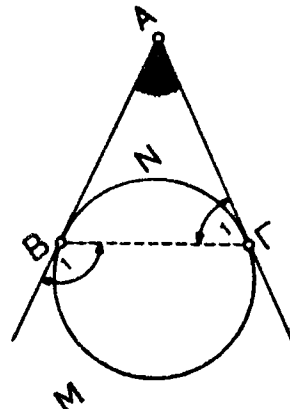
$$\widehat{BA\Gamma} = \widehat{\Gamma'_1} + \widehat{B_1} \Rightarrow \text{μέτρον } \widehat{BA\Gamma} = \text{μέτρον } \widehat{\Gamma'_1} + \text{μέτρον } \widehat{B_1} = \frac{1}{2} (\text{μέτρον τόξου}$$

$$\widehat{B\Gamma} + \text{μέτρον τόξου } B'\Gamma')$$

2) Γωνία ἔχουσα τὴν κορυφὴν τῆς ἐκτὸς κύκλου ἔχει μέτρον τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν μέτρων τῶν τόξων τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς.



Σχ. 43



Σχ. 44

Ἐστω ἡ γωνία \widehat{BAG} μὲ A ἔξω τοῦ κύκλου, ὡς εἰς τὸ σχ. 42.

Ἐχομεν ὅτι:

$$\widehat{B'_1} = \widehat{A} + \widehat{\Gamma_1} \Rightarrow \widehat{BAG} = \widehat{B'_1} - \widehat{\Gamma_1} \Rightarrow \text{μέτρον } \widehat{BAG} = \text{μέτρον } \widehat{B'_1} - \text{μέτρον } \widehat{\Gamma_1} = \frac{1}{2} (\text{μέτρον τόξου } \widehat{B\Gamma} - \text{μέτρον τόξου } \widehat{B'\Gamma'}).$$

iii) Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἰσχύει καὶ ὅταν ἡ μῖα ἢ καὶ αἱ δύο πλευραὶ τῆς γωνίας ἐφάπτονται τοῦ κύκλου.

Δηλ. εἰς σχ. 43 ἰσχύει: $\text{μέτρον } \widehat{BAG} = \frac{\text{μέτρον } \widehat{B\Gamma} - \text{μέτρον } \widehat{B'\Gamma'}}{2}$ καὶ διὰ τὸ σχ.

$$44 \text{ μέτρον } \widehat{BAG} = \frac{\text{μέτρον } \widehat{BM\Gamma} - \text{μέτρον } \widehat{BN\Gamma}}{2}.$$

Αἱ ἀποδείξεις εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς προηγουμένας.

ΛΕΚΗΞΕΙΣ

103. Ἐάν εἰς τὰ ἄκρα δύο χορδῶν κύκλου καθέτως καὶ ἐντὸς τοῦ κύκλου τεμνομένων ἀχθοῦν ἐφαπτόμενοι τοῦ κύκλου, τὸ ὑπὸ τούτων σχηματιζόμενον τετράπλευρον εἶναι ἐγγράμμιον.

104. Ἡ περιφέρεια ἢ διερχομένη διὰ δύο ἀπέναντι κορυφῶν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τραπέζιου καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου διέρχεται καὶ διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν εὐθειῶν τῶν φερουσῶν τὰς μὴ παρ/λους πλευράς τοῦ τραπέζιου.

105. Ἐάν ἐκ τινος σημείου Γ χορδῆς AB ἢ τῆς προεκτάσεως τῆς ἀχθῆς κάθετος ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ σημείου τούτου διερχομένην ἀκτίνα, τὸ μέρος τῆς καθέτου ταύτης τὸ περιεχόμενον μεταξύ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς τέμνεται δίχα ὑπὸ τοῦ σημείου Γ .

106. Ἐστω ἰσοσκελὲς $\text{τρ.} AB\Gamma$ μὲ $AB = A\Gamma$. K τὸ περίκεντρον αὐτοῦ καὶ Σ τὸ συμμετρικόν τοῦ K ὡς πρὸς τὴν εὐθ α B . Φέρομεν διὰ τοῦ Σ εὐθεῖαν $//A\Gamma$ τέμνουσαν εἰς Δ τὴν $B\Gamma$. Νὰ δειχθῆ ὅτι $\widehat{\Sigma K\Delta} = 1$ ὀρθή.

107. Εἰς πᾶν κυρτὸν τετράπλευρον, αἱ τέσσαρες ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι σχηματίζουν ἐγγράμμιον τετράπλευρον. Αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου τούτου προεκτινόμεναι διέρχονται διὰ τῶν σημείων τομῆς τῶν εὐθειῶν, ἐφ' ὧν κείνται αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου. Ἡ ὁμοία ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς τέσσαρας ἐξωτερικὰς διχοτόμους τοῦ τετραπλεύρου.

Τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον.

108. Καλεῖται ὀρθικὸν τρίγωνον τοῦ $\text{τρ.} AB\Gamma$ τὸ τρίγωνον $H_1H_2H_3$, τὸ ἔχον κορυφὰς τοὺς πόδας H_1, H_2, H_3 τῶν ὑψῶν τοῦ $\text{τρ.} AB\Gamma$.

Ἰδιότητες: i) Οἱ φορεῖς τῶν ὑψῶν καὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι διχοτόμοι ἐσωτερικαὶ ἢ ἐξωτερικαὶ τοῦ ὀρθικοῦ τοῦ τριγώνου.

ii) Τὸ τρίγωνον μὲ κορυφὰς τὰ παράκεντρα τοῦ $\text{τρ.} AB\Gamma$ ἔχει ὡς ὀρθικὸν τὸ $\text{τρ.} AB\Gamma$.

iii) Αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου $H_1H_2H_3$ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιγεγραμμένης περιφέρειας τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ τὰς ἀγομένας εἰς τὰς κορυφὰς A, B, Γ , αὐτοῦ (καὶ ἐπομένως κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀκτίνας $KA, KB, K\Gamma$, ὅπου K τὸ περίκεντρον τοῦ $\text{τρ.} AB\Gamma$).

Σημειον του Μίquel.

109. i) 'Επί των πλευρών AB, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ABΓ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τυχόντα σημεῖα E, Z, H. Νά δειχθῆ ὅτι αἱ περί τὰ τρίγωνα AEH, BEZ, ΓZH περιγεγραμμένα περιφέρεαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου M. (Σημειον του Μίquel ὡς πρὸς τὰ E, Z, H).

ii) 'Ισχύει ἡ σχέσις: $\widehat{AMΓ} = \widehat{B} + \widehat{EHZ}$, ἂν τὸ M εὕρισκεται ἐντὸς τοῦ τρ. ABΓ.

110. Δοθέντος τρ. ABΓ καὶ σημείου M ἐντὸς αὐτοῦ ὑπάρχουν ἐπὶ των πλευρῶν τοῦ τρ. ABΓ ἄπειροι τριάδες σημείων E, Z, H ἔχουσαι σημεῖον Μίquel τὸ M, ὅλα δὲ τὰ τρίγωνα EZH ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

111. i) 'Επί των πλευρῶν δοθείσης γωνίας \widehat{xOy} κινουῦνται δύο σημεῖα A καὶ B οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα OA + OB νά ἴσονται πάντοτε μεθ' ἑαυτῶν (σταθερὸν) τμήμα S. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ περί τὸ τρ. OAB περιγεγραμμένη περιφέρεια διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου τῆς διχοτόμου τῆς \widehat{xOy} . ii) 'Εάν OA — OB = S (σταθ.), τότε τὸ σταθερὸν σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς \widehat{xOy} .

112. Αἱ μεσοκάθετοι των πλευρῶν AΓ, AB τριγ. ABΓ τέμνουν τοὺς φορεῖς των πλευρῶν AB, AΓ ἀντιστοίχως εἰς Π καὶ P. Νά δειχθῆ ὅτι τὰ σημεῖα B, Γ, Π, P κεῖνται ἐπὶ περιφερείας, ἣτις διέρχεται διὰ τοῦ περικέντρου τοῦ τριγ. ABΓ.

113. 'Εστὼ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ABΓΔ μεθ' AB//ΔΓ, τοῦ ὁποῖου ἐκάστη διαγώνιος ἴσεται μετὰ τὸ ἄθροισμα των βάσεων. 'Εάν E τὸ κοινὸν σημεῖον των διαγωνίων του, νά δειχθῆ ὅτι τὰ μέσα των τμημάτων EA, EB, EΓ, EA, AA, BΓ καὶ αἱ προβολαὶ τοῦ E ἐπὶ τὰς μὴ παρὶλους πλευρὰς κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

114. 'Εάν εἰς δύο ἀπέναντι κορυφὰς ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τραπέζιου ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, ἡ ὑπὸ τούτων σχηματιζομένη γωνία ἴσεται πρὸς τὴν γωνίαν των μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπέζιου καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ ἐνοῦσα τὰς κορυφὰς των δύο τούτων γωνιῶν εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπέζιου.

115. 'Η μετὰ διάμετρον τὴν βάσιν BΓ τριγώνου ABΓ γραφομένη περιφέρεια τέμνει τὰς ἐσωτερικὰς διχοτόμους των γωνιῶν \widehat{B} καὶ $\widehat{\Gamma}$ εἰς σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας μετὰ τὰς ἐπαφὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ των πλευρῶν AB, AΓ,

116. 'Εάν AA', BB', ΓΓ' εἶναι τὰ ὕψη τρ. ABΓ καὶ BB'', ΓΓ'' εἶναι ὕψη των τριγώνων BA'Γ' καὶ ΓA'B', νά δειχθῆ ὅτι ἡ μεσοκάθετος τῆς B''Γ'' διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς BΓ.

117. 'Εάν αἱ διαγώνιοι ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον κυρτοῦ τετραπλεύρου ABΓΔ τέμνουνται καθέτως εἰς τὸ E, (τότε 1ον) ἡ κάθετος ἐκ τοῦ E ἐπὶ μίαν πλευρὰν διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς καὶ 2ον) αἱ προβολαὶ τοῦ E ἐπὶ τὰς πλευρὰς εἶναι κορυφαὶ ἐγγραψίμου καὶ περιγραψίμου συγχρόνως τετραπλεύρου, τοῦ ὁποῖου ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια διέρχεται διὰ των μέσων των πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ABΓΔ.

— Νά κατασκευασθῆ τρ. ABΓ :

118. 'Εκ των R, ν_a , δ_A .

119. 'Εκ των ν_a , μ_a , δ_A .

120. 'Εκ των R, ν_a , $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \omega$,

ὅπου R ἡ ἀκτίς τοῦ περικύκλου, ν_a , μ_a , δ_A , τὸ ὕψος ἡ διάμεσος καὶ ἡ διχοτόμος τὰ ἐκ τῆς κορυφῆς A ἀγόμενα.

121. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον ABΓ, οὔτινος δίδεται τὸ μέσον καὶ ἡ διεύθυνσις μιᾶς πλευρᾶς BΓ, ἡ διαφορὰ των παρ' αὐτὴν γωνιῶν καὶ ἡ κορυφή A.

122. Νά κατασκευασθῆ ὀρθογ. τρίγ., οὔτινος δίδονται τρία σημεῖα ἐπὶ τοῦ φορέως τῆς ὑποτείνουσας, τὰ ὁποῖα εἶναι κατὰ σειρὰν οἱ πόδες τῆς διαμέσου, τῆς διχοτόμου καὶ τοῦ ὕψους.

123. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον, τοῦ ὁποῖου δίδονται: ἡ διαφορὰ τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν καὶ οἱ πόδες τοῦ ὕψους, τῆς διαμέσου καὶ τῆς διχοτόμου τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.

124. Ἐάν τριγώνου μία γωνία εἶναι 60° , τότε τὸ ἔγκεντρον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὸ περίκεντρον καὶ ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον.

125. i) Ἐάν δύο τρίγωνα εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν ἴδιον κύκλον καὶ ἔχουν κοινὴν βάσιν, τότε τὸ τμήμα τὸ συνδέον τὰ ὀρθόκεντρά των εἶναι ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ συνδέον τὰς κορυφὰς των (βλ. § 27).

ii) Ἐάν A, B, Γ, Δ ὁμοκυκλικά καὶ H_1, H_2, H_3, H_4 τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τριγῶνων $B\Gamma\Delta, \Gamma\Delta A, \Delta A B, A B \Gamma$, δεῖξατε ὅτι τὰ τέσσαρα τμήματα $AH_1, BH_2, \Gamma H_3, \Delta H_4$ ἔχουν κοινὸν μέσον.

126. Ἐάν H τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ $\Delta A B \Gamma$, τότε αἱ περὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα $A B \Gamma, H B \Gamma, H \Gamma A, H A B$ περιγεγραμμένα περιφέρειαι εἶναι ἴσαι.

127. Εἰς δοθέντα κύκλον νά ἐγγραφῆ τρίγωνον, τοῦ ὁποῖου δίδεται μία κορυφή καὶ τὸ ὀρθόκεντρον.

128. Νά κατασκευασθῆ $\tau\rho.A B \Gamma$, οὔτινος δίδεται τὸ μέσον M καὶ ὁ φορεὺς $\chi\psi$ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$, τὸ ὀρθόκεντρον H καὶ τοιοῦτον, ὥστε $B - \Gamma = 1$ ὀρθή.

129. Τριγώνου $A B \Gamma$ μεταβλητοῦ ἡ κορυφή A μένει σταθερά, τὸ ὀρθόκεντρον H ἐπίσης καὶ ἡ εὐθεῖα (ε) ἡ φέρουσα τὴν πλευρὰν $A B$ ἐπίσης σταθερά. Ζητεῖται ὁ γ. τόπος τοῦ περικέντρου τοῦ $\tau\rho.A B \Gamma$.

130. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) τεμνόμεναι εἰς O . Ἐπὶ τῆς (ε_1) λαμβάνομεν σημεῖον A καὶ ἐπὶ τῆς (ε_2) σημεῖον B τοιαῦτα, ὥστε $A B = l$ (= δεδομένον τμήμα). Ποῖον τὸ σύνολον τῶν περικέντρων τῶν τριγῶνων $O A B$;

131. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν ὀρθοκέντρων τῶν τριγῶνων τῆς προηγουμένης ἀσκῆσεως;

132. Ἐάν O, O_1, O_2, O_3 τὸ ἔγκεντρον καὶ τὰ παράκεντρα τριγώνου $A B \Gamma$, τότε τὰ μέσα τῶν 6 τμημάτων τῶν συνδεδόντων τὰ ἀνωτέρω τέσσαρα σημεῖα ἀνὰ δύο κεῖνται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ $\tau\rho.A B \Gamma$ περιφέρειας.

133. Δεῖξατε ὅτι ἰκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ὁ κύκλος Euler ἐνὸς τριγώνου $A B \Gamma$ ἔχη τὸ κέντρον του ἐπὶ τῆς $B\Gamma$, εἶναι:

$$\left| \widehat{B} - \widehat{\Gamma} \right| = 90^\circ$$

134. Νά δευχθῆ ὅτι οἱ πόδες B', Γ' τῶν ὕψων $B B', \Gamma \Gamma'$ τριγώνου $A B \Gamma$ εἶναι συμμετρικοὶ ὡς πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τῶν 9 σημεῖων τοῦ τριγώνου, τὴν διερχομένην διὰ τοῦ μέσου Δ τῆς $B\Gamma$.

135. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὔτινος δίδονται δύο κορυφαὶ καὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῶν 9 σημεῖων.

136. Ἐστὼ P σημεῖον τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγ. $A B \Gamma$ περιφέρειας. Ἐάν ἡ διὰ τοῦ P διάμετρος τέμνη τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ εἰς A' , δεῖξατε ὅτι ἡ προβολὴ τοῦ A' ἐπὶ τὴν $P A$ ἀνήκει εἰς τὴν εὐθεῖαν Simson τοῦ P ὡς πρὸς τὸ τρίγωνον $A B \Gamma$.

137. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν A δεδομένου ἰσοσκελοῦς $\tau\rho.A B \Gamma$, ὅπου $A B = A \Gamma$, γράφομεν περιφέρειαν ἀφήνουσαν τὰ B, Γ ἐκτὸς αὐτῆς καὶ ἐκ τῶν B καὶ Γ φέρομεν ἑφα-

πομένως της περιφέρειας ταύτης μή συμμετρικάς ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς \widehat{A} . Ἐάν E καὶ Z τὰ σημεῖα ἐπαφῆς καὶ O τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$, i) νὰ δειχθῆ ὅτι τὰ O, E, Z κείνται ἐπ' εὐθείας, ii) νὰ εὐρεθῆ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου τοῦ EZ , ὅταν ἡ ἀκτίς τῆς γραφείσης περιφέρειας μεταβάλλεται.

138. Μεταβλητὴ περιφέρεια ἔχουσα τὸ κέντρον τῆς ἐπὶ τοῦ φορέως τῆς βάσεως $B\Gamma$ δεδομένου ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ διερχομένη διὰ τῆς κορυφῆς A τέμνει τὰς εὐθείας $AB, A\Gamma$ εἰς Δ καὶ E . Τόπος τοῦ μέσου τῆς ΔE .

139. Νὰ κατασκευασθῆ τρ. $AB\Gamma$ ἐκ τῆς κορυφῆς A τοῦ ὀρθοκέντρου H καὶ τῆς εὐθείας Simson (s) τῆς ἀντιστοιχοῦσης εἰς τὸ μέσον τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$, ἐφ' οὗ βαίνει ἡ \widehat{A} .

140. i) Νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ περιφέρεια τῶν 9 σημείων τοῦ τρ. $AB\Gamma$ εἶναι ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν συνδεόντων τὸ ὀρθόκεντρον H μὲ τὰ σημεῖα τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρ. $AB\Gamma$ περιφέρειας.

ii) Νὰ δειχθῆ ὅτι ὅλαι αἱ εὐθεῖαι Simson αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὸ τρ. $AB\Gamma$ συναντοῦν τὴν περιφέρειαν τῶν 9 σημείων τοῦ τρ. $AB\Gamma$.

141. Ἐστω εὐθεῖα (ε) διερχομένη διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου H τριγώνου $AB\Gamma$. i) Νὰ εὐρεθῆ σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφ. ($AB\Gamma$) ἔχον τὴν εὐθειαν (ε) ὡς εὐθειαν Steiner (ἀναφορικῶς πρὸς τὸ τρ. $AB\Gamma$). ii) Νὰ δειχθῆ ὅτι τὰ συμμετρικά τῆς (ε) ὡς πρὸς τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν τοῦ τρ. $AB\Gamma$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῆς περιφέρειας ($AB\Gamma$).

142. Ἐάν K τὸ περίκεντρον τρ. $AB\Gamma$ καὶ M_1, M_2 δύο σημεῖα τῆς περιγεγραμμένης περιφέρειας τοιαῦτα, ὥστε $M_1\widehat{K}M_2 = \theta$, ὑπολογίσατε τὴν γωνίαν τῶν δύο εὐθειῶν Simson τῶν ἀντιστοιχοῦσων εἰς τὰ σημεῖα M_1 καὶ M_2 .

Ἐδρετε τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα δύο εὐθεῖαι Simson εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

(Ἐπόδειξις. Ἄρκει νὰ εὐρεθῆ ἡ γωνία, ἣν σχηματίζουν αἱ δύο εὐθεῖαι Steiner αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ M_1 καὶ M_2 (§ 32). Πρὸς τοῦτο ἄρκει νὰ εὐρεθῆ ἡ γωνία τῶν συμμετρικῶν τῶν δύο εὐθειῶν Steiner ὡς πρὸς τὴν ευθ $B\Gamma$).

Σημεῖον Miquel τετραπλεύρου.

143. Ἐστῶσαν τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνά δύο τεμνόμεναι καὶ ἀνά τρεῖς μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Νὰ δειχθῆ ὅτι:

i) Αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα, τὰ ὅποια ὀρίζουν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι λαμβανόμεναι ἀνά τρεῖς, ἔχουν ἓν σημεῖον κοινόν. (Σημεῖον Miquel τοῦ τετραπλεύρου.).

ii) Τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τεσσάρων, ἀνωτέρω, τριγῶνων κείνται ἀπ' εὐθείας.

(Ἐπόδειξις. i) Ἐστω M τὸ δεύτερον κοινόν σημεῖον τῶν δύο περιγεγραμμένων περιφερειῶν. Τότε (§ 31) αἱ προβολαὶ τοῦ M ἐπὶ τὰς τέσσαρας ἀνωτέρω εὐθείας κείνται ἐπ' εὐθείας. Συνεπῶς τὸ M ἀνήκει καὶ εἰς τὰς δύο ἄλλας περιγεγραμμένας περιφέρειας. ii) Τὸ M ἔχει ὡς πρὸς τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὴν ἴδιαν εὐθειαν Steiner (§ 32).

144. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, τοῦ ὁποῦ γνωρίζομεν τὰ σημεῖα τομῆς τῶν προεκτάσεων τῶν διχοτόμων τοῦ μετὰ τῆς περιγεγραμμένης περιφέρειας.

145. Ἐστῶσαν O καὶ O_1 τὸ ἔγκεντρον καὶ τὸ παράκεντρον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν γωνίαν \widehat{A} τριγώνου $AB\Gamma$ ἄγγεγραμμένου εἰς κύκλον.

Νὰ δειχθῆ ὅτι τὸ μέσον τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$ (ἐφ' οὗ βαίνει ἡ \widehat{A}) εἶναι κέντρον περιφέρειας διερχομένης διὰ τῶν B, O, Γ, O_1 .

146. Εἰς πᾶν τρ. $AB\Gamma$ τὸ παράκεντρον O_1 (τὸ ἐντὸς τῆς \widehat{A}) βλέπει τὴν μὲν πλευρὰν AG ὑπὸ γωνίαν $\widehat{B}/2$, τὴν δὲ AB ὑπὸ γωνίαν $\widehat{\Gamma}/2$.

147. Ἐστω $AB\Gamma\Delta$ τετράπλευρον κυρτὸν ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ O_1, O_2 τὰ ἔγκεντρα τῶν τριγῶνων $AB\Gamma$ καὶ $\Delta B\Gamma$. Ἐὰν H καὶ Θ εἶναι τὰ μέσα τῶν ἐλασσόνων τόξων \widehat{AB} καὶ $\widehat{\Gamma\Delta}$, νὰ δειχθῆ ὅτι $O_1O_2 // H\Theta$ (βλ. ἄσκ. 145). Νὰ δειχθῆ ἐπίσης ὅτι τὰ ἔγκεντρα τῶν τεσσάρων τριγῶνων, τὰ ὅποια ὀρίζουν αἱ κορυφαὶ λαμβανόμεναι ἀνά τρεῖς, εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου παρίμου.

Βέλος τόξου.

Καλεῖται βέλος τόξου \widehat{AB} ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου M τοῦ τόξου ἀπὸ τῆς χορδῆς AB αὐτοῦ.

148. Νὰ δειχθῆ ὅτι εἰς πᾶν τρ. $AB\Gamma$ τὸ βέλος τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$ τοῦ περιέχοντος τὸ A ἰσοῦται μὲ $(\rho_\beta + \rho_\gamma)/2$, ἐνῶ τὸ βέλος τοῦ μὴ περιέχοντος τὸ A τόξου $\widehat{B\Gamma}$ τοῦ περικύκλου ἰσοῦται μὲ $(\rho_\alpha - \rho)/2$. Ὡς ἐφαρμογὴ, νὰ δειχθῆ ἡ σχέσις $\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma = 4R + \rho$. (R ἀκτίς περιγεγραμμένου, $\rho, \rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$ αἱ ἀκτίνες ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένων κύκλων)

149. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον ἐκ τῶν R, ρ, ρ_α (Ἵπόδ. Νὰ ληφθῆ ὑπ' ὄψιν ὅτι $(\rho_\alpha - \rho)/2$ ἰσοῦται μὲ τὸ βέλος τοῦ τόξου, ἐφ' οὗ βαίνει ἡ \widehat{A} . Βλέπε καὶ ἄσκ. 145).

Ὁρθοκεντρικὴ τετράς.

Τέσσαρα σημεῖα λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα, ὅταν ἕκαστον εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγῶνου τοῦ ὀριζομένου ὑπὸ τῶν τριῶν ἄλλων. Οὕτως αἱ κορυφαὶ A, B, Γ τριγῶνου καὶ τὸ ὀρθόκεντρον H αὐτοῦ ἀποτελοῦν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα. Ἐπίσης τὸ ἔγκεντρον O καὶ τὰ παράκεντρα O_1, O_2, O_3 τυχόντος τριγῶνου.

150. Διὰ τοῦ ἐνός κοινοῦ σημείου K δύο ὀρθογωνίας τεμνομένων περιφερειῶν (O) καὶ (O') (δηλαδὴ $KO \perp KO'$) φέρομεν δύο καθέτους ἐπ' ἀλλήλας εὐθείας, ἐξ ὧν ἡ πρώτη ἐπανατέμνει τὰς περιφερείας (O) καὶ (O') εἰς A καὶ A' , ἡ δὲ δευτέρα εἰς B καὶ B' ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῆ ὅτι τὰ A, A', B, B' ἀποτελοῦν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα.

151. Τὰ τέσσαρα τρίγωνα μιᾶς ὀρθοκεντρικῆς τετράδος ἔχουν τὸ αὐτὸ ὀρθικὸν τρίγωνον καὶ τὸ αὐτὸ κέντρον κύκλου τῶν 9 σημείων. Τὰ περίκεντρα δὲ τῶν τεσσάρων τούτων τριγῶνων ἀποτελοῦν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΦ' ΟΛΗΣ ΤΗΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗΣ ΥΛΗΣ

Ὅμις Α (Σχετικῶς ἀπλᾶι ἀσκήσεις)

152. Τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγῶνου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ δύο ἐφαπτομένων κύκλου καὶ τῆς χορδῆς τῶν ἐπαφῶν ἀπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς ἀπόστασιν ἴσην τῇ ἀκτίνι τοῦ κύκλου.

153. Πᾶν εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένον παρίμον εἶναι ὀρθογώνιον.

154. Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν ἀχθῆ τυχούσα εὐθεῖα, αἱ εἰς τὰ σημεῖα τομῆς αὐτῆς καὶ τῶν περιφερειῶν ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι εἶναι παράλληλοι.

155. Αἱ κορυφαὶ πενταγώνου ἐγγεγραμμένου χωρίζουν τὴν περιφέρειαν εἰς διαδοχικὰ τόξα ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν: $5 : 7 : 8 : 6 : 4$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ πενταγώνου.

156. Ἐὰν σημεῖον προβάλλεται εἰς A, B, Γ ἐπὶ τὰς πλευρὰς καὶ τὴν διχοτόμον μιᾶς γωνίας, τότε ἡ $\Gamma A = \Gamma B$.

157. Ἐὰν O τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ κύκλου, τότε τὰ κέντρα τῶν περὶ τὰ τρίγωνα $OAB, O\Gamma A, O\Gamma B$ περιγεγραμμένων κύκλων κείνται ἐπὶ τῆς περὶ τὸ $AB\Gamma$ περιγεγραμμένης περιφερείας.

158. Ἐντός τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΒΖΓ ἔχοντα τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ ὡς ὑποτείνουσας καὶ ΑΕ//ΓΖ. Νὰ δεიχθῆ ὅτι ἡ εὐθ. ΕΖ εἶναι ἐξωτερικὴ διχοτόμος εἰς ἀμφοτέρω τὰ τρίγωνα.

159. Δοθέντος τετραγώνου ΑΒΓΔ φέρομεν διὰ τοῦ Α δύο εὐθείας Αx, Ay καθέτους ἐπ' ἀλλήλας, ἐξ ὧν ἡ Αx τέμνει τὴν ευθΓΔ εἰς Ε καὶ ἡ Ay τὴν ευθΒΓ εἰς Ζ. Νὰ δειχθῆ ὅτι τὸ μέσον Μ τῆς ΕΖ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΔ.

160. Εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΖΓ καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τετραγώνου ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΕ. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

161. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ἔχον μίαν πλευράν του ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας. Νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ ἐνοῦσα τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας μὲ τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου εἶναι διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας.

162. Ἐστω Ο τὸ κέντρον ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ. Φέρομεν τὴν $BE \perp AG$. Νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς \widehat{OBE} τέμνει τὴν ΔΓ εἰς Ζ οὕτως, ὥστε $GZ = GB$.

163. Σημεῖον Α κείμενον εἰς τὸ ἐξωτερικὸν γωνίας \widehat{XOY} προβάλλεται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας εἰς Β καὶ Γ. Νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ ἐνοῦσα τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΒΓ καὶ ΟΑ εἶναι $\perp BG$.

164. Περί δοθῆν ὀξυγώνιον τρίγωνον νὰ περιγραφῆ τετράγωνον οὕτως, ὥστε τὰ δύο σχήματα νὰ ἔχουν μίαν κορυφὴν κοινήν.

165. Διὰ δοθέντος σημείου περιφερείας νὰ ἀχθῆ χορδὴ διπλασία τοῦ ἀποστήματός της.

166. Δίδεται τρ. ΑΒΓ καὶ εὐθεῖα (ε). Ἐπὶ τῆς (ε) λαμβάνεται τυχὸν σημεῖον Δ καὶ ἔστω Δ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Δ ὡς πρὸς τὸ μέσον Ο τοῦ ΒΓ. Τόπος τοῦ μέσου τῆς ἀποστάσεως ΑΔ', ὅταν τὸ Δ διατρέχη τὴν (ε).

167. Τόπος τῶν ἐντός δοθέντος ἰσοσκελοῦς τριγώνου σημείων, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς βάσεως ἴσονται μὲ τὸ ἀθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς ἴσας πλευράς.

168. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καὶ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς (ε) σημεῖον Β καὶ κατασκευάζομεν ἰσοσκελεῖς τρίγωνον ΑΜΒ μὲ $MA = MB$ ἔχον ἀκτίνα περιγεγραμμένον κύκλου ἴσην πρὸς δοθῆν τμήμα R. Ζητεῖται i) ὁ γ.τ τοῦ Μ καὶ ii) ὁ γ.τ. τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ ΔΑΜΒ, ὅταν τὸ Β μεταβάλλεται.

169. Ἡ βάσις ΒΓ καὶ ὁ περίκυκλος τρ. ΑΒΓ εἶναι σταθερά. Τίς ὁ γ.τ. τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰς τομὰς τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τοῦ τρ. ΑΒΓ μετὰ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας;

170. Δύο κύκλοι κέντρων Κ καὶ Λ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α. Ἐστω ΤΤ' μία κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν, ὅπου Τ, Τ' τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Νὰ δειχθῆ ὅτι:

- i) Ἡ εἰς τὸ Α κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ι τοῦ ΤΤ'.
- ii) Τὰ τρίγωνα ΤΑΤ' καὶ ΚΙΑ εἶναι ὀρθογώνια.
- iii) Ὁ κύκλος διαμέτρου ΤΤ' ἐφάπτεται τῆς ΚΛ.
- iv) Ὁ κύκλος διαμέτρου ΚΛ ἐφάπτεται τῆς ΤΤ'.

171. Ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὴν διάκεντρον δύο περιφερειῶν διέρχεται διὰ τῶν σημείων, καθ' ἃ αἱ κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι τέμνουσι τὰς ἐσωτερικὰς τοιαύτας.

172. Ἐάν διὰ δύο κύκλους (Κ, R), (Λ, ρ) ὀφίσταται ἡ σχέσις $(KL)^2 = R^2 - 2Rp$, τότε ὁ εἰς κεῖται ἐντός τοῦ ἄλλου.

173. Δίδονται δύο περιφέρειαι (Κ) καὶ (Λ), κέντρων Κ καὶ Λ, τεμνόμεναι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Εὐθεῖα (ε) δισχομῆν διὰ τοῦ Α ἐπανατέμνει τὰς περιφέρειας (Κ) καὶ (Λ)

εις τὰ σημεῖα M_1 καὶ M_2 ἀντιστοίχως. Εὐρίσκομεν τῶρα τὰ ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα τοῦ A εἰς τοὺς κύκλους (K) καὶ (Λ) , ἔστω τὰ A_1 καὶ A_2 .

i) Τῇ βοήθειᾳ τοῦ ὀρθογωνίου τραπέζιου $A_1M_1M_2A_2$ νὰ δειχθῆ ὅτι $M_1M_2 \leq A_1A_2$ καὶ ὅτι τὸ μέγιστον τοῦ M_1M_2 λαμβάνει χώραν, ὅταν ἡ τέμνουσα (ϵ) εἶναι παρὰ τοὺς κέντρα τῶν δύο κύκλων K καὶ Λ .

ii) Νὰ προσδιορισθῆ ἡ θέσις τῆς (ϵ) , διὰ τὴν ὁποῖαν τὸ τμήμα M_1M_2 ἔχει δεδομένον μήκος.

iii) Νὰ δειχθῆ ὅτι τὸ μέσον τοῦ A_1A_2 εἶναι τὸ κοινὸν κέντρον δύο κύκλων, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται ἀμφοτέρων τῶν κύκλων (K) καὶ (Λ) .

174. Περί δοθέν τρίγωνον νὰ περιγραφῆ τὸ μέγιστον δυνατὸν ἰσόπλευρον τρίγωνον.

175. Δίδονται δύο σημεῖα A καὶ B καὶ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ B . Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ ταύτης δύο σημεῖα Γ, Δ συμμετρικὰ πρὸς τὸ B καὶ τοιαῦτα, ὥστε $\widehat{\Gamma\Delta A} = \text{δοθεῖσις}$.

176. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἴσον πρὸς δοθέν καὶ τοῦ ὁποῖου αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας \widehat{A} νὰ διέρχονται διὰ δύο δεδομένων σημείων, ἐνῶ ἡ διχοτόμος τῆς \widehat{A} νὰ ἐφάπτεται δοθείσης περιφερείας.

177. Νὰ κατασκευασθῆ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῆς ὑποτεινούσης $B\Gamma = a$ καὶ τῆς ἀκτίνος R τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ $\text{τρ.}AGB$ κύκλου, ὅπου G τὸ κέντρον βάρους τοῦ $\text{τρ.}AB\Gamma$.

178. Νὰ κατασκευασθῆ τετράπλευρον ἔχον δεδομένας πλευράς καὶ μία διαγώνιος τοῦ ὁποῖου νὰ διχοτομῆ μιαν γωνίαν του.

179. Ἐστω P τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ $\text{τρ.}AB\Gamma$ καὶ A', B', Γ' τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ ἀντιστοίχως. Ἐστῶσαν A'', B'', Γ'' τὰ συμμετρικὰ τοῦ P ὡς πρὸς τὰ A', B', Γ' ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι: i) $\text{τρ.}AB\Gamma = \text{τρ.}A''B''\Gamma''$. ii) Τὰ τμήματα $AA'', BB'', \Gamma\Gamma''$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὅπερ εἶναι καὶ κοινὸν μέσον αὐτῶν.

180. Εἰς τὰ μέσα E καὶ Z τῶν πλευρῶν $AB, A\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ ὑψοῦμεν κάθετα τμήματα ἐπὶ τὰς πλευράς ταύτας καὶ πρὸς τὰ ἔξω τοῦ τριγώνου, τὰ $E\Theta = AB/2$ καὶ $ZI = A\Gamma/2$. Ἐάν Δ τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$, δείξατε ὅτι τὸ $\text{τριγ.} \Theta\Delta I$ εἶναι ὀρθογώνιον ἰσοσκελές.

181. Ἐστω τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$ καὶ E, Z τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του $A\Gamma$ καὶ BA . Νὰ δειχθῆ ὅτι αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευράς $AB, \Gamma\Delta$ αἱ ἀγόμεναι ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰ μέσα E καὶ Z καὶ ἡ μεσοκάθετος τῆς βάσεως AD διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

182. Ἐάν διὰ σημείου A κειμένου ἐπὶ τῆς προεκτάσεως μιᾶς διαμέτρου ἀχθῆ τέμνουσα $AB\Gamma$, ἥς τὸ ἔκτος τοῦ κύκλου μέρος AB ἴσεται πρὸς τὴν ἀκτίνα, τότε ἐκ τῶν τόξων τῶν περιχομένων μεταξύ τέμνουσης καὶ διαμέτρου τὸ ἔν εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου.

183. Δείξατε ὅτι, ἂν εὐθεῖα διέρχεται διὰ σημείου κειμένου ἐντὸς κύκλου, τότε τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα.

184. Εἰς $\text{τρ.}AB\Gamma$ ὁ ἐντὸς τῆς γωνίας \widehat{B} παρεγγεγραμμένος κύκλος ἐφάπτεται τῆς εὐθ $B\Gamma$ εἰς Z , ὁ δὲ ἐντὸς τῆς $\widehat{\Gamma}$ παρεγγεγραμμένος ἐφάπτεται τῆς εὐθ $B\Gamma$ εἰς Z' . Δείξατε ὅτι τὰ Z καὶ Z' εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$.

185. Νὰ γραφοῦν τρεῖς περιφέρειαι ἔχουσαι κέντρα τὰς κορυφὰς δεδομένου τριγώνου καὶ ἐφαπτόμεναι ἀλλήλων ἀνά δύο ἐξωτερικῶς.

186. Νὰ δειχθῆ ὅτι, ἂν οἱ δύο κύκλοι οἱ ἐγγεγραμμένοι εἰς τὰ δύο τρίγωνα, εἰς ἃ χωρίζεται κυρτὸν τετράπλευρον ὑπὸ μιᾶς διαγωνίου του, ἐφάπτανται τῆς διαγωνίου ταύτης εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον. Νὰ διατυπωθῆ καὶ ἀποδειχθῆ ἡ ἀντίστροφος πρότασις. (Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τοῦ περιγραφίμου τετραπλεύρου).

187. Δύο περιφέρειαι κέντρων K και L τέμνονται εις A και B . Διά τοῦ A ἄγονται δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι (ϵ_1) καὶ (ϵ_2), ἐξ ὧν ἡ (ϵ_1) τέμνει τὰς περιφερείας (K) καὶ (L) εἰς Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως, ἡ δὲ (ϵ_2) τέμνει ταύτας εἰς Γ_1 καὶ Δ_1 . Ἐάν M τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν τῶν περιγεγραμμένων περὶ τὰ τρίγωνα $A\Gamma\Delta_1$, $A\Gamma_1\Delta$, δείξατε ὅτι τὸ M κεῖται ἐπὶ σταθερᾶς περιφερείας, ἐχούσης κέντρον τὸ μέσον O τοῦ KL καὶ ἀκτῖνα OA .

188. Ἐστω A σημεῖον κείμενον ἐντὸς κύκλου (O, R), M τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας καὶ NN' χορδὴ αὐτῆς μεσοκάθετος τοῦ AM . Νὰ δειχθῆ ὅτι ὁ περὶ τὸ $tr.ANN'$ περιγεγραμμένος κύκλος ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ($A, 2R$).

189. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὗτινος δίδονται τὰ κέντρα O_1, O_2, O_3 τῶν παρεγγραμμένων κύκλων.

190. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὗτινος δίδονται οἱ πόδες H_1, H_2, H_3 τῶν ὑψῶν.

191. Τετραπλεύρου δίδονται αἱ τρεῖς κορυφαί. Νὰ προσδιορισθῆ ἡ θέσις τῆς τετάρτης, ἵνα τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον περὶ κύκλον.

192. Νὰ κατασκευασθῆ $tr.AB\Gamma$, οὗτινος δίδονται αἱ κορυφαί B καὶ Γ , τὸ σημεῖον Δ , καθ' ὃ ἡ ἐκ τῆς A διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τέμνει (ἐν ἀνάγκῃ προεκτεινομένη) τὴν $εὐθB\Gamma$ καὶ ἡ γωνία \widehat{B} .

193. Νὰ κατασκευασθῆ $tr.AB\Gamma$, οὗτινος δίδεται ἡ κορυφὴ A , τὸ ὀρθόκέντρον H καὶ τὸ μέσον M τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$. Νὰ δειχθῆ ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, μόνον ὅταν ἡ γωνία \widehat{AMH} εἶναι ὀξεῖα.

194. Δοθέντων δύο ὁμοκέντρων κύκλων, νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα ἀποτέμνουσα ἀπὸ τὸν μεγαλύτερον χορδὴν διπλασίαν ἐκείνης, ἣν ἀποτείνει ἀπὸ τὸν μικρότερον. — Διερεύνησις.

195. Ἐάν K τὸ περίκέντρον ὀξυγωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ K_1, K_2, K_3 τὰ περίκέντρα τῶν τριγῶνων $KB\Gamma, K\Gamma A, KAB$, ὑπολογίσατε συναρτήσῃ τῶν $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ τὰς γωνίας τοῦ ἑξαγώνου $BK_1\Gamma K_2AK_3B$ ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ $\widehat{2A}, \widehat{2B}, \widehat{2\Gamma}$ εἶναι ἀμβλείαι.

196. Προεκτείνομεν τὴν βάσιν $B\Gamma$ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ κατὰ $\Gamma\Delta = AB$ καὶ τὴν AB κατὰ $BE = B\Gamma/2$. Ἡ εὐθ $E\Delta$, ὅπου H τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$, τέμνει τὴν εὐθ $A\Delta$ εἰς Z . Ἐάν $\widehat{BA\Gamma} = 58^\circ$, ὑπολογίσατε εἰς μοίρας τὴν \widehat{AZH} .

197. Ἐντὸς ὀρθῆς γωνίας $\chi\text{O}\gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένος κύκλος (K) ἐφαπτόμενος τῆς $O\chi$ εἰς Γ . Ἀφοῦ πρῶτον κατασκευασθῆ τέμνουσα OAB τοιαύτη, ὥστε τὸ τόξον $\widehat{A\Gamma}$ νὰ εἶναι τὸ ἡμισυ τοῦ $\widehat{\Gamma B}$, νὰ ὑπολογισθοῦν κατόπιν αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου $KAGB$.

198. Ὄρθῃ γωνία $\widehat{A\Gamma B}$ στρέφεται περὶ τὴν σταθερὰν κορυφὴν τῆς, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς τέμνουσιν δύο δεδομένας καθέτους μεταξύ των εὐθείας εἰς B καὶ Γ . Τόπος τοῦ βαρυκέντρου τοῦ $tr.AB\Gamma$.

199. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν A δεδομένου ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) καὶ τυχοῦσαν ἀκτῖνα γράφομεν περιφέρειαν. Ἐκ τῶν B καὶ Γ φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας ταύτης, μὴ συμμετρικὰς πρὸς τὸ ἐκ τοῦ A ὕψος. Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ σημείου τομῆς M τῶν ἐφαπτομένων τούτων;

200. Διὰ τῆς κορυφῆς A ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν AX (ἐν τῇ ἐπιπέδῳ τοῦ τριγώνου) καὶ ἐξ ὧν τῶν σημείων τῆς AX ἐκλέγομεν ἐκεῖνο, τὸ ὅποιον ἔχει τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ B καὶ Γ . Ἄν M εἶναι τοῦτο, ποῖον τὸ σύνολον τῶν σημείων M ;

201. Ἐν κύκλῳ δίδονται αἱ κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας διαμέτροι AA' καὶ BB' . Διὰ τοῦ A ἄγεται τυχοῦσα εὐθεῖα, τέμνουσα εἰς Γ τὴν περιφέρειαν καὶ εἰς Δ τὴν $εὐθBB'$, ὅπου Γ

και Δ διάφορα ἀλλήλων. Νά εὐρεθῆ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου τομῆς τῆς εἰς τὸ Γ ἐφαπτομένης καὶ τῆς εἰς τὸ Δ καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθ $\beta\beta'$.

202. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῶν a, \widehat{A}, μ_a .

203. Νά κατασκευασθῆ τρ. $AB\Gamma$, οὐτινος δίδεται ἡ R , ἡ δ_A καὶ τὸ μήκος $\lambda = AT$ ἐπὶ τῆς εἰς A ἐφαπτομένης τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ἀπὸ τῆς κορυφῆς A μέχρι τοῦ σημείου T , καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὴν εὐθ $\beta\Gamma$.

204. Ἐπὶ περιφέρειας (O) διαμέτρου AB λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον M καὶ φέρομεν τὴν εὐθ MA τέμνουσαν τὴν μεσοκάθετον τῆς AB εἰς Γ . Ζητεῖται: i) Ὁ γ.τ. τοῦ ὀρθοκέντρου καὶ ii) τοῦ περικέντρου τοῦ τρ. $OM\Gamma$.

205. Δύο περιφέρειαι τέμνονται εἰς A καὶ B . Διὰ τοῦ A ἄγεται τυχόσθα εὐθεῖα ἐπανατέμνουσα τὰς περιφέρειας εἰς Γ καὶ Δ καὶ εἰς τὰ Γ καὶ Δ ἄγονται αἱ ἀντίστοιχοι ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν, τεμνόμεναι ἔστω εἰς τὸ E . Νά δειχθῆ ὅτι τὸ τετράπλευρον $B\Gamma E\Delta$ εἶναι ἐγγράψιμον.

206. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ὠψῶν του (προεκτεινόμενων ἐν ἀνάγκῃ) μετὰ τῆς περιγεγραμμένης περὶ αὐτὸ περιφέρειας.

207. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ τυχόσθα περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν B καὶ Γ ἐπανατέμνει τὰς εὐθείας $AB, A\Gamma$ εἰς B', Γ' . Νά δειχθῆ ὅτι ἡ ἐκ τοῦ A διάμεσος τοῦ τρ. $AB\Gamma$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $B'\Gamma'$.

208. Ἔστωσαν τὰ A, B, Γ, Δ ὀμοκυκλικά, B', Δ' αἱ προβολαὶ τῶν B, Δ ἐπὶ τὴν εὐθ $A\Gamma$ καὶ A', Γ' αἱ προβολαὶ τῶν A, Γ ἐπὶ τὴν εὐθ $B\Delta$. Δείξατε ὅτι τὰ A', B', Γ', Δ' εἶναι ὀμοκυκλικά.

209. Ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν $AB, A\Gamma$ ὀρθογωνίου τριγώνου κατασκευάζομεν τετράγωνα $ABDE$ καὶ $A\Gamma Z\Theta$ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Νά δειχθῆ ὅτι αἱ εὐθεῖαι DE καὶ $Z\Theta$ τέμνονται ἐπὶ τοῦ φορέως τοῦ ὕψους AH τοῦ τρ. $AB\Gamma$.

Ὅμας B (Συνθετώτεραι ἀσκήσεις).

210. Εἰς ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον P ἐπὶ τῆς διαγωνίου $A\Gamma$, προεκτείνομεν τὸ BP κατὰ $PM = BP$ καὶ προβάλλομεν τὸ M ἐπὶ τὰς εὐθείας $A\Delta$ καὶ $\Delta\Gamma$ εἰς E καὶ Z . Νά δειχθῆ ὅτι τὰ σημεῖα Z, E, P κείνται ἐπ' εὐθείας.

211. Ἔστω AH τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθογωνίου τριγ. $AB\Gamma$ καὶ E καὶ Δ αἱ προβολαὶ τοῦ H ἐπὶ τὰς $AB, A\Gamma$. Νά δειχθῆ ὅτι:

i) $\Delta E \perp AM$, ὅπου M τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$.

ii) Ἐάν H' εἶναι τὸ μέσον τῆς AB καὶ BX εὐθεῖα $\parallel EA$, τότε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι MH', BX, AH συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον.

iii) Αἱ εὐθεῖαι AM, HA καὶ BX διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

212. Ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν $AB, A\Gamma$ ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζομεν τετράγωνα $ABDE$ καὶ $A\Gamma ZH$ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ περὶ τὸ τρ. $AB\Gamma$ περιγεγραμμένη περιφέρεια διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀκυστάσεως ΔZ .

213. Ἐάν μὲ διαμέτρους τὰ τμήματα $A\Gamma, \Gamma B$ διαμέτρου AB περιφέρειας γραφοῦν δύο περιφέρειαι καὶ ἀχθῆ διὰ τοῦ Γ τυχόσθα εὐθεῖα, τὰ τμήματα αὐτῆς τὰ μεταξὺ τῆς ἀρχικῆς περιφέρειας καὶ τῶν δύο ἄλλων εἶναι ἴσα.

214. Ἔστω ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ AB καὶ $\Gamma\Delta$ κυρτοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου τέμνονται προεκτεινόμεναι εἰς E καὶ ὁμοίως αἱ δύο ἄλλαι ἀπέναντι πλευραὶ $B\Gamma$ καὶ ΔA εἰς Z . Νά δειχθῆ ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A\epsilon\Delta}$ καὶ $\widehat{B\zeta A}$ τέμνουν τὰς πλευράς τοῦ τετραπλεύρου κατὰ τὰς κορυφὰς ἑνὸς ῥόμβου. Νά διατυπωθῆ μία ἀντίστροφος πρότασις καὶ νὰ ἐξετασθῆ, ἂν ἀληθεύῃ.

215. Έστω $AB\Gamma$ ὀρθογώνιον τρίγωνον, AD τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν $B\Gamma$ ὕψος καὶ E τυχὸν σημεῖον τοῦ AD . Διὰ τοῦ E φέρομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν παρὶλλον πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν $B\Gamma$, ἤτις τέμνει τὴν AG εἰς τὸ H καὶ ἀφ' ἑτέρου κάθετον ἐπὶ τὴν BE , ἤτις τέμνει τὴν $εὐθAG$ εἰς Z . Νὰ δειχθῇ ὅτι $AZ = \Gamma H$.

216. Έστω $AB\Gamma$ ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ $\widehat{A} = 90^\circ$, ἔστω AD τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος τοῦ καὶ K_1, K_2, K τὰ ἔγκεντρα τῶν τριγῶνων $ABD, A\Gamma D$ καὶ $AB\Gamma$ ἀντιστοιχῶς Νὰ δειχθῇ.

i) Τὸ K εἶναι ὀρθόκεντρον τοῦ τρ. AK_1K_2 .

ii) Τὸ AD διέρχεται διὰ τοῦ περικέντρου τοῦ τρ. AK_1K_2 .

iii) Τὸ τετράπλευρον $BK_1K_2\Gamma$ εἶναι ἑγγράψιμον.

217. Διὰ τυχόντος σημείου M τῆς βάσεως $B\Gamma$ ἰσοσκελοῦς τριγ. $AB\Gamma$ φέρομεν παρὶλους πρὸς τὰς ἴσας πλευρὰς $AB, A\Gamma$. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μεσοκάθετος τῆς διαγωνίου DE τοῦ σχηματιζομένου παρ/μου διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου, ὅταν τὸ M διατρέχῃ τὴν βάσιν $B\Gamma$. Νὰ δειχθῇ ἐπίσης ὅτι ἡ ἐκ τοῦ M κάθετος ἐπὶ τὴν $εὐθDE$ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

218. Ἐπὶ σταθεροῦ τμήματος AB λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον M καὶ γράφομεν δύο ἡμιπεριφερείας μὲ διαμέτρους MA καὶ MB πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ AB . Έστῶσαν Δ καὶ E τὰ μέσα τῶν δύο ἡμιπεριφερειῶν. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐκ τοῦ M κάθετος ἐπὶ τὴν DE διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου, ὅταν τὸ M διατρέχῃ τὸ AB .

219. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν Ox, Oy ὀρθῆς γωνίας κινουνται τὰ σημεῖα A καὶ B οὕτως, ὥστε $OA + OB = K$ (σταθ.). Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον $OADB$. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐκ τοῦ $D \perp$ ἐπὶ τὴν AB διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

220. Ἐπ' εὐθείας δίδονται κατὰ σειρὰν τὰ σταθερὰ σημεῖα A, B, Γ . Διὰ τοῦ Γ φέρομεν εὐθεῖαν $(\varepsilon) \perp A\Gamma$. Διὰ τῶν A καὶ B διέρχονται δύο κάθετοι μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τέμνουσαι τὴν (ε) εἰς Δ καὶ E . Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια $(A\Delta E)$ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου διαφόρου τοῦ A .

221. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ ὀξυγωνίου τριγῶνου $AB\Gamma$ δίδεται ἓν σημεῖον Δ . Ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν $AB, A\Gamma$ σημεῖα E καὶ Z τοιαῦτα, ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ τρ. ΔEZ νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη δυνατὴ. Ἀκολουθῶς νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὀρθοκέντρον τοῦ $AB\Gamma$ ἔχει τὴν ἐλαχίστην περίμετρον ἐξ ὄλων τῶν εἰς τὸ τρ. $AB\Gamma$ ἑγγεγραμμένων τριγῶνων.

(Υπόδ. Νὰ ληφθοῦν τὰ συμμετρικὰ τοῦ Δ ὡς πρὸς τὰς $εὐθ AB, A\Gamma$).

222. Ἐάν ἐπίπεδον σχῆμα ἔχῃ δύο ἀξονας συμμετρίας καθέτους ἐπ' ἀλλήλους, τότε ἔχει καὶ κέντρον συμμετρίας τὴν τομὴν τῶν ἀξόνων τούτων.

223. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς δοθείσης γωνίας οὕτως, ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ σχηματιζομένου τριγῶνου νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμήμα.

224. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον $AB\Gamma$, οὗτινος δίδεται ἡ ἀκτίς $\boxed{\rho}$ τοῦ ἑγγεγραμμένου κύκλου, ἡ ἀκτίς $\boxed{\rho_a}$ τοῦ ἐντὸς τῆς \widehat{A} παρεγγεγραμμένου καὶ τὸ μήκος τῆς πλευρᾶς a .

225. Ὅμοίως, ὅταν δίδονται: ρ, ρ_a , καὶ $|\beta - \gamma| = \lambda$.

226. Ὅμοίως, ἐκ τῶν στοιχείων a, \widehat{A} καὶ ρ_a .

227. Ὅμοίως, ἐκ τῶν στοιχείων a, ρ καὶ $|\beta - \gamma| = \lambda$.

228. Νὰ κατασκευασθῇ τρ. $AB\Gamma$, οὗτινος δίδεται ἡ ρ , ἡ a καὶ ἡ ἀπόστασις $OO_1 = \lambda$ τοῦ κέντρου O τοῦ ἑγγεγραμμένου ἀπὸ τὸ κέντρον O_1 τοῦ ἐντὸς τῆς \widehat{A} παρεγγεγραμμένου κύκλου.

Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον $AB\Gamma$:

229. Ἐκ τῶν \widehat{A} , μ_β , μ_γ .

230. Ἐκ τῶν \widehat{A} , ρ , ν_α .

231. Ἐκ τῶν α , $\beta - \gamma = d$, ρ .

232. Ἐκ τῶν β , γ , $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \omega$.

233. Ἐκ τῶν α , $\beta + \gamma = k$, $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \omega$.

234. Ἐκ τῶν α , $\beta - \gamma = d$, $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \omega$.

235. Ἐκ τῶν R , α , ν_β .

236. i) Ἐκατέρωθεν εὐθείας (ε) δίδονται δύο σημεῖα A καὶ B . Τὸ AB τέμνει τὴν (ε) εἰς O . Τὸ O χωρίζει τὴν (ε) εἰς δύο ἡμιευθείας OX , $O\psi$, ἐξ ὧν ἡ OX σχηματίζει ὀξείαν γωνίαν μὲ τὸ OA . Νά δειχθῆ ὅτι διὰ κάθε σημεῖον M τῆς OX ἰσχύει $\widehat{AMX} > \widehat{BM\psi}$ καὶ νά ὀρισθῆ τὸ M οὕτως, ὥστε $\widehat{AMX} - \widehat{BMX} = \theta$ (δοθεῖσα). ii) Ἐάν τὰ A καὶ B κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας $X\psi$, νά εὐρεθῆ σημεῖον M τῆς $X\psi$ τοιοῦτον, ὥστε $\widehat{AMX} - \widehat{BM\psi} = \theta$.

237. Δοθεῖσάν δύο περιφερειῶν (K) καὶ (Λ) νά εὐρεθῆ σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε δύο ἐξ αὐτοῦ ἀγόμενα ἐφαπτόμενα τμήματα τῶν περιφερειῶν (ἔν πρὸς ἑκάστην) νά σχηματίζουν δοθεῖσαν γωνίαν καὶ νά εἶναι ἴσα.

238. Ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας $XO\psi$ δίδονται δύο σημεῖα A καὶ B ($OA < OB$). Νά εὐρεθῆ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε $\widehat{AMB} = 2\widehat{ABM}$.

Ἐάν (OA) = α , (OB) = β , ποία ἡ σχέσηις μεταξὺ τῶν α καὶ β , διὰ νά εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατόν;

239. Νά κατασκευασθῆ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῶν ἀκτίων R_1 , R_2 τῶν περιγεγραμμένων κύκλων τῶν τριγώνων $AB\Delta$ καὶ $A\Delta\Gamma$, ὅπου Δ τὸ μέσον τῆς ὑποτείνουσας $B\Gamma$.

240. Δοθεῖσάν δύο παραλλήλων καὶ σημείου A ἐκτὸς τῆς ταινίας αὐτῶν νά κατασκευασθῆ τμήμα $B\Gamma$ κάθετον ἐπὶ τὰς παραλλήλους καὶ περατούμενον εἰς αὐτάς, τὸ ὁποῖον

i) νά φαίνεται ἀπὸ τοῦ A ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν θ ,

ii) νά φαίνεται ἐκ τοῦ A ὑπὸ τὴν μεγίστην δυνατὴν γωνίαν.

241. Δίδεται γωνία \widehat{A} καὶ σημεῖον Σ κείμενον ἐντὸς τῆς προσκειμένης πρὸς τὴν \widehat{A} γωνίας. Νά ἀχθῆ διὰ τοῦ Σ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας \widehat{A} εἰς σημεῖα B καὶ Γ οὕτως, ὥστε νά εἶναι $AB + A\Gamma = S$ (δοθὲν τμήμα).

(Ἔγδο: βλ. ἄσκ. 111).

242. Ἐστω $A_1A_2A_3A_4A_5$ ἔν πεντάγωνον καὶ M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1$ ἀντιστοίχως καὶ τέλος P τυχόν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου. Ἄς εἶναι P_1 τὸ συμμετρικὸν τοῦ P ὡς πρὸς M_1 , P_2 τὸ συμμετρικὸν τοῦ P_1 ὡς πρὸς M_2 ... καὶ, τέλος, P_5 τὸ συμμετρικὸν τοῦ P_4 ὡς πρὸς M_5 . Νά δειχθῆ ὅτι ἡ κορυφή A_1 εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος PP_5 .

Γενίκευσις διὰ τυχόν πολύγωνον περιττοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν.

Ἐφαρμογή. Νά κατασκευασθῆ πεντάγωνον, οὗτινος δίδονται τὰ μέσα τῶν πλευρῶν.

243. Δίδονται δύο παράλληλοι καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς σημεῖον A . Ἐκ τοῦ A φέρομεν τυχοσαν εὐθεῖαν, τέμνουσαν εἰς B τὴν ἄλλην παράλληλον. Εἰς τὸ B ὑποῦμεν κάθετον ἐπὶ

τήν AB , τέμνουσαν εἰς Γ τὴν πρώτην παράλληλον. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν ἡμιεὐθεῖαν ΓX οὕτως, ὥστε ἡ ΓX καὶ τὸ B νὰ κείνται ἐκατέρωθεν τῆς εὐθείας AB καὶ νὰ εἶναι $\widehat{A\Gamma X} = 2\widehat{A\Gamma B}$. Τόπος τῆς προβολῆς τοῦ A ἐπὶ τὸν φορέα τῆς ΓX .

244. Δίδεται περιφέρεια (O) καὶ δύο σταθεραὶ διευθύνσεις $(\delta_1), (\delta_2)$. Ἀπὸ τυχόν σημείου A τῆς (O) φέρομεν παρὰ τοὺς (δ_1) καὶ (δ_2) τεμνοῦσας εἰς B καὶ Γ τὴν (O) . Ζητεῖται τὸ σύνολον τῶν ἐγκέντρων τῶν τριγώνων $AB\Gamma$.

245. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον παρῆμον, οὐτινος δίδονται αἱ ἀποστάσεις μῆδος κορυφῆς ἀπὸ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τῶν συντρεχουσῶν εἰς τὴν ἀπέναντι κορυφήν.

Διερεύνησις.

246. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν $OX, O\psi$ γωνίας $\widehat{XO\psi}$ κινουμένη ἀντιστοιχῶς τὰ σημεῖα A καὶ B οὕτως, ὥστε $OA + OB = l$ (σταθ. τμήμα). Ποῖον τὸ σύνολον τῶν περικέντρων τῶν τριγώνων OAB ;

247. Δοθεῖσιν γωνίας $\widehat{XO\psi}$ νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα παρὰ τοὺς (δ_1) καὶ (δ_2) τεμνοῦσα εἰς A καὶ B τὰς $OX, O\psi$ οὕτως, ὥστε $OA + OB = l$ (δοθέν). (Ἐπιτίθεται ὅτι ἡ (ϵ) τέμνει τὰς πλευράς $OX, O\psi$).

Σημεῖα συζυγῆ—ισογώνια ὡς πρὸς ἓν τρίγωνον.

248. i) Ἐστω M σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ $\text{τρ.} AB\Gamma$ μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ $\text{τρ.} AB\Gamma$ περιφερείας. Νὰ δεიχθῆ ὅτι αἱ ἰσογώνιοι τῶν εὐθειῶν $AM, BM, \Gamma M$ ὡς πρὸς τὰς γωνίας $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ ἀντιστοιχῶς συντρέχουν ἐπίσης εἰς ἓν σημεῖον M' . (Ἐπιτίθεται. Ἐστῶσαν Δ, ϵ, Z αἱ προβολαὶ τοῦ M ἐπὶ τὰς εὐθείας $AB, B\Gamma, \Gamma A$. Ἡ Περιφ. $(\Delta\epsilon Z)$ ἐπανατέμνει τὰς ὡς ἄνω εὐθείας εἰς Δ', ϵ', Z' . Αἱ εἰς Δ', ϵ', Z' ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς $AB, B\Gamma, \Gamma A$ συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον M' συμμετρικὸν τοῦ M ὡς πρὸς τὸ κέντρον K τῆς περιφ. $(\Delta\epsilon Z)$. Ἀποδεικνύομεν ἀκολουθῶς ὅτι ἡ AM' εἶναι ἡ ἰσογώνιος τῆς AM ὡς πρὸς τὴν γωνίαν \widehat{A} . Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὴν περιφ. $(\Delta\Delta Z)$ καὶ τὸ κέντρον αὐτῆς O . Εἶναι $AM' \parallel OK \wedge OK \perp \Delta Z \Rightarrow AM' \perp \Delta Z$. Ἦτοι ἡ AM' ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἐκ τοῦ A ὕψους καὶ ἡ AM τὴν τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ $\text{τρ.} \Delta\Delta Z$, ἄρα AM' καὶ AM εἶναι ἰσογώνιοι ὡς πρὸς τὴν \widehat{A} (§25). Ὁμοίως διὰ τὰ δύο ἄλλα ζεύγη $(BM', BM), (\Gamma M', \Gamma M)$).

ii) Ὅρισμός. Τὰ δύο ἀνωτέρω σημεῖα M καὶ M' καλοῦνται συζυγῆ—ισογώνια ὡς πρὸς τὸ $\text{τρ.} AB\Gamma$.

iii) Αἱ ἔξ προβολαὶ ἐπὶ τὰς $AB, B\Gamma, \Gamma A$ δύο συζυγῶν ἰσογωνίων σημείων M, M' ὡς πρὸς τὸ $\text{τρ.} AB\Gamma$ κείνται ἐπὶ μῆδος περιφερείας. (Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν τοῦ σημείου M' συζυγοῦς—ισογωνίου τοῦ M).

iv) Παρατήρησις. Εἰς τὸ i) ἐδείχθη ὅτι:

«Ἡ ἰσογώνιος τῆς AM ὡς πρὸς τὴν \widehat{A} εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐνοῦσαν τὰς προβολὰς τοῦ σημείου M ἐπὶ τὰς $AB, \Gamma A$ ».

249. Ἐστω P σημεῖον τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγ. $AB\Gamma$ περιφερείας. Ἐὰν αἱ ἐκ τοῦ P ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευράς $B\Gamma, \Gamma A, AB$ ἐπανατέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς A', B', Γ' , νὰ δεიχθῆ ὅτι τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι ἴσα.

250. Δίδονται τρεῖς κύκλοι $(A), (B), (\Gamma)$ ἔχοντες κέντρα τὰς κορυφὰς τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ κείμενοι ἐκτὸς ἀλλήλων ἀνὰ δύο. Θεωροῦμεν ἰσόπλευρα τρίγωνα, τῶν ὁποίων μία πλευρὰ ἐφάπτεται τοῦ (A) , μία τοῦ (B) καὶ ἡ τρίτη τοῦ (Γ) καὶ τὰ ὁποῖα περιέχουν τοὺς κύκλους $(A), (B), (\Gamma)$ ἐντὸς αὐτῶν. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ἰσοπλευρῶν τριγώνων τούτων.

251. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων $\alpha, \nu_{\alpha}, \widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \widehat{\omega}$ (Ἔποδ. Ἐν λάβαμεν τὸ συμμετρικόν τοῦ A ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τῆς $B\Gamma$, ἀνάγεται εἰς τὴν ἀσκησιν 175).

252. Νά κατασκευασθῆ $\tau\rho.AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων $2\tau, \nu_{\alpha}, \delta_{\alpha}$.

(Ἔποδ. Ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην).

253. Νά κατασκευασθῆ $\tau\rho.AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων $\widehat{B}, \delta_{\Lambda}$ καὶ τῆς ἀποστάσεως τῆς κορυφῆς Γ ἀπὸ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου τῆς $B\widehat{A}\Gamma$.

254. Δοθέντος $\tau\rho.AB\Gamma$ νά κατασκευασθῆ τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ ἔχον τὰς κορυφὰς τοῦ A', B', Γ' ἐπὶ τῶν πλευρῶν $B\Gamma, \Gamma A, AB$ τοῦ δοθέντος καὶ ἴσον πρὸς ἄλλο δοθὲν τρίγωνον $A''B''\Gamma''$.

255. Ἡ διάκεντρος $K\Lambda$ δύο ἴσων κύκλων ἀκτίνας R ἔχει μήκος $K\Lambda = 2\alpha > 2R$. Εὐθύγραμμον τμήμα MM' σταθεροῦ μήκους λ κινεῖται, ὥστε τὰ ἄκρα του νά μένουσιν ἐπὶ τῶν περιφερειῶν (K) καὶ (Λ).

- i) Ποίᾳς συνθήκας πρέπει νά πληροῖ τὸ λ , διὰ νά ὑπάρχουν σημεῖα M καὶ M' ;
 - ii) Δοθέντος τοῦ λ νά κατασκευασθοῦν τὰ τόξα, τὰ ὅποια διανύουσιν τὰ M καὶ M' .
 - iii) Διὰ ποίᾳς τιμᾶς τοῦ λ αἱ περιφέρειαι διαγράφονται ὁλόκληροι ἀπὸ τὰ M καὶ M' ;
256. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων.

$$\delta_{\Lambda}, \gamma, \left| \widehat{B} - \widehat{\Gamma} \right| = \omega$$

257. Νά κατασκευασθῆ ἐγγράψιμον κυρτὸν τετράπλευρον ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ καὶ τῆς γωνίας τῶν διαγωνίων τοῦ τῆς περιεχοῦσης τὴν τετάρτην πλευρᾶν.

258. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον $AB\Gamma$ οὔτινος δίδονται κατὰ θέσιν, τὸ περίκεντρον K καὶ οἱ πόδες H καὶ Δ τοῦ ἐπὶ τὴν $B\Gamma$ ὕψους AH καὶ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου $A\Delta$ τῆς γωνίας \widehat{A} .

259. Εἰς δοθέντα κύκλον χαράσσεται χορδὴ AG . Ζητεῖται νά ἔγγραφῆ εἰς τὸν κύκλον τοῦτον τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, ἔχον τὴν AG ὡς διαγώνιον, ἔχον τὴν ἑτέραν διαγώνιον BA παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ τὸ ὅποιον νά εἶναι συγχρόνως καὶ περιγράψιμον περὶ κύκλον.

260. Περί δοθὲν κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ νά περιγραφῆ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου δύο ἀπέναντι πλευραὶ νά διέρχωνται διὰ τῶν A καὶ Γ καὶ αἱ δύο ἄλλαι διὰ τῶν B καὶ Δ .

261. Νά κατασκευασθῆ $\tau\rho.AB\Gamma$, οὔτινος δίδονται αἱ κορυφαὶ B, Γ , ὁ ποῦς Δ τοῦ ἐπὶ τὴν $B\Gamma$ ὕψους καὶ ἡ διαφορὰ τῶν παρὰ τὴν βάσιν $B\Gamma$ γωνιῶν.

262. Ἐντὸς δοθείσης γωνίας δίδεται σημεῖον O , μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς διχοτόμου. Ζητεῖται νά γραφῆ περιφέρεια, κέντρου O , ἀποτέμουσα ἀπὸ τὰς εὐθείας, ἐφ' ὧν κείνται αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας, χορδὰς ἐχούσας δοθὲν ἄθροισμα.

263. Νά κατασκευασθῆ $\Delta AB\Gamma$ μὲ $AB = A\Gamma$ καὶ ἐκ τῶν στοιχείων μ_{β}, ν_{β} .

264. Ἐστω B τὸ ἐν σημεῖον τομῆς δύο δοθεισῶν τεμνομένων περιφερειῶν (K) καὶ (Λ) καὶ A σταθερὸν δοθὲν σημεῖον. Ζητεῖται νά γραφῆ περιφέρεια (γ) μὲ κέντρον τὸ A καὶ τέμουσα τὰς δοθείσας οὕτως, ὥστε τὸ B , τὸ ἐν σημεῖον τομῆς τῆς (K) καὶ (γ) καὶ ἐν σημεῖον τομῆς τῆς (Λ) καὶ (γ) νά κείνται ἐπ' εὐθείας.

265. Διὰ τοῦ ἐνός κοινοῦ σημείου δύο τεμνομένων περιφερειῶν νά ἀχθῆ εὐθεῖα ἀποτέμουσα ἀπὸ τοὺς κύκλους χορδὰς ἀντιστοιχοῦσας εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας.

266. Νά γραφῆ περιφέρεια διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου καὶ ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν.

267. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον $AB\Gamma$, οὐτινος δίδεται κατὰ θέσιν ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος, τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$ καὶ ἐν σημείον τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς $\widehat{\Gamma}$.

268. Νά κατασκευασθῆ $\text{τρ.}AB\Gamma$ ἐκ τῶν a, u_a, δ_a .

269. Νά κατασκευασθῆ $\text{τρ.}AB\Gamma$ ἐκ τῶν $R, \mu_a, B - \Gamma$.

270. Νά κατασκευασθῆ $\text{τρ.}AB\Gamma$, οὐτινος δίδεται ἡ $B\Gamma$, ἡ \widehat{B} καὶ τοιοῦτον, ὥστε αἱ δύο διχοτόμοι τῆς \widehat{B} νὰ εἶναι ἴσαι ($\delta_B = \delta'_B$).

271. Νά κατασκευασθῆ $\text{τρ.}AB\Gamma$ ἐκ τοῦ ἐγκέντρου O καὶ τῶν παρακέντρων O_2, O_3 .

272. Νά κατασκευασθῆ $\text{τρ.}AB\Gamma$, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ ἀπόστασις $2l$ τοῦ ἐγκέντρου O ἀπὸ τὸ παράκεντρον O_1 , τὸ ἄθροισμα $\rho + \rho_a$ καὶ ἡ ἀκτίς R τοῦ περικύκλου.

273. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφέρειᾶς ἴχνη τοῦ ὕψους, διαμέσου καὶ διχοτόμου τῶν ἀγομένων ἐκ μίᾶς κορυφῆς.

274. Νά κατασκευασθῆ $\text{τρ.}AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων a, \widehat{A} καὶ τῆς ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεως l τῶν προβολῶν τοῦ ποδὸς Δ τοῦ ὕψους AD ἐπὶ τὰς πλευράς τῆς \widehat{A} .

275. Νά κατασκευασθῆ ἡ διχοτόμος γωνίας, τῆς ὁποίας ἡ κορυφή εἶναι ἀπρόσιτος (ἐκτὸς τοῦ χάρτου σχεδιάσεως).

276. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῆ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον δοθείσαν ἀκτίνα ἐγγεγραμένου κύκλου καὶ μία κάθετος πλευρὰ τοῦ ὁποίου νὰ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου.

277. Ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν $AB, A\Gamma$ $\text{τριγ.}AB\Gamma$ πρὸς τὸ μέρος τοῦ B καὶ τοῦ Γ κινούνται δύο σημεῖα M καὶ N οὕτως, ὥστε $BM = \Gamma N$. Τόπος τοῦ μέσου P τοῦ τμήματος MN .

278. Μεταβλητοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ αἱ κορυφαὶ B, Γ καὶ τὸ μέγεθος τῆς \widehat{A} μένουں σταθερά. Τόπος τῆς προβολῆς τοῦ μέσου τῆς $B\Gamma$ ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς \widehat{A} .

279. Δίδεται κύκλος κέντρου O , ἀκτίς αὐτοῦ OA , κύκλος διαμέτρου OA καὶ κέντρου O' καὶ σταθερὰ εὐθεῖα $A\Gamma\Delta$ τέμνουσα εἰς Γ τὴν (O') καὶ εἰς Δ τὴν (O). Θεωροῦμεν μεταβλητὴν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ O , τέμνουσαν τὴν (O') εἰς M καὶ τὴν (O) εἰς N καὶ N' . Τόπος τῶν σημείων P καὶ P' , καθ' ἃ ἡ εὐθ ΓM τέμνει τὰς εὐθ ΔN καὶ $\Delta N'$.

280. Δίδεται περιφέρεια (K) καὶ ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖον Σ . Διὰ τοῦ Σ ἀγεται ἐφαπτομένη ΣA τῆς περιφέρειᾶς καὶ μεταβλητὴ τέμνουσα $\Sigma B\Gamma$. Ποῖος ὁ $\gamma.τ.$ τοῦ ποδὸς Δ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου AD τοῦ $\text{τρ.}AB\Gamma$;

281. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν σημείων M , τῶν ὁποίων ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν προβολῶν ἐπὶ δύο δεδομένας εὐθείας τμνομένης εἰς O εἶναι σταθερά;

282. Δίδεται περιφέρεια (K), ἐπ' αὐτῆς σημεῖον A καὶ ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖον Σ . Διὰ τοῦ Σ φέρομεν μεταβλητὴν τέμνουσαν $\Sigma B\Gamma$ τῆς περιφέρειᾶς μὴ διερχομένην διὰ τοῦ A . Ποῖος ὁ τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου H τοῦ $\text{τρ.}AB\Gamma$;

283. Μὲ κέντρον σταθερὸν σημεῖον Γ τῆς διχοτόμου δεδομένης γωνίας γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὰς εὐθείας, ἐφ' ἃν κείνται αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας, εἰς A καὶ B τὴν μίαν καὶ εἰς A' καὶ B' τὴν ἄλλην. Νὰ εἰρηθῆ τὸ σύνολον τῶν προβολῶν τοῦ Γ ἐπὶ τὰς χορδὰς AB' καὶ $A'B$ ὄχι καθέτους ἐπὶ τὴν διχοτόμον.

284. Τριγώνου $AB\Gamma$ αἱ κορυφαὶ B, Γ μένουں σταθεραὶ καὶ ἡ διαφορὰ $|AB - A\Gamma| = k$ σταθερά. Τόπος τῆς προβολῆς τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς \widehat{A} .

285. Δίδονται δύο σταθερὰ σημεῖα A καὶ B καὶ ἐπὶ τοῦ τμήματος AB σημεῖον Δ . Ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Δ καθέτου ἐπὶ τὴν AB λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ καὶ φέρομεν τὴν περιφέρειαν ($AB\Gamma$). Ζητεῖται ὁ $\gamma.τ.$ τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ B ὡς πρὸς τὴν διὰ τοῦ Γ διερχομένην διάμετρον τῆς περιφέρειᾶς ($AB\Gamma$).

286. Σημεῖον P κινεῖται ἐπὶ τοῦ φορέως τῆς βάσεως $B\Gamma$ δεδομένου τριγώνου $AB\Gamma$.

Ἔστωσαν Δ και Ε αὶ προβολαὶ τοῦ Ρ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ. Τόπος τῆς προβολῆς τοῦ ποδὸς Η τοῦ ὕψους ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΔΕ.

287. Εἰς τυχὸν σημεῖον Μ περιφερείας διαμέτρου ΑΑ' ἄγουμεν ἑφαπτομένην, ἣτις τέμνει τὴν ευθ ΑΑ' εἰς τὸ σημεῖον Τ. Ἐν Κ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, ζητεῖται i) ὁ τόπος τοῦ ἐγκέντρου τοῦ τρ.ΚΜΤ, ii) οἱ γ.τ. τῶν παρακέντρων τοῦ τρ.ΚΜΤ, ὅταν τὸ Μ διατρέχη τὴν περιφέρειαν.

288. Δοθέντος ὀρθογωνίου παρίμου ΑΒΓΔ νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου του, τῶν ὁποῖων αὶ προβολαὶ ἐπὶ τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔ ἀποτελοῦν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα.

289. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ' και ΑΓΒ' και ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τρίτον ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΓΟ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α.

i) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον Γ'ΟΒ'Α εἶναι παρίμον.

ii) Τὰ μέσα τῶν ΑΒ, ΑΓ, Β'Γ' εἶναι κορυφαὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

iii) Ἐάν ἡ κορυφή Α μεταβάλλεται οὕτως, ὥστε τὸ μήκος τῆς ἐκ τοῦ Β διαμέσου τοῦ τρ.ΑΒΓ νὰ μένη σταθερόν, ἴσον μὲ l, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ Β'Γ'.

iv) Ἐάν κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῆς ΒΓ ἕτερον ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΓΑ' πρὸς τὰ ἔξω τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους.

290. Εἰς πᾶν τρ.ΑΒΓ αὶ προβολαὶ τοῦ ὀρθοκέντρου ἐπὶ τὴν ἔσωτερικὴν και ἔξωτερικὴν διχοτόμον τῆς \hat{A} κείνται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐνούσης τὸ μέσον τῆς ΒΓ μὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων.

291. Πᾶν ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΑΒΓΔ και τὸ τετράπλευρον μὲ κορυφὰς τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τεσσάρων τριγῶνων τῶν ὀριζομένων ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, Δ λαμβανομένας ἀνὰ τρεῖς εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς κέντρον.

292. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότερα τοῦ διπλασίου οὐοδῆποτε ὕψους τοῦ τρ.ΑΒΓ.

293. Μὲ κέντρα δύο δοθέντα σημεῖα νὰ γραφοῦν δύο ἴσοι κύκλοι, ὧν μία κοινὴ ἐφαπτομένη νὰ ἐφάπτεται δεδομένου κύκλου.

294. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν δεδομένων

$$\alpha, \beta - \gamma, \nu\gamma$$

295. Ἐστω Ρ τυχὸν σημεῖον ἡμιπεριφερείας διαμέτρου ΑΒ και $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$ δύο ἴσα τόξα αὐτῆς. Ἐάν αὶ ΓΑ και ΡΒ τέμνονται εἰς Ε και αὶ ΑΔ, ΡΓ εἰς Ζ, νὰ δειχθῇ ὅτι $EZ \perp AD$.

296. —Εἰς τὰ ἄκρα Α, Β διαμέτρου κύκλου φέρομεν ὁμορρόπους ἡμιεφαπτομένας ΑΧ, ΒΨ. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς μεταξύ τῶν ΑΧ, ΒΨ και φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΜ, ΒΜ τεμνοῦσας ἀντιστοίχως τὰς ΒΨ, ΑΧ εἰς Γ και Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εἰς Μ ἐφαπτομένη τῆς ἡμιπεριφερείας διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν ΑΔ και ΒΓ. Ἐφαρμογαὶ τῆς ἀσκήσεως 49. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων:

$$297. \nu\beta + \nu\gamma, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}.$$

$$298. \nu\beta + \nu\gamma, \beta, \gamma.$$

$$299. \nu\beta + \nu\gamma, \beta, \widehat{A}.$$

$$300. \nu\beta + \nu\gamma, \beta + \gamma, \widehat{B} - \widehat{\Gamma}.$$

$$301. \nu\beta + \nu\gamma, \beta - \gamma, \widehat{A}.$$

$$302. \nu\gamma - \nu\beta, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}.$$

$$303. \nu\gamma - \nu\beta, \beta, \gamma.$$

$$304. \nu\gamma - \nu\beta, \beta - \gamma, \widehat{B} - \widehat{\Gamma}.$$

$$305. \nu\gamma - \nu\beta, \widehat{A}, \beta + \gamma.$$

$$306. R, \beta - \gamma, \nu\gamma - \nu\beta.$$

307. Ἐφαρμογὴ τῆς ἀσκήσεως 148. Νὰ κατασκευασθῇ τρ.ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων: i) α, R, ρ_β. ii) υ_α. μ_α, ρ_α — ρ. iii) R, α, ρ + ρ_α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

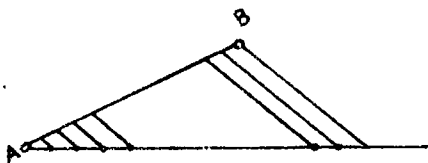
ΜΕΤΡΟΝ ΤΜΗΜΑΤΟΣ - ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΟΥ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

34. Πολλαπλασιασμός εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμὸν.

α') Πολλαπλασιασμός ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμὸν. Καλοῦμεν γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος AB ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμὸν v τὸ εὐθύγραμμον τμήμα $\Gamma\Delta$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα v εὐθυγράμμων τμημάτων ἴσων πρὸς AB . Γράφομεν : $\Gamma\Delta = v \cdot AB$.

β') Διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ. Εἶναι γνωστὸν ὅτι δοθέν εὐθύγραμμον τμήμα AB δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς v ἴσα μέρη (v φυσικός) (σχ. 45). Ἐκαστὸν ἐκ τῶν v τούτων ἴσων τμημάτων παρίσταται

μὲ $\frac{AB}{v}$ ἢ $\frac{1}{v} \cdot AB$.



Σχ. 45

γ') Πολλαπλασιασμός εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ρητὸν ἀριθμὸν m/v . Καλοῦμεν γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος AB ἐπὶ τὸν θετικὸν ρητὸν

ἀριθμὸν μ/ν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα $\Gamma\Delta$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα μ εὐθυγράμμων τμημάτων ἴσων πρὸς $\frac{AB}{\nu}$. Γράφομεν :

$$\Gamma\Delta = \frac{\mu}{\nu} \cdot AB$$

δ') Ἐξ ὀρισμοῦ τὸ γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ μηδέν εἶναι τὸ μηδενικὸν εὐθύγραμμον τμήμα. (Ὡς γνωστὸν εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων περιλαμβάνομεν καὶ τὸ μηδενικὸν τμήμα, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει ἑσωτερικὰ σημεῖα καὶ τοῦ ὁποῖου τὰ δύο ἄκρα συμπίπτουν).

ε') Τὸ γινόμενον εὐθυγράμμου τμήματος AB ἐπὶ τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν $\lambda = \psi_0, \psi_1\psi_2\psi_3 \dots$ ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει καὶ εἶναι ἓν εὐθύγραμμον τμήμα $\Gamma\Delta$, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται ἀπὸ τὸ AB , καθ' ὃν τρόπον ὁ ἀριθμὸς λ ἐκ τῆς ἀκολουθίας $\psi_0, \psi_0\psi_1, \psi_0\psi_1\psi_2, \psi_0, \psi_1\psi_2\psi_3 \dots \psi_0\psi_1\psi_2 \dots \psi_n \dots$

στ') Λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων. Καλοῦμεν λόγον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τμήμα $\Gamma\Delta$ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν λ , ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον τὸ $\Gamma\Delta$ δίδει τὸ AB . Γράφομεν :

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \lambda \iff AB = \lambda \cdot \Gamma\Delta$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι δοθέντων τῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$ ὑπάρχει πάντοτε ὁ λόγος αὐτῶν λ , ἥτοι θετικὸς ἀριθμὸς λ τοιοῦτος, ὥστε $\lambda \cdot \Gamma\Delta = AB$

ζ') Μέτρον εὐθυγράμμου τμήματος. Δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος AB καὶ ἑτέρου τμήματος $\Gamma\Delta = d_0$, καλοῦμεν μέτρον τοῦ AB μετρηθέντος μὲ μόνάδα τὸ d_0 τὸν λόγον τοῦ AB πρὸς τὸ d_0 . Τὸ μέτρον τοῦ AB , δηλ. ὁ λόγος AB/d_0 , συμβολίζεται μὲ $\mu(AB)$ ἢ (AB) ἢ, ἐπὶ τὸ ἀπλούστερον (βλ. § 57), AB .

η') Τοὺς ἀνωτέρω ἀπλοὺς ὀρισμούς, καθὼς καὶ τὸ πρῶτον μέρος τῆς § 46, παραθέτομεν χάριν διδακτικῆς σκοπιμότητος. Πληρεστέραν θεωρίαν τοῦ μέτρου ἑνὸς τμήματος, τοῦ λόγου δύο τμημάτων καὶ τοῦ γινομένου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμὸν δίδομεν κατωτέρω εἰς τὰς §§ 40 - 44.

θ') Σύμμετρα εὐθύγραμμα τμήματα. Ἐστῶσαν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$. Ἐὰν ὑπάρχη τρίτον εὐθύγραμμον τμήμα d_0 τοιοῦτον, ὥστε $\frac{AB}{d_0} = \mu$ καὶ $\frac{\Gamma\Delta}{d_0} = \nu$, ὅπου μ καὶ ν φυσικοὶ ἀριθμοί, τότε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$ λέγονται σύμμετρα πρὸς ἄλληλα καὶ τὸ d_0 κοινὸν μέτρον αὐτῶν.

Προφανῶς εἶναι τότε $AB = \mu \cdot d_0$ καὶ $d_0 = \frac{1}{\nu} \Gamma\Delta$. Ἐπομένως, $AB = \mu \cdot \frac{1}{\nu} \Gamma\Delta = \frac{\mu}{\nu} \Gamma\Delta \Rightarrow \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\mu}{\nu}$. Ὁ λόγος λοιπὸν δύο συμμέτρων εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι σύμμετρος ἀριθμὸς.

ι') Ἀσύμμετρα πρὸς ἄλληλα λέγονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα, ὅταν οὐδὲν κοινὸν μέτρον αὐτῶν ὑπάρχη. (Δηλ. δὲν ὑπάρχει εὐθύγραμμον τμήμα.

τὸ ὁποῖον ἐπαναλαμβανόμενον ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν νὰ δίδῃ τὸ ἕν τμήμα καὶ συγχρόνως ἐπαναλαμβανόμενον ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν νὰ δίδῃ τὸ ἄλλο. Τὴν ὑπαρξίν ἀσυμμέτρων πρὸς ἀλλήλα τμημάτων ἀνεκάλυψεν πρῶτος ὁ Πυθαγόρας ἀποδείξας ὅτι ἡ πλευρὰ καὶ ἡ διαγώνιος τετραγώνου εἶναι τμήματα ἀσύμμετρα πρὸς ἀλλήλα).

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

34a. Ἀκολουθία. — α') Ἐστω F ἕν σύνολον ἐκ στοιχείων οἰασθῆ-
ποτε φύσεως. Καλεῖται ἀκολουθία ἐκ στοιχείων τοῦ F μία μονοσήμαντος
ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἰς τὸ F .

Τὸ στοιχεῖον τοῦ F τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν ἀριθμὸν 1 ἄς παρασταθῇ
διὰ τοῦ a_1 . Τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν 2 ἄς παρασταθῇ μὲ a_2 καὶ γενικῶς τὸ
στοιχεῖον τοῦ F τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν n ἄς παρασταθῇ
μὲ a_n . Ἐχομεν τότε τὴν ἀντιστοιχίαν (ἀπεικόνισιν) :

$$(1) \quad \left| \begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & \dots n \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots a_n \dots \end{array} \right|$$

Τὰ στοιχεῖα $a_1, a_2, a_3 \dots a_n \dots$ τοῦ F (δηλ. αἱ εἰκόνες τῶν 1, 2, 3, ... n ...) λέγονται **ὄροι** τῆς ἀκολουθίας καὶ δὲν εἶναι ἀναγκαίως ὄλα διαφορετικὰ μεταξύ των.

Τὸ στοιχεῖον a_n λέγεται **νοοστὸς ὄρος** τῆς ἀκολουθίας ἢ **ὄρος** μὲ **δείκτην** n .

Ἡ ἀκολουθία (1) παρίσταται συντόμως μὲ :

$$(2) \quad a_1, a_2, a_3 \dots a_n \dots \text{ ἢ μὲ } (a_1, a_2, a_3 \dots a_n \dots) \text{ ἢ ἀπλῶς } \{a_n\}.$$

Ἡ ἀκολουθία $\{a_n\}$ λέγεται καὶ **ἀπέραντος** ἀκολουθία, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι **παντὸς ὄρου** ἔπονται πάντοτε καὶ ἄλλοι ὄροι, τὸ δὲ πλῆθος τῶν στοιχείων τῆς εἶναι ἄπειρον.

β') Ἀκολουθία **ἀριθμῶν**. Ἐὰν τὸ F εἶναι ἕν ἀριθμοσύνολον, τότε κάθε ἀκολουθία ἐκ στοιχείων τοῦ F εἶναι μία ἀκολουθία ἀριθμῶν ἢ ἀριθμοακολουθία.

γ') Εἰς τὰ ἐπόμενα μὲ τὴν λέξιν «ἀκολουθία» θὰ ἐννοοῦμεν ἀκολουθίαν **πραγματικῶν ἀριθμῶν**, διότι μόνον τοιαύτας ἀκολουθίας θὰ χρησιμοποιοῦμεν.

δ') Ἡ ἀνωτέρω ἀντιστοιχία (1) δημιουργεῖ μίαν συνάρτησιν $f(n)$, τῆς ὁποίας ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ n διατρέχει τὰς ἀκεραίας τιμὰς 1, 2, 3, ... n , ... (δηλ. τὸ πεδῖον ὀρισμοῦ εἶναι τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν), ἐνῶ αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς τιμὰς 1, 2, 3, ... n , εἶναι οἱ ὄροι $a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots$ τῆς ἀκολουθίας. Ἀντὶ δὲ νὰ γράφωμεν τοὺς ὄρους τῆς ἀκολουθίας (2) ὡς τιμὰς μιᾶς συναρτήσεως $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$ μεταχειριζόμεθα δείκτας $a_1, a_2, \dots a_n \dots$

Ούτω π.χ. ἡ ἀκολουθία :

$$(3) \quad \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{v}, \dots \text{ ἢ συντόμως } \left\{ \frac{1}{v} \right\}$$

δημιουργεῖται, ὅταν εἰς τὴν θέσιν ἐκάστου φυσικοῦ ἀριθμοῦ γραφῆ ὁ ἀντίστροφός του. Οἱ ὄροι τῆς ἀκολουθίας (3) εἶναι αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $f(v) = \frac{1}{v}$ διὰ $v = 1, 2, 3, \dots, v, \dots$ ἐπ' ἀπειρον.

Δὲν εἶναι ὅμως πάντοτε εὐκόλον νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως $f(v)$, τῆς ὁποίας τιμαὶ εἶναι οἱ ὄροι ἀκολουθίας, οὔτε πάντοτε δυνατόν. Οὔτω π.χ., ἂν ὡς πρῶτος ὄρος μιᾶς ἀκολουθίας ληφθῆ ὁ 1, ὡς δεῦτερος ὁ 1, ἕκαστος δὲ ἄλλος ληφθῆ ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προηγουμένων του, ἡ ἀκολουθία εἶναι ἐντελῶς ὀρισμένη :

$$(5) \quad \alpha_1=1, \alpha_2=1, \alpha_3=2, \alpha_4=3, \alpha_5=5, \alpha_6=8, \alpha_7=13, \alpha_8=21 \dots,$$

διότι κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν, ὄσους ὄρους θέλομεν, ἀλλ' ἡ ἔκφρασις τοῦ *ν*-οστοῦ ὄρου δὲν εἶναι φανερά. (Δύναται ὅμως νὰ εὑρεθῆ ἡ μορφή τοῦ α_n διὰ καταλλήλου ἐρεῦνης).

Ἡ (5) ὀρίζεται ἐκ τοῦ νόμου : $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$ (ἀναδρομικὴ σχέσις) καὶ τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν : $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$.

Γενικῶς, ἂν δοθῆ εἰς νόμος, διὰ τοῦ ὁποίου ἕκαστος ὄρος τῆς ἀκολουθίας δημιουργεῖται ἐκ τῶν προηγουμένων του, δοθοῦν δὲ καὶ ὀρισμένοι πρῶτοι ὄροι αὐτῆς, τότε πάντες οἱ ὄροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι τελείως καθορισμένοι ἀριθμοί, χωρὶς ἢ ἔκφρασις τοῦ *ν*-οστοῦ ὄρου νὰ εἶναι ἐν γένει γνωστή.

ε') Ἐνίοτε ὁ δείκτης n τοῦ α_n λαμβάνεται οὕτως, ὥστε νὰ διατρέχῃ τὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3, ..., ὁπότε ἡ ἀκολουθία γράφεται $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$, ὁ δὲ α_{-1} εἶναι τότε ὁ *ν*-οστός ὄρος.

στ') **Φράγματα.** Ἐὰν ὑπάρχῃ σταθερὸς ἀριθμὸς k μικρότερος ὄλων τῶν ὄρων τῆς ἀκολουθίας, δηλ. ἂν ἡ ἀνισότης $k < \alpha_n$ πληροῦται δι' ὄλα τὰ n ($n = 1, 2, 3, \dots$) τοῦ k μένοντος σταθεροῦ, τότε ὁ k λέγεται **κάτω φράγμα** τῆς ἀκολουθίας.

Ὅμοιως, ἂν ὑπάρχῃ σταθερὸς ἀριθμὸς **μεγαλύτερος ὄλων τῶν ὄρων** τῆς ἀκολουθίας, οὗτος λέγεται **ἄνω φράγμα** τῆς ἀκολουθίας.

Ἐὰν ὑπάρχῃ καὶ κάτω καὶ ἄνω φράγμα, ἡ ἀκολουθία λέγεται **φραγμένη**.

ζ') **Μονότονοι ἀκολουθίαι.**

i) Ἐὰν οἱ ὄροι τῆς ἀκολουθίας $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ βαίνουν αὐξανόμενοι, δηλ. ἂν εἶναι $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ δι' ὄλα τὰ n ($n = 1, 2, \dots$), τότε ἡ ἀκολουθία λέγεται **αὐξουσα**.

ii) Ἐὰν οἱ ὄροι βαίνουν μὴ σταθερῶς αὐξανόμενοι, δηλ. ἂν εἶναι $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$, ὅπου τὸ $=$ δὲν ἰσχύει δι' ὄλα τὰ n ἀπὸ τινος καὶ ἐφεξῆς, ἡ ἀκολουθία λέγεται **αὐξουσα ὑπὸ τὴν εὐρείαν ἔννοιαν ἢ μὴ φθίνουσα**. Εἰς τὴν μὴ φθί-

νουςαν ἀκολουθίαν ἕκαστος ὅρος εἶναι μικρότερος, ἂν ὄχι τοῦ ἀμέσως ἐπομένου του, πάντως κάποιου ἐκ τῶν ἐπομένων του ὄρων.

iii) Ἐάν ἡ ἰσότης $a_n = a_{n+1}$ ἰσχύη ἀπό τινος τιμῆς τοῦ n καί πέραν, ἡ ἀκολουθία ἄς λέγεται **τελικῶς σταθερά**.

iv) Ἐάν οἱ ὄροι τῆς ἀκολουθίας βαίνουν ἐλαττούμενοι, δηλ. ἂν εἶναι $a_n > a_{n+1}$ δι' ὅλα τὰ n , ἡ ἀκολουθία λέγεται **φθίνουσα**.

v) Ἐάν οἱ ὄροι βαίνουν μὴ σταθερῶς ἐλαττούμενοι, δηλ. εἶναι $a_n \geq a_{n+1}$, ὅπου τὸ $=$ δὲν ἰσχύει δι' ὅλα τὰ n ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, ἡ ἀκολουθία λέγεται **φθίνουσα ὑπὸ τὴν εὐρείαν ἔννοιαν ἢ μὴ ἀβξουσα**.

Πᾶσαι αἱ ἀνωτέρω ἀκολουθίαι λέγονται **μονότονοι**.

35. Ἡ ἔννοια τοῦ ὄριου ἀκολουθίας.—α') Ὅριον τὸ μηδέν.

Ἐστω ἡ ἀπέραντος ἀκολουθία :

$$a_1 = \frac{1}{1}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \dots, a_n = \frac{1}{n}, \dots$$

Ταύτης οὐδεὶς ὅρος εἶναι μηδέν. Ὅσον ὅμως αὐξάνει τὸ n , οἱ ὄροι τῆς καθίστανται ὄλονέν μικρότεροι, πλησιάζοντες ὄλονέν καὶ περισσότερον πρὸς τὸ μηδέν. Συγκεκριμένως, ἂν δοθῇ ὁποιοσδήποτε θετικὸς ἀριθμὸς ε , ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι οὗτος, οἱ ὄροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι, ἀπὸ μιᾶς τάξεως (δείκτου) καὶ πέραν, μικρότεροι τοῦ ε . Πράγματι ἡ ἀνισότης $a_n < \varepsilon$, ἢτοι $\frac{1}{n} < \varepsilon$, ἀληθεύει, ὅταν $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ n δύναται νὰ ληφθῇ ἀρκετὰ μέγας, ὥστε νὰ ὑπερβαίνη τὸν δεδομένον ἀριθμὸν $1/\varepsilon$, διὰ τοῦτο ὑπάρχει ὅρος τῆς ἀκολουθίας μικρότερος τοῦ ἀθαιρέτως μικροῦ θετικοῦ ε καὶ πάντες οἱ μετ' αὐτὸν ὄροι εἶναι ἐπίσης μικρότεροι τοῦ ε . Τὴν ἀνωτέρω ἀκολουθίαν χαρακτηρίζομεν ὡς **τείνουσαν πρὸς τὸ μηδέν ἢ ἔχουσαν ὄριον μηδέν**.

Ἐστω ἐπίσης ἡ ἀκολουθία :

$$a_1 = \frac{-1}{1}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{-1}{3}, \dots, a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \dots$$

Δι' αὐτὴν ἰσχύει ὅτι καὶ μετὰ τὴν προηγουμένην, δηλ. ὅσον αὐξάνει ὁ n , οἱ ὄροι τῆς πλησιάζουν ὄλονέν καὶ στενώτερον πρὸς τὸ μηδέν, μετὰ τὴν διαφορὰν ὅτι ταλαντεύονται ἐκατέρωθεν τοῦ μηδενός. Συνεπῶς θὰ εἴπωμεν δι' αὐτὴν ὅτι ἔχει ὄριον τὸ μηδέν.

Γενικῶς μία ἀκολουθία $\{a_n\}$ λέγομεν ὅτι ἔχει ὄριον τὸ μηδέν (ἢ **τείνει πρὸς τὸ μηδέν**), ὅταν δοθέντος οἰοσδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ ε (ὁσονδήποτε μικροῦ καὶ ἂν θέλη τις) οἱ ὄροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικρότεροι τοῦ ε , ἀπὸ τινος ὄρου καὶ πέραν. Δηλαδή: Ἐάν, δοθέντος τοῦ ἀθαιρέτως μικροῦ θετικοῦ ε , εὕρισκεται πάντοτε εἰς δείκτης N τοιοῦτος, ὥστε δι' ὅλους τοὺς δείκτας $n \geq N$ νὰ εἶναι $|a_n| < \varepsilon$, τότε ἡ $\{a_n\}$ ἔχει ὄριον τὸ μηδέν.

Γράφομεν τότε :

$$\boxed{\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = 0} \quad (\text{limes} = \text{δριον})$$

ή $a_v \rightarrow 0$ ή $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = 0$

(Με χρῆσιν τῶν παραδεδεγμένων συμβόλων δυνάμεθα νά γράψωμεν :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = 0, \text{ όταν:}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall v > N \Rightarrow |a_v| < \varepsilon)$$

Μηδενική ἀκολουθία λέγεται κάθε ἀκολουθία, ἡ ὁποία ἔχει δριον τὸ μηδέν.

β') *Θεώρημα.* Ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^v}, \dots$ (συντόμως ἢ $\left\{ \frac{1}{2^v} \right\}$) ἔχει δριον τὸ μηδέν. (Μηδενική ἀκολουθία).

Ἀπόδειξις. Θὰ δείξωμεν πρῶτον ὅτι δοθέντος φυσικοῦ ἀριθμοῦ $v > 2$ ὑπάρχει δύναμις τοῦ 2, ἥτις τὸν ὑπερβαίνει. Τοῦτο φαίνεται ἐκ τῆς γνωστῆς ταυτότητος $(x^v - 1)/(x - 1) = x^{v-2} + x^{v-3} + \dots + x + 1$, ἥτις διὰ $x = 2$ δίδει:

$$\frac{2^{v-1} - 1}{2 - 1} = 2^{v-2} + 2^{v-3} + \dots + 2 + 1 > 1 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{v-1 \text{ φορές}} + 1 \Rightarrow 2^{v-1} - 1 > v - 1 \Rightarrow 2^{v-1} > v.$$

Ἐστω τώρα ε τυχῶν θετικὸς (ὅσονδήποτε μικρὸς). Ἡ ἀνισότης $\frac{1}{2^v} < \varepsilon \iff 2^v > \frac{1}{\varepsilon}$. Ἐπειδὴ, δοθέντος θετικοῦ, ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς, ὅστις τὸν ὑπερβαίνει, διὰ τοῦτο ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς N τοιοῦτος, ὥστε $N > 1/\varepsilon$. Ἀρκεῖ λοιπὸν ὁ v νὰ ἐκλεγῆ ἔτσι, ὥστε $2^v > N$, ὅποτε θὰ εἶναι καὶ $2^v > 1/\varepsilon$. Ἄλλ' ἡσχέσις $2^v > N$ ἰσχύει, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, ὅταν ὁ $v = N - 1$. Ἐπομένως καὶ ἡ ἀνισότης $2^v > \frac{1}{\varepsilon}$ ἰσχύει ἀπὸ τινος ἐκθέτου $N - 1$ καὶ ἐφεξῆς, ἄρα καὶ ἡ $\frac{1}{2^v} < \varepsilon$. Ἄρα ἡ $\left\{ \frac{1}{2^v} \right\}$ εἶναι μηδενική ἀκολουθία (βλ. ἐδάφ. α').

γ') **Ὅριον πεπερασμένον.** — Δοθείσης τῆς ἀκολουθίας $a_1, a_2, \dots, a_v, \dots$ ἐὰν ὑπάρχη σταθερὸς ἀριθμὸς l τοιοῦτος, ὥστε ἡ ἀκολουθία $a_1 - l, a_2 - l, a_3 - l, \dots, a_v - l, \dots$ νὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τότε λέγομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἀκολουθία $a_1, a_2, a_3, \dots, a_v, \dots$ ἔχει δριον τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν l (ἢ τείνει πρὸς τὸν l). Γράφομεν δὲ τότε :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = l \quad \text{ή} \quad a_v \rightarrow l \quad \text{ή} \quad \lim_{v \rightarrow \infty} a_v = l$$

Μὲ ἄλλας λέξεις, ὅταν ἡ διαφορά $a_v - l$ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν διὰ $v \rightarrow \infty$, τότε ἡ μεταβλητὴ a_v τείνει πρὸς τὴν σταθεράν l (ἔχει δριον τὴν l).

Ούτω π.χ. ἡ ἀκολουθία $\left\{ \frac{v+1}{v} \right\}$ τείνει πρὸς τὴν μονάδα, ὅταν $v \rightarrow \infty$, διότι ἡ διαφορά $\frac{v+1}{v} - 1 = \frac{1}{v}$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν.

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = l \quad \text{ὅταν:}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall v > N \Rightarrow |a_v - l| < \varepsilon$$

δ') Ἡ μοναδικότης τοῦ ὁρίου (Θ).—Ἐὰν ὑπάρχη τὸ $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v$, τότε τοῦτο εἶναι μοναδικόν.

Θὰ δεῖξωμεν δηλ. ὅτι, ἂν (1) $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = l_1$ καὶ (2) $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = l_2$, τότε $l_1 = l_2$.

Πράγματι, λόγῳ τῆς (1), δοθέντος θετικοῦ $\varepsilon/2$ ὑπάρχει δείκτης N_1 τοιοῦτος, ὥστε:

$$(3) \quad |a_v - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{διὰ κάθε } v > N_1 \text{ (βλ. ἐδάφ. γ')}.$$

Ἐπίσης, λόγῳ τῆς (2), ὑπάρχει δείκτης N_2 τοιοῦτος, ὥστε:

$$(4) \quad |a_v - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{διὰ κάθε } v > N_2$$

Ἐὰν N ὁ μεγαλύτερος (ἢ μὴ μικρότερος) τῶν N_1, N_2 (ἄλλως: $N = \max(N_1, N_2)$), τότε διὰ κάθε $v > N$ συναληθεύουν αἱ (3) καὶ (4) δηλ.

$$(5) \quad |a_v - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{καὶ} \quad |a_v - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall v > N.$$

Ἐκ τῶν (5) συνάγεται:

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |l_1 - a_v + a_v - l_2| = |a_v - l_2 - (a_v - l_1)| \\ &\leq |a_v - l_2| + |a_v - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{δηλ. } |l_1 - l_2| < \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ μόνον τὸ μηδέν εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικρότερον παντὸς θετικοῦ, θὰ εἶναι $|l_1 - l_2| = 0$ καὶ $l_1 = l_2$. (Ἐνταῦθα ἐγινε χρῆσις τοῦ θεωρήματος τῆς Ἀλγέβρας $|x - y| \leq |x| + |y|$).

ε') (Θ). Ἐὰν k πραγματικὸς $\neq 0$, τότε, ἂν $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = l$, θὰ εἶναι καὶ $\lim_{v \rightarrow \infty} \{ka_v\} = kl$.

Ἄρκει νὰ δεῖξωμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία $ka_1, ka_2, \dots, ka_v, \dots, kl, \dots$ εἶναι μηδενική. Ἦτοι δοθέντος $\varepsilon > 0$, ἰσχύει ἀπὸ τινος v καὶ πέραν, $|ka_v - kl| < \varepsilon$. Τοῦτο ἰσοδυναμεῖ: $|k(a_v - l)| < \varepsilon \Leftrightarrow |k| \cdot |a_v - l| < \varepsilon \Leftrightarrow a_v - l < \varepsilon/|k|$. Τὸ τελευταῖον τοῦτο συμβαίνει, ἀφοῦ ἡ ἀκολουθία $\{a_v - l\}$ εἶναι μηδενική (ἐδάφ. α')

36. Ἀξίωμα τοῦ Dedekind διὰ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς (ἀξίωμα τῆς συνεχείας).

Ἐὰν πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ χωρισθοῦν εἰς δύο μὴ κενὰς κλάσεις οὕτως, ὥστε

1) Ἐκαστος ἀριθμὸς νὰ ἀνήκει εἰς μίαν καὶ μόνον μίαν ἐκ τῶν δύο κλάσεων.

2) Πᾶς ἀριθμὸς τῆς πρώτης κλάσεως νὰ εἶναι μικρότερος παντὸς ἀριθμοῦ τῆς δευτέρας

τότε ἢ ὑπάρχει εἰς τὴν πρώτην κλάσιν εἰς ἀριθμὸς μεγαλύτερος ὄλων τῶν ἄλλων ἀριθμῶν τῆς πρώτης κλάσεως ἢ ὑπάρχει εἰς τὴν δευτέραν κλάσιν εἰς ἀριθμὸς μικρότερος ὄλων τῶν ὑπολοίπων ἀριθμῶν τῆς δευτέρας κλάσεως.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος καλεῖται τομῆ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν κατὰ Dedekind.

37. Ὅριον μονοτόνου ἀκολουθίας

α') Θεώρημα. «Ἐὰν μία ἀκολουθία εἶναι ἀξέουσα καὶ ἔχη ἄνω φράγμα τὸ c (§ 34, στ'), τότε ἡ ἀκολουθία αὕτη τείνει πρὸς ἓν ὄριον, τὸ ὅποιον εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ c . Ἐὰν μία ἀκολουθία εἶναι φθίνουσα καὶ ἔχη κάτω φράγμα k , τότε ἡ ἀκολουθία αὕτη τείνει πρὸς ἓν ὄριον μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ k ».

Ἀπόδειξις. Ἐστω ἀξέουσα καὶ φραγμένη ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν.

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{n-1} < a_n < a_{n+1} < \dots = \{a_n\}.$$

Δι' αὐτῆς πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ χωρίζονται εἰς δύο κλάσεις A καὶ B ὡς ἑξῆς:

Εἰς τὴν κλάσιν A ἀνήκει κάθε ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι μικρότερος ἐνὸς οἰουδήποτε ὄρου τῆς $\{a_n\}$. Εἰς τὴν B ἀνήκει κάθε ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι μεγαλύτερος ὄλων τῶν ὄρων τῆς $\{a_n\}$. Οὐδεμία τῶν δύο κλάσεων εἶναι κενή, διότι ἡ A περιέχει π.χ. ὄλους τοὺς ὄρους τῆς ἀξέουσης ἀκολουθίας $\{a_n\}$, ἡ δὲ B περιέχει τὸ ἄνω φράγμα καὶ πάντας τοὺς μεγαλύτερους αὐτοῦ. Κάθε δὲ πραγματικὸς ἀριθμὸς x ἀνήκει ἢ εἰς τὴν A ἢ εἰς τὴν B κλάσιν. Διότι ἡ ἀνισότης $x < a_n$ ἢ ἀληθεύει διὰ τινὰ τιμὴν τοῦ n , ὁπότε $x \in A$ ἢ δι' οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ n ἀληθεύει. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ὁ x δὲν εἶναι μικρότερος κανενὸς ὄρου τῆς ἀκολουθίας, ἀλλὰ οὔτε καὶ ἴσος, διότι τότε θὰ ἦτο μικρότερος τοῦ ἐπομένου ὄρου. Ἄρα ὁ x εἶναι μεγαλύτερος ὄλων τῶν ὄρων τῆς ἀκολουθίας καὶ ἀνήκει εἰς τὴν κλάσιν B .

Τέλος κάθε ἀριθμὸς a τῆς κλάσεως A εἶναι μικρότερος παντὸς ἀριθμοῦ a' τῆς κλάσεως B . Διότι διὰ τὸν a ἰσχύει: $a < a_n$, ἐνῶ διὰ τὸν a' ἰσχύει $a' > a_n$.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι δὲν ὑπάρχει εἰς τὴν πρώτην κλάσιν A ἀριθμὸς μεγαλύτερος ὄλων τῶν ἀριθμῶν τῆς A . Διότι, ἂν $x \in A$, τότε ὑπάρχει ὄρος a_n τῆς ἀκολουθίας τοιοῦτος, ὥστε $x < a_n$. Ἐπειδὴ ὁμοίως $a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_n \in A$. Δηλ., ἂν $x \in A$, ὑπάρχει πάντοτε εἰς μεγαλύτερος του (ὁ a_n) ἀνήκων πάλιν εἰς τὴν A .

Ἐπομένως κατὰ τὸ ἀξίωμα τοῦ Dedekind (§ 36) ὑπάρχει εἰς ἀριθμὸς τῆς κλάσεως B μικρότερος ὄλων τῶν ἄλλων ἀριθμῶν τῆς κλάσεως B . Ἐστω

οὗτος ὁ l . Ὁ l , ὡς εἶπομεν, εἶναι μεγαλύτερος ὄλων τῶν ὄρων τῆς $\{a_n\}$. Δοθέντος τώρα θετικοῦ ἀριθμοῦ ε ὅσονδῆποτε μικροῦ, ὁ ἀριθμὸς $l - \varepsilon$ ἀνήκει εἰς τὴν κλάσιν A , ἄρα ὑπάρχει δεικτής n , δι' ὃν $l - \varepsilon < a_n < l$ (1). Ἡ (1) ἰσχύει καὶ ὅταν ἀντὶ n τεθῆ $n+1, n+2, \dots$. Ἡ (1) συνεπάγεται $0 < l - a_n < \varepsilon$.

Ἡ τελευταία διπλῆ ἀνισότης ἰσχύει διὰ $n, n+1, n+2, \dots$ ἐπ' ἄπειρον καὶ δεικνύει ὅτι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. (§ 35, β').

Ἐντελῶς ὁμοίως δεικνύεται ὅτι καὶ πᾶσα φθίνουσα ἀκολουθία ἔχουσα κάτω φράγμα τείνει πρὸς ὄριον μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ κάτω φράγματος.

β') (Θ). Ἐάν μία ἀκολουθία $\{a_n\}$ εἶναι ἀξουσα ὑπὸ τὴν εὐρείαν ἔννοιαν (μὴ φθίνουσα, § 34, ζ') καὶ ἔχη ἄνω φράγμα τὸ c , τότε ἡ $\{a_n\}$ τείνει πρὸς ἓν ὄριον, τὸ ὅποτον εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ c . Ἐάν μία ἀκολουθία $\{a_n\}$ εἶναι φθίνουσα ὑπὸ τὴν εὐρείαν ἔννοιαν (μὴ ἀξουσα) καὶ ἔχη κάτω φράγμα k , τότε ἡ $\{a_n\}$ τείνει πρὸς ὄριον μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ k .

Διότι ἡ ἀπόδειξις τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἐφαρμόζεται καὶ πάλιν.

γ') Ἐάν μία ἀκολουθία εἶναι τελικῶς σταθερά (§ 34, ζ'), ἔστω ἡ $a_1, a_2, a_3, \dots, c, c, \dots$ (ἐπ' ἄπειρον), τότε ἔχει προφανῶς ὄριον τὸ c .

38. Θεώρημα τοῦ ἔγκλιβωτισμοῦ. α') Οἱ ὑπολογισμοὶ μηκῶν, ἔμβαδῶν καὶ ὄγκων εἰς τὴν στοιχειώδη γεωμετρίαν, καθὼς καὶ ἀποδείξεις θεμελιωδῶν θεωρημάτων βασίζονται ἐπὶ ἑνὸς Ἀλγεβρικοῦ θεωρήματος, τὸ ὅποτον καλεῖται «*Θεώρημα τοῦ ἔγκλιβωτισμοῦ*». Τὸ περιεχόμενον τοῦ θεωρήματος τούτου ἔχει ὡς ἑξῆς:

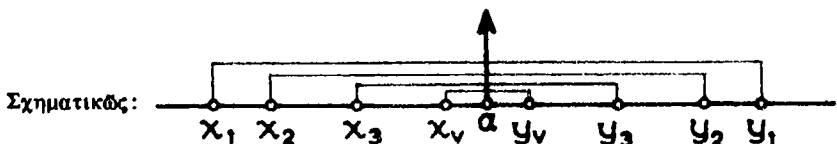
Ὅρισμός. Μία ἀξουσα ἀκολουθία $\{x_n\}$ θετικῶν ἀριθμῶν καὶ μία φθίνουσα ἀκολουθία $\{y_n\}$ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ἓνα ἔγκλιβωτισμὸν, ὅταν πληροῦνται αἱ κάτωθι δύο συνθήκαι :

1ον) Διὰ κάθε $n \in \Phi$, ἰσχύει $x_n < y_n$.

2ον) Δοθέντος οἰουδῆποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ ε (ὅσονδῆποτε μικροῦ) ἡ διαφορά $y_n - x_n$ εἶναι $< \varepsilon$ ἀπὸ τινος τιμῆς τοῦ n καὶ πέραν.

Ὁ ἔγκλιβωτισμὸς παρίσταται μὲ $(x_n | y_n)$.

Θεώρημα.— Κάθε ἔγκλιβωτισμὸς $(x_n | y_n)$ ὀρίζει μονοσημάντως ἓνα πραγματικὸν ἀριθμὸν a , ὅστις εἶναι τὸ κοινὸν ὄριον, πρὸς τὸ ὅποτον τείνουν ἀμφότεραι αἱ ἀκολουθίαι $\{x_n\}$ καὶ $\{y_n\}$.



Δυνάμεθα νὰ εἶπωμεν ὅτι κάθε ὄρος τῆς $\{x_n\}$ εἶναι μία κατ' ἑλλειψιν προσέγγισις τοῦ ἀριθμοῦ τούτου a καὶ κάθε ὄρος τῆς $\{y_n\}$ εἶναι μία καθ'

ὑπεροχὴν προσέγγισης τοῦ a . Γενικῶς ὁ a εἶναι ὁ μόνος ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι μεγαλύτερος ὄλων τῶν x_n καὶ μικρότερος ὄλων τῶν y_n .

Ἀπόδειξις. i) Ἐάν θεωρήσωμεν τὴν ἀκολουθίαν μὲ θετικούς δρους: $y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n, \dots$, βλέπομεν, λόγῳ τῆς 2ας ὑποθέσεως, ὅτι ἡ ἀκολουθία αὐτὴ ἔχει ὄριον τὸ μηδὲν (§ 35, α'), ὥστε:

$$(1) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} (y_v - x_v) = 0.$$

ii) Ἡ αὐξουσα ἀκολουθία $\{x_n\}$ ἔχει ἄνω φράγμα τὸν τυχόντα ὄρον τῆς $\{y_n\}$ λόγῳ τῆς 1ης ὑποθέσεως, ἐπομένως τείνει πρὸς κάποιον ὄριον, ἔστω τὸ a' , μεγαλύτερον ὄλων τῶν ὄρων τῆς (§ 37, α'). Ὡστε δοθέντος τυχόντος θετικοῦ ε ὅσονδῆποτε μικροῦ ἰσχύει ἀπὸ τινος δείκτου v_1 καὶ πέραν:

$$(2) \quad 0 < a' - x_v < \varepsilon/2.$$

iii) Ἡ φθίνουσα ἀκολουθία $\{y_n\}$ ἔχουσα ὡς κάτω φράγμα οἷονδῆποτε ὄρον τῆς $\{x_n\}$ (προϋπόθεσις 1η) τείνει πρὸς ἓν ὄριον a'' (§ 37α') προφανῶς μικρότερον ὄλων τῶν ὄρων τῆς. Ἐπομένως ἀπὸ τινος δείκτου v_2 καὶ πέραν:

$$(3) \quad 0 < y_v - a'' < \varepsilon/2.$$

Ἐάν v ὁ μεγαλύτερος ἐκ τῶν v_1 καὶ v_2 (ἢ μὴ μικρότερος τούτων), τότε αἱ (2) καὶ (3) δίδουν ἀπὸ τοῦ v καὶ πέραν

$$(4) \quad 0 < a' - x_v < \varepsilon/2$$

$$(5) \quad 0 < y_v - a'' < \varepsilon/2.$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (4) καὶ (5) λαμβάνομεν $0 < y_v - x_v - (a'' - a') < \varepsilon$, τὸ ὄποσον σημαίνει:

$$(6) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} (y_v - x_v) = a'' - a' \quad (\S 35, \beta').$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (6) $\Rightarrow a'' - a' = 0 \iff a' = a''$. (§ 35, δ'). Ἐρα ἡ $\{x_n\}$ καὶ $\{y_n\}$ τείνουν πρὸς κοινὸν ὄριον.

β) Ὁ ἐγκιβωτισμὸς $(x_n | y_n)$ ὑπάρχει καὶ ὀρίζεται ὁμοίως καὶ εἰς τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ ἀκολουθία $\{x_n\}$ εἶναι μὴ φθίνουσα (ἀντι αὐξουσα), δηλ. $x_n \leq x_{n+1}$ ἢ ἡ ἀκολουθία $\{y_n\}$ εἶναι μὴ αὐξουσα (ἀντι φθίνουσα), δηλ. $y_n \geq y_{n+1}$ ἢ ὅταν συμβαίνουν ἀμφότερα.

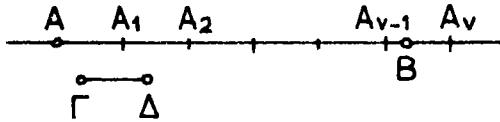
Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

39. α') Ἡ δυνατότης τῆς μετρήσεως τῶν τμημάτων βασίζεται ἐπὶ τοῦ κατωτέρω διδομένου ἀξιώματος, τὸ ὄποσον διευτυπώθη ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ὡς ἐκ τούτου καλεῖται *ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους*.

Τὸ ἀξίωμα τοῦτο ἐπιτρέπει, ὅπως δοθέντος ἑνὸς τμήματος - μονάδος νὰ ἀντιστοιχίζωμεν μονοτρόπως, εἰς ἕκαστον τμήμα, ἓνα θετικὸν ἀριθμὸν, ὅστις καὶ μέτρον τοῦ τμήματος καλεῖται.

Ἄξιομα τοῦ Ἀρχιμήδους. — «Υπάρχει πάντοτε φυσικὸς ἀριθμὸς ν τοιοῦτος, ὥστε ἓν δεδομένον τμήμα $\Gamma\Delta$ ἐπαναλαμβανόμενον ν φορὰς ὑπερβαίνει ὅποιονδήποτε δεδομένον τμήμα AB ».



Σχ. 45α

Ἡ ἔννοια τοῦ ἀξιώματος καταφαίνεται εἰς τὸ σχ. 45α.

β) Λήμμα. Ἐστωσαν $\Gamma\Delta$ καὶ AB δύο οἰαδήποτε τμήματα. Τότε δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἐκλέξωμεν ἓνα ἀρκετὰ μεγάλον φυσικὸν ἀριθμὸν ν οὕτως, ὥστε, ἐὰν χωρίσωμεν τὸ $\Gamma\Delta$ εἰς 2^n ἴσα τμήματα, ἕκαστον τούτων νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ AB .

Ἀπόδειξις. Ἐκαστον τμήμα δύναται νὰ διχοτομηθῆ καὶ συνεπῶς ἐπαναλαμβανομένης τῆς διχοτομήσεως νὰ χωρισθῆ εἰς $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots$ ἴσα μέρη. Ἄς παραστήσωμεν διὰ τοῦ $\Gamma\Delta/2^n$ ἓν ἐκ τῶν προκυπτόντων τμημάτων, δταν τὸ $\Gamma\Delta$ διαιρεθῆ εἰς 2^n ἴσα μέρη.

Ἐὰν διὰ κάθε ν τὸ τμήμα $\Gamma\Delta/2^n$ ἦτο μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ AB , τότε τὸ AB θὰ ἦτο μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ $\Gamma\Delta/2^n$ (διὰ κάθε ν). Ἐκ τούτου συνάγεται (διὰ προσθέσεως 2^n ἀνισοτήτων $AB \leq \Gamma\Delta/2^n, AB \leq \Gamma\Delta/2^n, \dots$ κατὰ μέλη) ὅτι τὸ AB ἐπαναλαμβανόμενον 2^n φορὰς δὲν ὑπερβαίνει τὸ $\Gamma\Delta$. Δηλαδή τὸ AB ἐπαναλαμβανόμενον ἀπεριόριστον ἀριθμὸν φορῶν οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ $\Gamma\Delta$. Τοῦτο ὅμως ἀντίκειται εἰς τὸ Ἀρχιμήδειον ἀξίωμα.

Παρατήρησις. Ἀνωτέρω ἐδείχθη ὅτι: δὲν ὑπάρχει τμήμα μικρότερον πάντων τῶν τμημάτων $\Gamma\Delta/2^n$, ὅπου τὸ ν ἀδξάνεται ἀπεριορίστως.

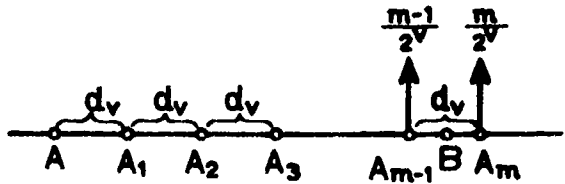
40. Μέτρον ἑνὸς τμήματος. α') Δίδεται ἓν τμήμα d_0 , τὸ ὅποιον θὰ καλοῦμεν μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν ἢ μοναδιαῖον τμήμα. Τότε εἰς κάθε τμήμα τ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἀριθμὸς προκύπτων κατὰ ἓνα ὀρισμένον τρόπον καὶ ὅστις καλεῖται μέτρον τοῦ τμήματος τ (ἢ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τοῦ τμήματος τ, μετρηθέντος με μονάδα τὸ d_0). Τὸ μέτρον τοῦ τμήματος τ θὰ παρίσταται με $\mu(\tau)$ (τοῦ δὲ τμήματος AB με $\mu(AB)$).

Ὁ πρὸς τὸ τ ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς, $\mu(\tau)$ ὀρίζεται ὡς ἐξῆς:

Ἐποδιαίρουντες τὸ μοναδιαῖον τμήμα d_0 εἰς 2^n ἴσα μέρη (ν, ἐπαρκῶς μέγας) κατασκευάζομεν ἓν τμήμα $d_n = d_0/2^n$ μικρότερον τοῦ μετρητέου τμήματος $\tau = AB$ (βλ. 39 β').

Ἀκολουθῶς κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β κατασκευάζομεν μίαν ἀκολουθίαν σημείων Α, Α₁, Α₂, Α₃... κατὰ τὴν διάταξιν: Α, Α₁, Α₂, Α₃..., τοιούτων, ὥστε ΑΑ₁ = Α₁Α₂ = Α₂Α₃ = ... = Α_{κ-1}Α_κ = ... = d_v (σχ. 46).

Ἐστω Α_m τὸ πρῶτον σημεῖον τῆς ἀκολουθίας ταύτης, τὸ ὁποῖον δὲν ἀνήκει εἰς τὸ τμήμα (πρῶτον ἐξωτερικὸν σημεῖον ἀντίστοιχον πρὸς τὸ d_v). Ἡ ὑπαρξίς



$$d_v = d_0 / 2^v$$

Σχ. 46

τοῦ σημείου τούτου ἐξασφαλίζεται ἀπὸ τὸ ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους. Τότε προφανῶς τὸ σημεῖον Α_{m-1} θὰ ἀνήκη εἰς τὸ τμήμα ΑΒ (τελευταῖον, ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς ὑποδιαιρέσεως εἰς τμήματα d_v). Τὸ τμήμα ΑΑ_m περιέχει m τμήματα d_v καὶ εἶναι ΑΒ ≥ (τὸ Α_m δυνατόν νὰ συμπίπτῃ καὶ μὲ τὸ Β, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς μὴ ἀνήκον εἰς τὸ τμήμα ΑΒ), ἐνῶ τὸ τμήμα ΑΑ_{m-1} περιέχει m-1 τμήματα d_v καὶ εἶναι μικρότερον τοῦ ΑΒ (τὸ πλῆθος m ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ v). Δυνάμεθα συμβατικῶς νὰ γράψωμεν ΑΑ_m = m · d_v, ΑΑ_{m-1} = (m-1) · d_v, ὁπότε αἱ σχέσεις ΑΑ_{m-1} < ΑΒ ≤ ΑΑ_m γράφονται (m-1) · d_v < ΑΒ ≤ m · d_v ἢ καὶ

$$(1) \quad (m-1) \cdot \frac{d_0}{2^v} < ΑΒ \leq m \cdot \frac{d_0}{2^v} \quad (d_0 \text{ ἢ μονάς}).$$

Θεωροῦμεν τώρα τοὺς ἀριθμοὺς

$$(2) \quad \alpha_v = \frac{m-1}{2^v} \text{ καὶ } \beta_v = \frac{m}{2^v},$$

οἱ ὅποιοι, δυνάμεθα νὰ εἰπώμεν, μετροῦν τὸ τμήμα ΑΒ κατὰ προσέγγισιν 1/2^v καὶ διὴ ὁ πρῶτος καθ' ἔλλειψιν καὶ ὁ δεῦτερος καθ' ὑπεροχὴν.

Ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν κατασκευάζονται, δι' ἕκαστον v, τὰ σημεῖα Α_{m-1} καὶ Α_m γίνεται φανερόν ὅτι αὐξάνοντος τοῦ v ὁ (ἀντίστοιχος πρὸς τὸ Α_{m-1}) ἀριθμὸς α_v δὲν ἐλαττωθῆναι, ἐνῶ ὁ β_v δὲν αὐξάνει. Διότι, ὅταν ἀπὸ τὸ v μεταβῶμεν εἰς τὸ v + 1, ἦτοι ἀντὶ τῶν τμημάτων d_v = d₀/2^v χρησιμοποιήσωμεν τὰ d_{v+1} = d₀/2^{v+1}, τὰ τμήματα ΑΑ₁, Α₁Α₂, ..., Α_{m-1}Α_m διχοτομοῦνται. Ἐὰν τὸ μέσον Μ τοῦ Α_{m-1}Α_m ἀνήκη εἰς τὸ τμήμα ΑΒ, τότε τὸ τελευταῖον ἐσωτερικὸν σημεῖον Α_{m-1} μεταβαίνει εἰς τὸ Μ καὶ ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς α_{v+1} εἶναι, τώρα, ἡῤῥξημένος κατὰ 1/2^{v+1}, ἐνῶ τὸ πρῶτον ἐξωτερικὸν σημεῖον Α_m παραμένει, ἄρα β_{v+1} = β_v. Ἐὰν πάλιν τὸ Μ δὲν ἀνήκη εἰς τὸ τμήμα ΑΒ, τότε τὸ Α_m μεταβαίνει εἰς τὸ Μ, ὁπότε ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς

β_{n+1} είναι, τώρα, ήλαττωμένος κατά $1/2^{n+1}$. ἐνῶ $\alpha_{n+1} = \alpha_n$, διότι τὸ τελευταῖον ἔσωτερικὸν σημεῖον παραμένει.

Νοοῦντες, τώρα, τὸ n ἀξάνον ἀπεριορίστως δημιουργοῦμεν δύο ἀκολουθίας $\{\alpha_n\}$ καὶ $\{\beta_n\}$, ἐξ ὧν ἡ πρώτη εἶναι μὴ φθίνουσα καὶ ἡ δευτέρα μὴ ἀξουσα. Ἐπειδὴ ἐπὶ πλεόν εἶναι $\alpha_n < \beta_n$ καὶ ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ $\beta_n - \alpha_n = 1/2^n$ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν τοῦ n τείνοντος εἰς τὸ ∞ , (§ 35 β'), ἔπεται ὅτι αἱ δύο ἀκολουθίαι $\{\alpha_n\}$ καὶ $\{\beta_n\}$ δημιουργοῦν ἐγκλιβωτισμὸν (α_n, β_n) (βλ. §38, β'), δηλαδὴ ὀρίζουν ἓνα ἀριθμὸν l , ὅστις εἶναι τὸ κοινὸν ὄριον αὐτῶν.

Τὸ κοινὸν ὄριον, πρὸς τὸ ὅποιον ἀμφότεραι αἱ ἀκολουθίαι (2) τείνουν, καλεῖται μέτρον τοῦ τμήματος AB καὶ παρίσταται μὲ $\mu(AB)$ ἢ $\mu(\tau)$.

β') Ἰδιότητες ἀμέσως προκύπτουσαι ἐκ τῆς ἀνωτέρω κατασκευῆς τοῦ μέτρου ἑνὸς τμήματος τ εἶναι αἱ κάτωθι:

i) Ἐὰν $\tau = \tau'$, τότε $\mu(\tau) = \mu(\tau')$.

ii) Ἐὰν $\tau = m d_n$, τότε $\mu(\tau) = m/2^n$ ($m \in \Phi$).

iii) Εἶναι: $\mu(d_0) = 1$.

Ἡ ιδιότης i) εἶναι ἀμέσως φανερά, καθ' ὅσον αἱ ἀνωτέρω ἀριθμοσκολουθίαι $\{\alpha_n\}$ καὶ $\{\beta_n\}$ αἱ καθορίζουσαι τὸ μέτρον προφανῶς συμπίπτουν διὰ τὰ ἴσα τμήματα.

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ii) παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τμήμα $AB = \tau = m \cdot d_n$ ἀποτελούμενον ἀπὸ m ἴσα πρὸς d_n τμήματα τὸ σημεῖον A_m (σχ. 46) συμπίπτει μὲ τὸ B καὶ συνεπῶς, τοῦ n ἀξάνοντος ἐπ' ἀπειρον, θὰ ἔχωμεν πάντοτε τὸ ἴδιον $A_m = B$ καὶ οἱ ὄροι τῆς ἀκολουθίας $\{\beta_n\}$ θὰ διατηροῦν τὴν ἴδιαν τιμὴν $m/2^n$ ἀπὸ τῆς τιμῆς n καὶ ἐφεξῆς. Ἐπομένως τὸ ὄριον τῆς ἀκολουθίας $\{\beta_n\}$ (δηλ. τὸ μέτρον) θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $m/2^n$ (§ 37, γ').

Τέλος ἡ ιδιότης iii) εἶναι συνέπεια τῆς ii), διότι $d_0 = 2^n \cdot d_n$, ἄρα κατὰ τὴν ii) $\mu(d_0) = 2^n \frac{1}{2^n} = 1$.

41. Θεωρήματα ἐπὶ τοῦ μέτρου τῶν τμημάτων

I. Τὸ μικρότερον τμήμα ἔχει καὶ μικρότερον μέτρον, ἴητοι $\tau < \tau' \Rightarrow \mu(\tau) < \mu(\tau')$.

II. Ἐὰν τ καὶ τ' παριστῶν δύο τμήματα, τότε

$$\mu(\tau + \tau') = \mu(\tau) + \mu(\tau')$$

(Τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν προσθετέων. Τὸ θεώρημα ἰσχύει δι' ὅσουσδήποτε προσθετέους, λόγω τῆς προσεταιριστικότητος τοῦ ἀθροίσματος).

III. Δοθείσης τῆς μονάδος d_0 μετρήσεως τῶν μηκῶν, τότε δοθέντος ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ α ὑπάρχει ἓν τμήμα τ ἔχον μέτρον ἴσον πρὸς α .

Τὰ ἀνωτέρω θεωρήματα εἶναι διαισθητικῶς λίαν ἐνδόνητα. Ἐν τούτοις αἱ ἀποδείξεις αὐτῶν εἶναι μακρᾶι καὶ δυσχερεῖς. Διὰ τοῦτο κρίνομεν ὡς

ἀσύμφορον τὴν πραγμάτευσιν τῶν ἀποδείξεων τῶν θεωρημάτων τούτων, ἣ ποῖα θὰ κατηγάωνε πολὺν χρόνον εἰς τὸν διδάσκοντα καὶ τοὺς μαθητάς.

Πορίσματα τοῦ Θεωρήματος I.

Πόρισμα 1ον. Τὸ μέτρον παντὸς τμήματος εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς.

Διότι δοθέντος τοῦ τμήματος τ καὶ τῆς μονάδος d_0 δυνάμεθα, ὑποδιαίρουντες τὴν d_0 εἰς 2^n ἴσα μέρη, νὰ κατασκευάσωμεν τμήμα τι $d_n = \frac{d_0}{2^n}$ μικρότερον τοῦ τ , ὅταν ὁ n ἐκλεγῆ ἀρκετὰ μέγας (βλ. §39, β')

Τότε θὰ εἶναι $\tau > d_n$, $\mu(\tau) > \mu(d_n)$ ἢ $\mu(\tau) > \frac{1}{2^n}$, δηλ. $\mu(\tau) > 0$.

Πόρισμα 2ον. Δύο τμήματα ἔχοντα ἴσα μέτρα εἶναι ἴσα.

Ἐστω $\mu(\tau) = \mu(\tau')$. Τότε ἀποκλείεται νὰ εἶναι $\tau < \tau'$, διότι θὰ εἶχομεν $\mu(\tau) < \mu(\tau')$. Ὀμοίως ἀποκλείεται νὰ εἶναι $\tau' < \tau$. Μένει συνεπῶς, $\tau = \tau'$.

Πόρισμα 3ον. Ἐκ δύο τμημάτων μικρότερον εἶναι τὸ ἔχον μικρότερον μέτρον.

42. Ἐπίδρασις τῆς ἀλλαγῆς τῆς μονάδος μετρήσεως τῶν μηκῶν. Εἶδομεν εἰς τὴν § 40 ὅτι, διὰ νὰ μετρήσωμεν ἕν τμήμα AB μὲ μονάδα τὸ τμήμα d_0 , τὸ περικλείομεν (βλ. σχ. 46) μεταξύ δύο τμημάτων AA_{m-1} καὶ AA_m , οὕτως, ὥστε

$$(1) \quad AA_{m-1} < AB \leq AA_m,$$

ὅπου $AA_{m-1} = (m-1) \cdot d_n$, $AA_m = m \cdot d_n$ μὲ $d_n = d_0/2^n$. Ὅταν δὲ τὸ $n \rightarrow \infty$, εἶναι $\mu(AB) =$ κοινὸν ὄριον τῶν ἀκολουθιῶν $\left\{ \frac{m-1}{2^n} \right\}$ καὶ $\left\{ \frac{m}{2^n} \right\}$.

Ἄς λάβωμεν τώρα μίαν νέαν μονάδα μετρήσεως, τὸ τμήμα d_0' καὶ ἄς παριστάνωμεν μὲ μ' τὰ μέτρα τῶν τμημάτων, ἀναφορικῶς πρὸς τὴν νέαν μονάδα d_0' . Τὸ τμήμα d_0 μετρηθὲν μὲ μονάδα τὸ d_0' ἄς ἔχη μέτρον k , ἥτοι: $\mu'(d_0) = k$. Τότε θὰ εἶναι: $\mu' \left(\frac{d_0}{2^n} \right) = \frac{k}{2^n}$. Διότι, ἐὰν καλέσωμεν x τὸ μέτρον τοῦ $d_0/2^n$ ὡς πρὸς τὴν νέαν μονάδα, ἡ ἰσότης:

$$\underbrace{\frac{d_0}{2^n} + \frac{d_0}{2^n} + \dots + \frac{d_0}{2^n}}_{2^n \text{ φορές}} = d_0 \quad \text{δίδει (§ 41, II).}$$

$$\underbrace{x + x + \dots + x}_{2^n \text{ φορές}} = \mu'(d_0) = k \Rightarrow x = \frac{k}{2^n}.$$

Ἐν συνεχείᾳ, ἐπειδὴ τὸ τμήμα AA_{m-1} ἀποτελεῖται ἀπὸ $m-1$ τμήματα ἴσα πρὸς $d_0/2^n$, θὰ ἔχη μέτρον: $\mu'(AA_{m-1}) = (m-1) \frac{k}{2^n}$ καὶ ὁμοίως διὰ τὸ

τμήμα AA_m : $\mu'(AA_m) = m \frac{k}{2^v}$. Λαμβάνοντας τὰ μέτρα τῶν τριῶν μελῶν τῆς σχέσεως (1) ὡς πρὸς τὴν νέαν μονάδα (§ 41, I), ἔχομεν ὅτι

$$(2) \quad k \frac{m-1}{2^v} < \mu'(AB) \leq k \frac{m}{2^v}.$$

Ἡ (2), ἰσχύουσα δι' ὅλα τὰ v ἀπὸ τινος καὶ ἔπειτα, δεικνύει ὅτι τὸ $\mu'(AB)$ εἶναι τὸ κοινὸν ὄριον τῶν ἀκολουθητῶν $k \left\{ \frac{m-1}{2^v} \right\}$ καὶ $\left\{ k \frac{m}{2^v} \right\}$, δηλ. τὸ $k \cdot \mu(AB)$ (§ 35 ε'). Ὡστε $\mu'(AB) = k \cdot \mu(AB)$. Ἐδείχθη λοιπὸν τὸ

(Θ) — Ὅταν ληφθῆ νέα μονὰς μετρήσεως, τὸ μέτρον παντὸς τμήματος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ μέτρον τῆς παλαιᾶς μονάδος ὡς πρὸς τὴν νέαν.

43. Λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων. α') Ὁρισμός. Δοθέντων δύο τμημάτων AB καὶ $\Gamma\Delta$ καλεῖται λόγος τοῦ AB πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$ καὶ παρίσταται μὲ $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ τὸ μέτρον τοῦ AB μετρηθέντος μὲ μονάδα τὸ $\Gamma\Delta$. Φυσικὰ ὁ λόγος εἶναι εἰς θετικὸς ἀριθμὸς καθοριζόμενος πλήρως ἀπὸ τὰ δύο τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$.

β') (Θ) — Ὁ λόγος δύο τμημάτων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν μέτρων τῶν (ὅταν μετρηθοῦν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος).

Ἀπόδειξις. Ἐστω λ ὁ λόγος $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ καὶ d_0 μία οἰαδήποτε μονὰς μετρήσεως τῶν μηκῶν. Ἐστω k τὸ μέτρον τοῦ $\Gamma\Delta$ μὲ μονάδα d_0 : $\boxed{\mu(\Gamma\Delta) = k}$. Τὸ AB μετρούμενον μὲ μονάδα τὸ $\Gamma\Delta$ ἔχει μέτρον λ , ἄρα μετρούμενον μὲ μονάδα d_0 θὰ ἔχη μέτρον τὸ λ , πολλαπλασιασμένον ἐπὶ τὸ μέτρον τῆς παλαιᾶς μονάδος $\Gamma\Delta$ ὡς πρὸς τὴν νέαν (βλ. (Θ), § 42), δηλ. $\boxed{\mu(AB) = k \cdot \lambda}$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει:

$$\frac{\mu(AB)}{\mu(\Gamma\Delta)} = \frac{k \cdot \lambda}{k} = \lambda = \frac{AB}{\Gamma\Delta}. \text{ Ἐπομένως:}$$

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\mu(AB)}{\mu(\Gamma\Delta)} \text{ ὁ.ἔ.δ.}$$

44. Δεύτερος ὀρισμὸς τοῦ γινομένου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμὸν. Ἐστω τμήμα AB καὶ ὁ θετικὸς ἀριθμὸς a . Καλεῖται γινόμενον τοῦ τμήματος AB ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν a ἓν τμήμα $A'B'$, τὸ ὅποσον ἔχει λόγον πρὸς τὸ AB ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν a .

$$\text{Δηλ.} \quad AB \times a = A'B' \iff \frac{A'B'}{AB} = a.$$

Ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ $A'B'$ πρὸς τὸ AB εἶναι a , ἔπεται ὅτι τὸ τμήμα $A'B'$ μετρούμενον μὲ μονάδα τὸ AB ἔχει μέτρον a . Κατὰ τὸ θεώρημα III τῆς § 41 ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον τοιοῦτον τμήμα. Δηλ. τὸ γινόμενον $AB \times a$ ὑπάρχει καὶ εἶναι ἓν καὶ μόνον.

ΜΕΤΡΟΝ ΓΩΝΙΑΣ

45. α') Ἐντελῶς ἀναλόγως πρὸς τὸ μήκος τμήματος ὀρίζεται καὶ τὸ μέτρον μιᾶς γωνίας καὶ ὅλα τὰ θεωρήματα τὰ σχετικὰ μὲ τὸ μέτρον τμήματος ἔχουν τὰ ὁμοία τῶν εἰς τὴν μέτρησιν τῶν γωνιῶν. Οὕτω διὰ τὰς γωνίας ἰσχύει τὸ κάτωθι βασικὸν θεώρημα τῆς μετρήσεως.

(Θ)—Δίδεται μία γωνία (h_0, k_0) , τὴν ὁποίαν καλοῦμεν μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν. Τότε εἰς κάθε γωνίαν (h, k) (*) (κυρτὴν ἢ μὴ) ἀντιστοιχεῖ εἰς ὀρισμένον ἀριθμὸς, ἔστω $\theta(h, k)$, οὕτως, ὥστε νὰ πληροῦνται τὰ κάτωθι τέσσαρα ἐπιτάγματα :

- 1) Διὰ κάθε γωνίαν (h, k) εἶναι $\theta(h, k) > 0$.
- 2) Ἐὰν αἱ γωνίαι (h, k) καὶ (h', k') εἶναι ἴσαι, τότε $\theta(h, k) = \theta(h', k')$.
- 3) Ἐὰν ἡ ἀκτίς l ἀνήκη εἰς τὴν γωνίαν (h, k) , τότε : $\theta(h, l) + \theta(l, k) = \theta(h, k)$.
- 4) $\theta(h_0, k_0) = 1$.

Ὁ ὡς ἄνω πρὸς τὴν γωνίαν (h, k) ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς $\theta(h, k)$ καλεῖται μέτρον τῆς γωνίας (h, k) .

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἀποδεικνύεται, ὅπως καὶ τὸ ἀντίστοιχον θεώρημα περὶ τοῦ μέτρου τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, ἀκολουθουμένης τῆς ἰδίας ἀκριβῶς σειρᾶς. (Ἡ μονὰς τῶν γωνιῶν δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς 2, 4, 8, ..., 2^n ἴσας γωνίας, ἡ δὲ μετρητέα γωνία προσεγγίζεται κατ' ἔλλειψιν καὶ καθ' ὑπεροχὴν ἀπὸ δύο γωνίας, ὧν ἡ μία περιέχει $m-1$ γωνίας ἴσας πρὸς τὸ $1/2^n$ τῆς μονάδος, ἡ δὲ ἄλλη περιέχει m γωνίας ἴσας πρὸς τὸ $1/2^n$ τῆς μονάδος καὶ τὸ μέτρον ὀρίζεται, ὡς τὸ κοινὸν ὄριον δύο ἀκολουθιῶν, ὅπως εἰς τὴν § 40).

β') Ὁ λόγος δύο γωνιῶν ὀρίζεται, ὅπως εἰς τὴν § 43 ὀρίσθη ὁ λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων.

γ') Ἡ ὑπαρξίς γωνίας ἐχοῦσης δεδομένον μέτρον θ (ὡς πρὸς δοθείσαν μονάδα γωνιῶν) ἀποδεικνύεται, καθ' ὅν τρόπον δεικνύεται ἡ ὑπαρξίς τμήματος ἔχοντος δοθὲν μέτρον.

Ἐκ τούτου ἔπεται τέλος ἡ πρότασις :

«Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἐκάστης γωνίας ὑπάρχουν ἀκτῖνες ἀρχόμεναι ἐκ τῆς κορυφῆς, αἱ ὁποῖαι χωρίζουν τὴν δοθείσαν γωνίαν εἰς n ἴσα μέρη».

Πράγματι, ἐὰν ἡ δοθείσα γωνία $(\widehat{h, k})$ ἔχη μέτρον ἀριθμὸν τινα θ , τότε θεωροῦμεν τὸν ἀριθμὸν θ/v . Ἐπειδὴ ὑπάρχει γωνία ἔχουσα δεδομένον μέτρον, θὰ ὑπάρχη καὶ γωνία ἔχουσα μέτρον θ/v . Ἄρα ὑπάρχουν ἀκτῖνες l_1, l_2, \dots, l_{v+1} ἀνήκουσαι εἰς τὴν γωνίαν τοιαῦται, ὥστε αἱ γωνίαι $(h, l_1), (l_1, l_2) \dots (l_{v-1}, k)$ νὰ ἔχουν μέτρον θ/v . Ἄλλὰ γωνίαι ἔχουσαι ἴσα μέτρα εἶναι ἴσαι.

46. Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ. (Κύριον θεώρημα τῶν μετρικῶν σχέσεων).

— Ἐστῶσαν (ϵ) καὶ (ϵ') δύο εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου καὶ τρίτη εὐθεῖα (δ) τέμνουσα τὰς δύο πρώτας. Ἐὰν εἰς κάθε σημεῖον M τῆς (ϵ) ἀντιστοιχίζωμεν ἕν σημεῖον M' τῆς (ϵ') τοιοῦτον, ὥστε τὰ M καὶ M' νὰ κείνται ἐπὶ παραλλ-

(*) Τὰ h καὶ k συμβολίζουν δύο ἡμιευθεῖας μὲ κοινὴν ἀρχήν. Αὗται ὀρίζουν ἕν γένει

ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τὴν κυρτὴν γωνίαν $(\widehat{h, k})$ μὲ πλευράς τὰς h, k καὶ τὴν μὴ κυρτὴν $(\widehat{h, k})$ ἐπίσης μὲ πλευράς h, k . Ἀνωτέρω, ὡς γωνία (h, k) νοεῖται εἴτε ἡ πρώτη εἴτε ἡ δευτέρα.

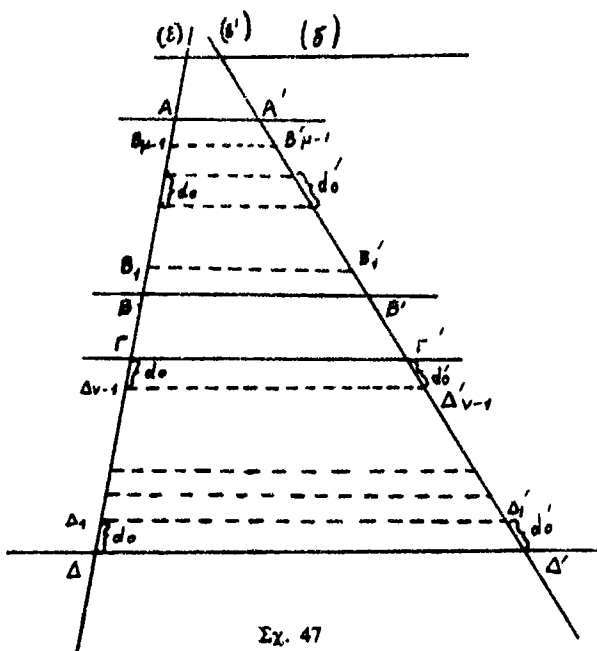
λήλου πρὸς τὴν (δ), τότε, κατὰ τὴν ἀντιστοιχίαν ταύτην, ὁ λόγος δύο οἰων-
δήποτε τμημάτων κειμένων ἐπὶ τῆς (ε) ἴσους πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντι-
στοίχων τῶν τμημάτων ἐπὶ τῆς (ε').

Ἐστώσαν AB καὶ ΓΔ ἐπὶ τῆς (ε) καὶ Α'Β', Γ'Δ' τὰ ἀντίστοιχά των
ἐπὶ τῆς (ε'). Θὰ δεῖξωμεν ὅτι:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$$

I. Τὰ AB καὶ ΓΔ εἶναι σύμμετρα πρὸς ἄλληλα. (σχ 47). Ἐστω d_0 τὸ
κοινὸν μέτρον τῶν AB καὶ ΓΔ, τὸ ὅποιον χωρεῖ μ φοράς εἰς τὸ AB
καὶ ν φοράς εἰς τὸ ΓΔ,
ὅπου μ, ν φυσικοὶ ἀρι-
θμοὶ (§34,θ'). Τότε ὁ
λόγος $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\mu}{\nu}$ κατὰ

τὴν § 34,θ'. Ἄς χωρίσω-
μεν τώρα τὸ AB εἰς μ
ἴσα μέρη διὰ τῶν διαι-
ρετικῶν σημείων $B_1, B_2,$
... $B_{\mu-1}$ καὶ τὸ ΓΔ εἰς ν
ἴσα μέρη διὰ τῶν $\Delta_1, \dots,$
 $\Delta_{\nu-1}$, καὶ ἄς φέρωμεν διὰ
τῶν διαιρετικῶν σημεί-
ων $\Delta_1, \dots, \Delta_{\nu-1}, B_1, \dots, B_{\mu-1}$
παραλλήλους πρὸς τὴν
(δ). Τότε ὡς γνωστὸν
καὶ τὸ Α'Β' καὶ τὸ Γ'Δ'
χωρίζονται ὑπὸ τῶν ἀ-
χθεισῶν παραλλήλων
πάλιν εἰς ἴσα μέρη,
 $A'B'_{\mu-1} = \dots = B'_1B' =$

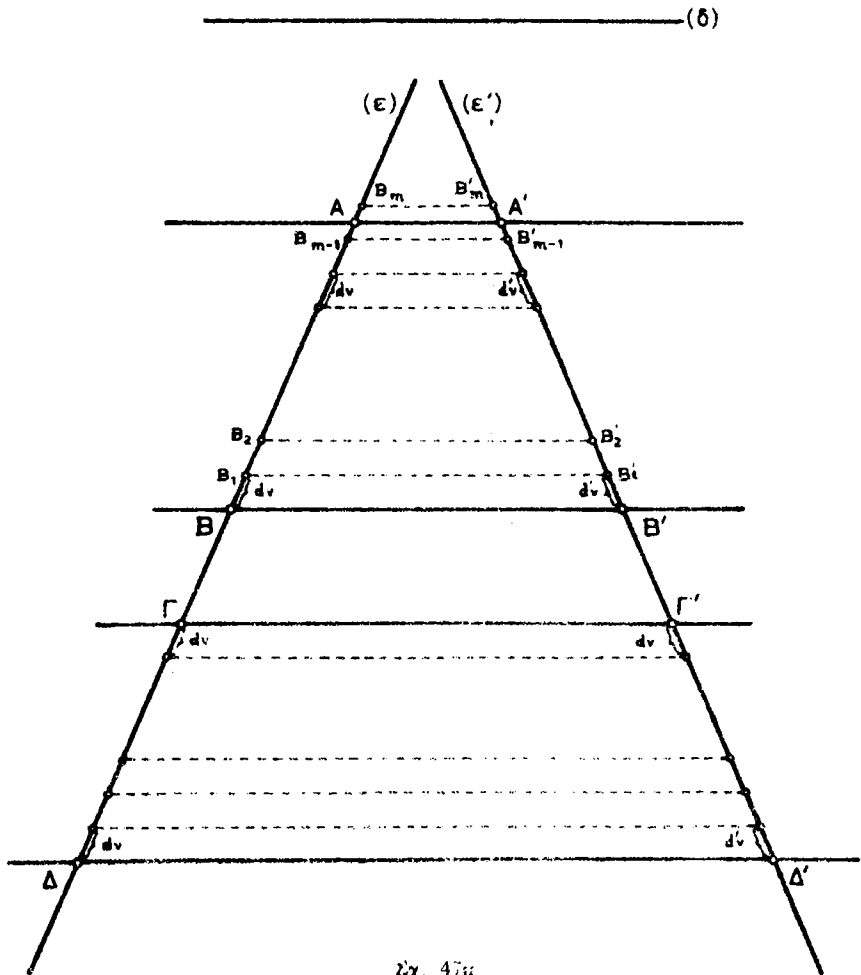


$\Gamma'\Delta'_{\nu-1} = \dots = \Delta'_1\Delta'$ ἴσα ἔστω πρὸς d'_0 ἕκαστον. Οὕτω τὸ Α'Β' σύγκειται
ἀπὸ μ τμημάτων ἴσα πρὸς d'_0 καὶ τὸ Γ'Δ' ἀπὸ ν ἴσα πρὸς d_0 τμημάτων. Ἐπο-
μένως τὸ d'_0 εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν Α'Β' καὶ Γ'Δ' καὶ χωρεῖ μ φοράς
εἰς τὸ Α'Β' καὶ ν φοράς εἰς τὸ Γ'Δ'. Κατὰ τὰ λεχθέντα εἰς τὴν § 34,θ' ὁ λό-
γος $\frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$ εἶναι πάλιν ἴσος πρὸς $\frac{\mu}{\nu}$, ὥστε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$.

II. Τὰ AB καὶ ΓΔ εἶναι δύο τυχόντα τμήματα ἐπὶ τῆς (ε) (Γενικὴ ἀπό-
δειξις). Τότε, διὰ νὰ δεῖξωμεν ὅτι $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$ (βλ. § 43), ἀρκεῖ νὰ δεῖξω-
μεν ὅτι τὸ μέτρον τοῦ AB μετρηθέντος μὲ μὴνὰδα ΓΔ (ἔστω τὸ μ(AB))

ισούται με τὸ μέτρον τοῦ $A'B'$ μετρηθέντος με μονάδα τὸ $\Gamma\Delta'$ (ἔστω τὸ $\mu'(A'B')$).

Γνωρίζομεν ὅτι (βλ. § 40) πρὸς εὐρεσιν τοῦ μέτρου τοῦ AB χωρίζομεν τὴν μονάδα $\Gamma\Delta = d_0$ εἰς 2^n ἴσα μέρη (n ἐπαρκῶς μέγας) καὶ κατασκευάζο-



μεν ἓν τμήμα $d_1 = d_0/2^n$ μικρότερον τοῦ μετρητέου AB . Κατασκευάζομεν κατὰ τὴν κατεύθυνσιν ἐκ τοῦ B πρὸς τὸ A μίαν ἀκολουθίαν σημείων $B_1, B_2, \dots, B_p, \dots$ τοιοῦτων, ὥστε $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_p B_{p+1} = \dots = d_1$, καὶ ἔστω B_m τὸ πρῶτον σημεῖον τῆς ἀκολουθίας ταύτης, τὸ ὁποῖον δὲν ἀνήκει εἰς τὸ τμήμα AB (βλ. §40). Τότε τὸ B_{m-1} ἀνήκει εἰς τὸ τμήμα AB καὶ ἔχομεν τότε: (βλ. § 40) $BB_{m-1} < BA \leq BB_m$ ἢ $(m-1)d_1 < BA \leq md_1$ ἢ $(m-1) \frac{d_0}{2^n} < BA \leq$

$m \frac{d_0}{2^v}$ (δπου d_0 ή μονάς). Διὰ v τείνον εἰς ἄπειρον μέτρον τοῦ AB εἶναι τὸ κοινὸν ὄριον τῶν ἀκολουθιῶν:

$$(1) \quad \left\{ \frac{m-1}{2^v} \right\} \quad \text{καὶ} \quad \left\{ \frac{m}{2^v} \right\}$$

Ἄν διὰ τῶν διαιρετικῶν σημείων τοῦ $\Gamma\Delta$ καὶ διὰ τῶν B_1, B_2, \dots, B_m φέρωμεν παρ/λους πρὸς τὴν (δ) , τότε τὸ τμήμα $\Gamma'\Delta'$ χωρίζεται εἰς 2^v ἴσα μέρη (ἕκαστον ἴσον πρὸς d'_v) καὶ ἐπὶ τοῦ $B'A'$ δημιουργεῖται ἀκολουθία σημείων $B'_1, B'_2, \dots, B'_{m-1}, B'_m$, ὅπου B'_{m-1} εἶναι τὸ τελευταῖον σημεῖον τὸ ἀνήκον εἰς τὸ $B'A'$ καὶ τὸ B'_m τὸ πρῶτον μὴ ἀνήκον εἰς τὸ $B'A'$, διότι ἡ διάταξις τῶν ἀντιστοίχων σημείων εἶναι ἡ αὐτή.

Ἐπομένως καὶ τὸ $B'A'$ περικλείεται μεταξύ $(m-1)d'_v$ καὶ md'_v , δηλ. $(m-1) \frac{d'_0}{2^v} < B'A' \leq m \frac{d'_0}{2^v}$, ὅπου d'_0 ή μονάς $\Gamma'\Delta'$. Δηλαδή καὶ τὸ μέτρον τοῦ $A'B'$ με μονάδα τὸ $d'_0 = \Gamma'\Delta'$ εἶναι ἐπίσης τὸ κοινὸν ὄριον τῶν ἀκολουθιῶν (1). Ἐπομένως τὰ δύο μέτρα: $\mu(AB)$ με μονάδα $\Gamma\Delta$ καὶ $\mu'(A'B')$ με μονάδα $\Gamma'\Delta'$ ταῦτιζονται. δ.ξ.δ.

Πόρισμα 1ον. Δοθεισῶν τῶν σταθερῶν εὐθειῶν (ϵ) καὶ (ϵ') καὶ τῆς σταθερᾶς διευθύνσεως (δ) , ὁ λόγος δύο ἀντιστοίχων τμημάτων ἀποτεμνομένων ἀπὸ τῶν (ϵ) καὶ (ϵ') ὑπὸ δύο οἰωνδῆποτε παραλλήλων πρὸς τὴν (δ) εἶναι σταθερὸς.

Ἐστω ζευγὸς ἀντιστοίχων τμημάτων AB καὶ $A'B'$ (σχ.47a) καὶ τυχὸν ἄλλο ζευγὸς ἀντιστοίχων τμημάτων $\Gamma\Delta$ καὶ $\Gamma'\Delta'$. Γνωρίζομεν ὅτι ὁ λόγος δύο τμημάτων ἴσουςται με τὸν λόγον τῶν μέτρων των, ὅταν μετρηθοῦν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος (§ 43). Ἐδειξαμεν ὅμως ὅτι:

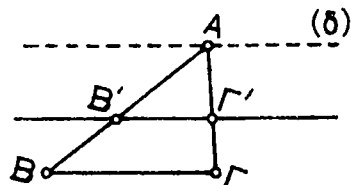
$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}, \quad \text{ἄρα καὶ} \quad \frac{\text{μέτρον}(AB)}{\text{μέτρον}(\Gamma\Delta)} = \frac{\text{μέτρον}(A'B')}{\text{μέτρον}(\Gamma'\Delta')} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{μέτρον}(AB)}{\text{μέτρον}(A'B')} = \frac{\text{μέτρον}(\Gamma\Delta)}{\text{μέτρον}(\Gamma'\Delta')} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}. \quad \text{Ἦτοι ὁ λόγος}$$

δύο ἀντιστοίχων τμημάτων: $\frac{AB}{A'B'}$, εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον δύο οἰωνδῆποτε ἄλλων ἀντιστοίχων τμημάτων $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$. Ἄρα ὁ λόγος οὗτος εἶναι σταθερὸς.

Πόρισμα 2ον. Ἐὰν εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ τριγώνου τέμνη τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς $AB, A\Gamma$ εἰς B', Γ' , τότε $\frac{AB'}{AB} = \frac{A\Gamma'}{A\Gamma}$. (Ἐπίσης, $\frac{AB'}{B'B} = \frac{A\Gamma'}{\Gamma'\Gamma}$)

Διότι ἄρκει νὰ νοήσωμεν διὰ τῆς κορυφῆς A εὐθεῖαν $(\delta) // B\Gamma // B'\Gamma'$ (σχ. 48) καὶ νὰ εφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ.



Σχ. 48

47. Ἀλγεβρική διατύπωσις τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ.

(Θ) — Ἐάν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας (ε) κείνται τρία σημεῖα A, B, Γ καὶ ἐπὶ ἄλλης εὐθείας (ε') κείνται ἐπίσης τρία σημεῖα A', B', Γ' οὕτως, ὥστε AA' // BB' // ΓΓ', τότε ἰσχύει :

$$(1) \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BΓ}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'Γ'}}$$

Πράγματι, ἂν νοήσωμεν ἄξονας ἐπάνω εἰς τὰς εὐθείας (ε) καὶ (ε'), τότε τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BΓ}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'Γ'}$ ἀποκτοῦν ἀλγεβρικές τιμὰς $\overline{AB}, \overline{BΓ}, \overline{A'B'}, \overline{B'Γ'}$.

Οἱ λόγοι (1) εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴσοι : $\frac{AB}{BΓ} = \frac{A'B'}{B'Γ'}$ κατὰ τὸ (Θ) τοῦ Θαλοῦ. Ἔχουν ὁμοῦ καὶ τὸ αὐτὸ πρόσημον· διότι ἡ διάταξις τῶν σημείων A, B, Γ εἶναι ἢ ἴδια μὲ τὴν τῶν A', B', Γ' καὶ ἐπομένως, ἂν τὰ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BΓ}$ εἶναι ὁμόρροπα, τότε καὶ τὰ $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'Γ'}$ εἶναι μεταξύ των ὁμόρροπα, ἂν δὲ τὰ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BΓ}$ εἶναι ἀντίρροπα, τότε καὶ τὰ $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'Γ'}$ εἶναι ἀντίρροπα. Ἐπομένως οἱ λόγοι (1) εἶναι ἢ ἀμφότεροι θετικοί (εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν) ἢ ἀμφότεροι ἀρνητικοί (εἰς τὴν δευτέραν). Ὅθεν οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ $\overline{AB}/\overline{BΓ}$ καὶ $\overline{A'B'}/\overline{B'Γ'}$ ἔχοντες τὸ αὐτὸ πρόσημον καὶ ἴσας ἀπολύτους τιμὰς εἶναι ἴσοι.

48. (Θ) — Ἐάν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς γωνίας \hat{A} ὑπάρχουν δύο σημεῖα B' καὶ B καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς δύο ἄλλα σημεῖα Γ' καὶ Γ τοιαῦτα, ὥστε $\frac{AB'}{AB} = \frac{AΓ'}{AΓ}$, τότε B'Γ' // BΓ. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ ὅταν τὰ B' καὶ Γ' κείνται ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν AB, AΓ, πρὸς τὸ μέρος τοῦ A.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ B' μεταξύ A καὶ B. Τότε $\frac{AB'}{AB} < 1$ (σχ.49). Ἐπειδὴ δὲ $\frac{AB'}{AB} = \frac{AΓ'}{AΓ}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{AΓ'}{AΓ} < 1$, ἦτοι καὶ τὸ Γ' θὰ κείται μεταξύ A καὶ Γ. Ἡ ἐκ τοῦ B' ἀγομένη //BΓ, ὡς τέμνουσα τὴν πλευρὰν AB (εἰς B') καὶ μὴ τέμνουσα τὴν BΓ, θὰ τέμνη τὴν πλευρὰν AΓ εἰς τι σημεῖον Γ'' καὶ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ θὰ εἶναι :

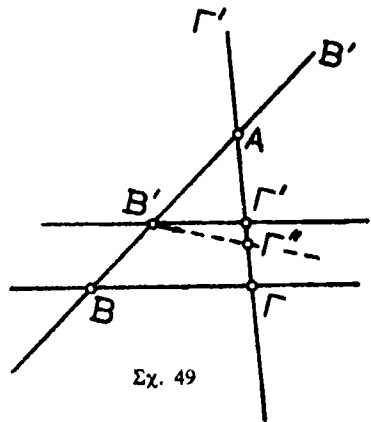
$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AΓ''}{AΓ}$$

ἐνφ' ἐξ ὑποθέσεως : $\frac{AB'}{AB} = \frac{AΓ'}{AΓ}$.

Συνάγομεν λοιπὸν ὅτι $\frac{AΓ'}{AΓ} = \frac{AΓ''}{AΓ}$

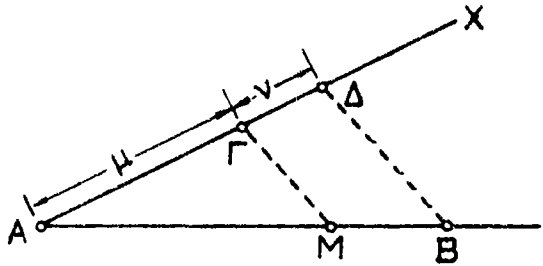
⇒ AΓ' = AΓ''. Ἐπειδὴ καὶ τὸ Γ' καὶ τὸ Γ'' εἶναι ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ τμήματος AΓ, ἢ ἰσότης

AΓ' = AΓ'' συνεπάγεται τὴν σύμπτωσιν τῶν Γ' καὶ Γ''. Ἄρα ἡ εὐθ B'Γ' συμπίπτει μὲ τὴν ἐκ τοῦ B' ἀγομένην παράλληλον πρὸς τὴν εὐθ BΓ, δηλ. B'Γ' // BΓ. Ἀναλόγως δεικνύεται τὸ θεώρημα καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν.



Σχ. 49

49. Διαίρεσις τμήματος εἰς μέρη ἀνάλογα δύο δοθέντων τμημάτων. «Ἐπὶ δοθέντος τμήματος AB νὰ εὑρεθῆ σημεῖον M τοιοῦτον, ὅστε $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ, ν δύο ἄλλα δοθέντα τμήματα».



Σχ. 50

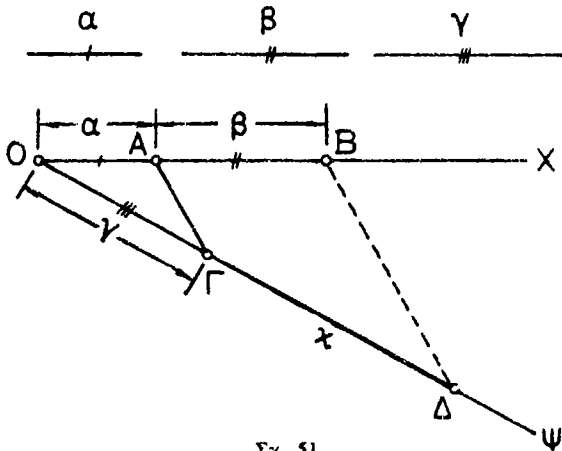
— Ἐπὶ τυχούσης ἡμιευθείας AX λαμβάνομεν δύο διαδοχικὰ τμήματα $AG, \Gamma\Delta$ ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ δοθέντα μ καὶ ν , φέρομεν τὴν ΔB καὶ τὴν ἐκ τοῦ Γ παρ/λον πρὸς τὴν ΔB , ἥτις τέμνει τὸ τμήμα AB εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον M . Διότι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ θὰ ἔχωμεν:

$$AM/MB = AG/\Gamma\Delta \quad (\S 46 \text{ πρόρισμα } 2\text{ον}).$$

50. Κατασκευὴ τοῦ τετάρτου ἀναλόγου. Δίδονται τρία τμήματα α, β, γ καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τέταρτον τμήμα x τοιοῦτον, ὅστε:

$$(1) \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}.$$

Ἐπὶ ἡμιευθείας OX κατασκευάζομεν τὰ διαδοχικὰ τμήματα $OA = \alpha, AB = \beta$ καὶ ἐπὶ ἄλλης ἡμιευθείας $O\psi$, τὸ $OG = \gamma$ (σχ. 51). Ἡ ἐκ τοῦ B



Σχ. 51

ἀγομένη $// AG$ συναντᾷ τὴν $O\psi$ εἰς σημεῖον Δ καὶ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ ἔχωμεν :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\Gamma\Delta}.$$

Τὸ τμήμα ΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον x , καλούμενον *τέταρτον ἀνάλογον* τῶν α, β, γ . (Ἀσκήσεις: 308, 309, 310, 311, 312, 322).

ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

51. α) Δύο τρίγωνα λέγονται **ὅμοια**, ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας των μίαν πρὸς μίαν ἴσας. Μία πλευρὰ τοῦ ἑνὸς καὶ μία τοῦ ἄλλου κείμεναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν λέγονται **ὁμόλογοι** πλευραί. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ἔχουν **τρία ζεύγη** ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἐάν π.χ. τὰ τρ. ΑΒΓ καὶ τρ. Α'Β'Γ' ἔχουν $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$, τότε εἶναι ὅμοια μὲ ὁμολόγους πλευράς: $B\Gamma \rightarrow B'\Gamma'$, $\Gamma A \rightarrow \Gamma'A'$, $AB \rightarrow A'B'$. Διὰ νὰ συμβολίσωμεν ὅτι τὰ τρ. ΑΒΓ καὶ τρ. Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοια γράφομεν:

$$\text{τρ.ΑΒΓ} \approx \text{τρ.Α'Β'Γ'}$$

β) Προφανῶς ἀρκεῖ διὰ τὴν ὁμοιότητα δύο τριγώνων δύο γωνίαι τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δύο γωνίας τοῦ ἄλλου.

γ) (Θ) — Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των ἀντιστοίχως **παράλληλους** ἢ **καθέτους**, τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια καὶ ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι αὐτὰ **παράλληλοι** ἢ αὐτὰ **κάθετοι** πρὸς ἀλλήλας πλευραί.

Ἐστω ὅτι εἰς τὰ $\triangle ΑΒΓ$ καὶ $\triangle Α'Β'Γ'$ εἶναι $AB \perp A'B'$, $B\Gamma \perp B'\Gamma'$, $\Gamma A \perp \Gamma'A'$. Τότε αὐτὴ γωνία \widehat{A} καὶ $\widehat{A'}$ ἔχουν τὰς πλευράς των μίαν πρὸς μίαν καθέτους, ἄρα εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικά. Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ μὲ τὰς \widehat{B} καὶ $\widehat{B'}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma'}$. Ἀποκλείεται ὁμως καὶ τὰ **τρία** ἢ τὰ **δύο** ζεύγη ἐκ τῶν $(\widehat{A}, \widehat{A'})$, $(\widehat{B}, \widehat{B'})$, $(\widehat{\Gamma}, \widehat{\Gamma'})$ νὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ παρ/κάς γωνίας, διότι τότε τὸ ἄθροισμα ὄλων τῶν γωνιῶν ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων θὰ ὑπερέβαινε τὰς 4ορθάς. Ἐπομένως δύο ἐκ τῶν ἀνωτέρω ζευγῶν ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἴσας γωνίας, δηλ. θὰ εἶναι $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$, ΒΓ ὁμόλογος τῆς Β'Γ' κ.τ.λ. Οἱ ἴδιοι συλλογισμοὶ ἀκριβῶς ἰσχύουν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν παραλλήλων πλευρῶν.

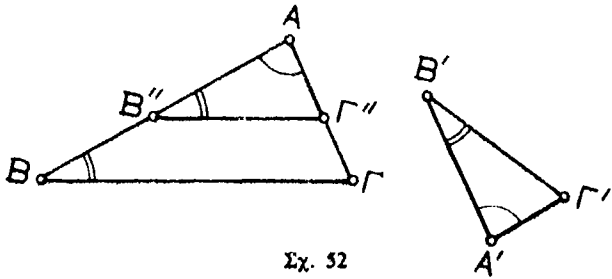
52. α) (Θ) — Ἐάν δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, τότε ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευράς των ἀνάλογους.

Δηλ. ἂν α, β, γ εἶναι αὐτὴ πλευραὶ τοῦ ἑνὸς καὶ α', β', γ' εἶναι αὐτὴ ἀντίστοιχοι ὁμόλογοι πλευραὶ (§51, α) τοῦ ἄλλου, τότε ὑφίστανται αὐτὴ σχέσεις:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$$

Ἀπόδειξις. Ἐστώσιν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχοντα $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ καὶ (κατ' ἀνάγκην) $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$. Φέρομεν διὰ κινήσεως τὴν γωνίαν \widehat{A}

ἐπὶ τῆς ἰσῆς τῆς \widehat{A} οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ $A'B'$ νὰ ἔλθῃ ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (A, B) καὶ ἡ πλευρὰ $A'G'$ ἐπὶ τῆς (A, Γ) . Τότε τὸ τρ. $A'B'G'$ θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν $AB''G''$ (σχ. 52) μὲ $AB'' = A'B'$ καὶ $A\Gamma'' = A'G'$. Ἡ γωνία $\widehat{B'}$ ἔρχεται εἰς τὴν γωνίαν $AB''G''$, ὁπότε, ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\widehat{B'}$



Σχ. 52

$= \widehat{B}$ καὶ $\widehat{B'} = \widehat{AB''G''} \Rightarrow \widehat{AB''G''} = \widehat{B} = \widehat{ABG}$ καὶ ἐκ τούτου $\Rightarrow B''G'' \parallel BG$. Ἐπομένως κατὰ τὸ θεώρ. τοῦ Θαλοῦ:

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$ καὶ ἐπειδὴ $AB'' = A'B'$, $A\Gamma'' = A'G'$, λαμβάνομεν:

(1)
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

Καθ' ὁμοίον τρόπον τοποθετοῦντες τὴν $\widehat{B'}$ ἐπὶ τῆς \widehat{B} λαμβάνομεν

(2)
$$\frac{BA}{B'A'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

(3)
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} \quad \delta.ξ.δ.$$

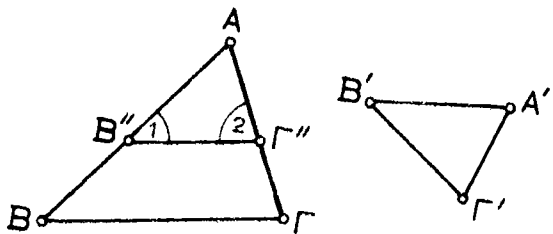
β) Λόγος ὁμοιότητας. Ἐκαστος ἐκ τῶν ἰσῶν λόγων (3) λέγεται λόγος ὁμοιότητος τοῦ τρ. ABG πρὸς τὸ τρ. $A'B'G'$.

53. (Θ) — Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των ἀναλόγους, τότε εἶναι ὅμοια.

Ἐστώσαν δύο τρίγωνα ABG καὶ $A'B'G'$ τοιαῦτα, ὥστε :

(1)
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

Ἄς λάβωμεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (A, B) τμήμα $AB'' = A'B'$ καὶ ἄς φέρωμεν $B''G'' \parallel B\Gamma$ (σχ. 53). Τότε τὰ τρίγωνα $AB''G''$ καὶ ABG εἶναι προφανῶς ὅμοια καὶ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ ἔχωμεν



$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$
 ἢ ἐπειδὴ $AB'' = A'B'$,
 ἔχομεν:

Σχ. 53

$$(2) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B''\Gamma''} = \frac{GA}{A\Gamma''}$$

Παραβάλλοντες τās (1) και (2) βλέπομεν άμέσως ότι:

$$B'\Gamma' = B''\Gamma'' \text{ και } \Gamma'A' = A\Gamma''$$

“Ωστε τὰ $\triangle AB''\Gamma''$ και $\triangle A'B'\Gamma'$ έχουν τās πλευράς των ίσας μίαν πρὸς μίαν, επομένως είναι ίσα.

$$\text{‘Επομένως: } \widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B}_1'' = \widehat{B'}, \widehat{\Gamma}_2'' = \widehat{\Gamma'}$$

‘Επειδή δὲ $\widehat{B}_1'' = \widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}_2'' = \widehat{\Gamma}$ (λόγω τῆς παραλληλίας τῶν $B''\Gamma''$, $B\Gamma$), έπεται: $\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$, δηλ. $\text{τρ.}AB\Gamma \approx \text{τρ.}A'B'\Gamma'$.

Παρατήρησις. ‘Εκ τῶν προηγουμένων θεωρημάτων προκύπτει ἡ ἰσοδυναμία:

$$\widehat{A} = \widehat{A'} \wedge \widehat{B} = \widehat{B'} \wedge \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'} \iff \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{GA}{G'A'} = \frac{AB}{A'B'}$$

‘Επομένως ὡς ὁμοια τρίγωνα δύνανται νὰ ὀρισθοῦν ἢ τὰ ἔχοντα τās γωνίαις των ἀντιστοιχῶς ίσας ἢ τὰ ἔχοντα τās πλευράς των ἀναλόγους (διότι ἑκάτερον συνεπάγεται τὸ ἕτερον).

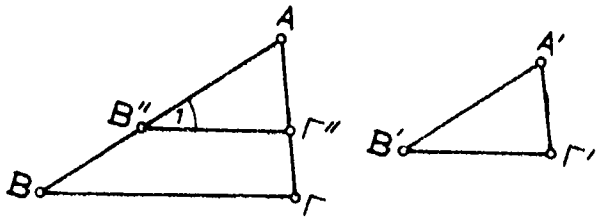
54. (Θ) — ‘Εάν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευράς ἀναλόγους και τὴν ὑπ’ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, τότε είναι ὁμοια.

‘Εστωσαν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ τοιαῦτα, ὥστε:

$$(1) \quad \widehat{A} = \widehat{A'} \text{ και } \frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

“Ας λάβωμεν ἐπὶ τῆς πλευράς (A, B) τῆς γωνίας \widehat{A} (τῆς ἴσης πρὸς τὴν

\widehat{A}) σημεῖον B'' τοιοῦτον, ὥστε $AB'' = A'B'$ και ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευράς (A, Γ) τῆς γωνίας \widehat{A} σημεῖον Γ'' τοιοῦτον, ὥστε $A\Gamma'' = A'\Gamma'$. Τότε θὰ είναι $\triangle AB''\Gamma'' = \triangle A'B'\Gamma'$ και συνεπῶς $\widehat{B}_1'' = \widehat{B'}$.



Σχ. 54

‘Η ἐξ ὑποθέσεως ἰσχύουσα σχέσις $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$ δίδει $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$ και τοῦτο συνεπάγεται $B''\Gamma'' \parallel B\Gamma$ (§ 48). “Αρα $\widehat{B} = \widehat{B}_1''$, ἀλλὰ $\widehat{B}_1'' = \widehat{B'}$, συνεπῶς $\widehat{B} = \widehat{B'}$. ‘Επειδὴ και $\widehat{A} = \widehat{A'}$, τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ὁμοια.

(‘Ασκήσεις: 313 ἕως 324).

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΔΕΣΜΗΣ ΕΥΘΕΙΩΝ

55. Τὸ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον μιᾶς εὐθείας. Περὶ τὰ μέσου τοῦ 19ου αἰῶνος ἰδρύθη μία νέα γεωμετρία λεγομένη «προβολικὴ», ἡ ὁποία δὲν περιέχει μετρικὰς σχέσεις, ἀλλ' ἐξετάζει μόνον τὰς ἰδιότητας τῆς πρὸς ἄλληλα θέσεως τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων.

Ἡ προβολικὴ γεωμετρία ἐπιτυγχάνει ἀξιοθαύμαστα ἀποτελέσματα ἐπὶ ὀρισμένου κύκλου γεωμετρικῶν θεμάτων ἀναπτύσσουσα ἴδιας μεθόδους, βασιζέται δὲ ἐπὶ τριῶν ὁμάδων ἀξιωμάτων: *συνδέσεως, διατάξεως καὶ συνεχείας.*

Τὰ ἀξιώματα συνδέσεως διαφέρουν τῶν τῆς εὐκλείδειου μόνον εἰς δύο σημεία: τὸ ἀξίωμα: ἐπὶ ἐκάστης εὐθείας ὑπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία, τροποποιεῖται ὡς ἐξῆς: *ἐπὶ ἐκάστης εὐθείας ὑπάρχουν τρία τουλάχιστον σημεία, προστίθεται δὲ καὶ ἕνατον ἀξίωμα, καθ' ὃ: ἔκαστον ζεύγος εὐθειῶν κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἔχει ἓν κοινόν σημεῖον.* Κατὰ τὸ ἀξίωμα τοῦτο δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ὑπὸ τὴν εὐκλείδειον ἔννοιαν ἔχουν εἰς τὴν προβολικὴν γεωμετρίαν ἓν κοινόν σημεῖον, τὸ ὅποσον λέγεται: *εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον ἐπὶ ἐκάστης τούτων.* Ἐπομένως ἐκάστη διεύθυνσις ὀρίζει ἓν εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον M_{∞} , διὰ τοῦ ὁποίου διέρχονται ὅλαι αἱ παράλληλοι αἱ ἀνήκουσαι εἰς τὴν διεύθυνσιν ταύτην. Ὅλα τὰ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἀποτελοῦν τὴν εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν εὐθεῖαν e_{∞} τοῦ ἐπιπέδου. Δηλ. ἐπὶ ἐκάστου ἐπιπέδου ὑπάρχει μία καὶ μόνον εὐθεῖα e_{∞} , ἐφ' ἧς κείνται ὅλα τὰ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου. (Διότι, ὡς δεικνύεται ἐκ τῶν ἀξιωμάτων συνδέσεως τῆς προβολικῆς γεωμετρίας, δύο ἐπίπεδα μὴ ταυτιζόμενα ἔχουν πάντοτε μίαν εὐθεῖαν κοινήν, ἂν δὲ τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα ὑπὸ τὴν εὐκλείδειον ἔννοιαν, ἡ κοινὴ εὐθεῖα τούτων εἶναι εἰς τὴν προβολικὴν γεωμετρίαν ἢ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν εὐθεῖα ἐπὶ ἐκάστου τούτων.).

Ἐνίοτε ἢ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν εὐθεῖα λέγεται *κατ' ἐκδοχὴν* εὐθεῖα καὶ τὰ σημεῖα αὐτῆς *κατ' ἐκδοχὴν σημεῖα*, ἐνθ' ὃ κοινόν σημεῖον δύο μὴ παραλλήλων εὐθειῶν λέγεται *καθ' ὑπόστασιν σημεῖον.*

Τὰ ἀξιώματα διατάξεως τῆς προβολικῆς γεωμετρίας διαφέρουν τῶν τῆς εὐκλείδειου, διότι ἐκάστη τῶν δύο κατευθύνσεων ἐπὶ τῆς εὐθείας ὀρίζεται ὑπὸ μιᾶς διατεταγμένης τριάδος σημείων. Μία συνέπεια τῶν ἀξιωμάτων τούτων εἶναι ὅτι εἰς τὴν προβολικὴν γεωμετρίαν δύο σημεῖα A καὶ B ὀρίζουν ἐπὶ τῆς εὐθείας AB δύο τμήματα: τὸ AB, ὡς ὀρίζεται τοῦτο εἰς τὴν εὐκλείδειον γεωμετρίαν καὶ τὸ «τμήμα» τὸ συγκείμενον ἀπὸ τὰς δύο προεκτάσεις τοῦ AB καὶ τὸ ὅποσον περιέχει καὶ τὸ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον τῆς εὐθείας AB. Τὰ δύο ταῦτα τμήματα λέγονται *«συμπληρωματικά»* ἀλλήλων.

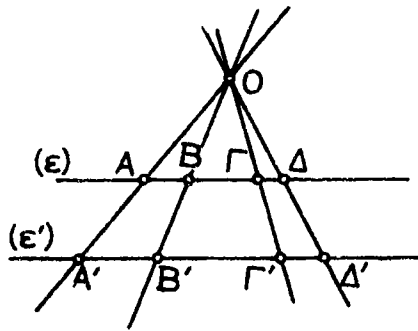
Μολονότι εἰς τὴν Εὐκλείδειον Γεωμετρίαν δὲν ὑπάρχουν εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖα, ἐν τούτοις ἐνίοτε, διὰ ν' ἀποφύγωμεν τὰς πολλὰς ὑποπεριπτώσεις κατὰ τὴν ἀποδειξιν προτάσεων τινῶν ἢ διὰ νὰ ἀποφύγωμεν ἐξαιρέσεις, θὰ δανειζόμεθα τὴν ἔννοιαν τοῦ εἰς ἄπειρον σημείου ἀπὸ τὴν προβολικὴν γεωμετρίαν.

56. α') Ὅρισμός. Καλεῖται ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου τῶν διερχομένων δι' ἐνὸς σταθεροῦ σημείου O, τὸ ὅποσον καλεῖται «κέντρον τῆς δέσμης».

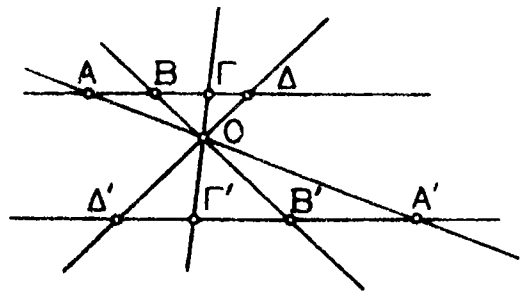
(Δὲν ἀποκλείεται τὸ O νὰ εἶναι σημεῖον εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν).

β') (Θ) — Τρεῖς τυχοῦσαι εὐθεῖαι μιᾶς δέσμης ἀποτεμνοῦν ἀπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν διανύσματα ἀνάλογα.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ κέντρον O τῆς δέσμης καθ' ὑπόστασιν σημεῖον ἐκτὸς τῆς ταινίας τῶν παραλλήλων (ϵ) καὶ (ϵ') καὶ ἔστωσαν OAA' , OBB' , $O\Gamma\Gamma'$ τρεῖς εὐθεῖαι τῆς δέσμης (σχ. 55). Τὰ σημεῖα B καὶ B' κεῖνται τότε ἐπὶ τῆς ἰδίας ἡμιευθείας (O, B) , ἐπομένως πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας OAA' , ἄρα τὰ διανύσματα \vec{AB} καὶ $\vec{A'B'}$ εἶναι ὁμόρροπα. Ὅμοίως τὰ $\vec{B\Gamma}$ καὶ $\vec{B'\Gamma'}$. Ἄρα οἱ ἀλγεβρικοὶ λόγοι: $\frac{\vec{AB}}{\vec{B\Gamma}}$ καὶ $\frac{\vec{A'B'}}{\vec{B'\Gamma'}}$ ἔχουν τὸ ἴδιον πρόσημον. Ἐχουν ὅμως καὶ τὴν ἰδίαν ἀπόλυτον τιμὴν, διότι:



Σχ. 55



Σχ. 56

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'} \quad (\text{ἐκ τῶν ὁμοίων } \triangle OAB, \triangle OA'B') = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \quad (\text{ἐκ τῶν ὁμοίων } \triangle OBG, \triangle OB'\Gamma').$$

Ἦτοι: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \Rightarrow \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$. Ὡστε:

$$\frac{\vec{AB}}{\vec{B\Gamma}} = \frac{\vec{A'B'}}{\vec{B'\Gamma'}}.$$

Ἐὰν αἱ ἀκτῖνες τῆς δέσμης εἶναι παρ/λοι μεταξύ των, πάλιν τὸ θεώρημα προφανῶς ἰσχύει.

Ἐὰν τὸ κέντρον O τῆς δέσμης κεῖται ἐντὸς τῆς ταινίας τῶν δύο παρ/λων, τὰ σημεῖα B καὶ B' κεῖνται ἐπὶ δύο ἀντιθέτων ἡμιευθειῶν (O, B) καὶ (O, B') , ἐπομένως κεῖνται ἐκατέρωθεν τῆς εὐθείας AA' καὶ ὡς ἐκ τούτου τὰ διανύσματα \vec{AB} καὶ $\vec{A'B'}$ εἶναι ἀντίρροπα. Ὅμοίως καὶ τὰ $\vec{B\Gamma}$ καὶ $\vec{B'\Gamma'}$ εἶναι ἀντίρροπα (σχ. 56).

Ἄρα οἱ λόγοι: $\frac{\vec{AB}}{\vec{B\Gamma}}$ καὶ $\frac{\vec{A'B'}}{\vec{B'\Gamma'}}$ ἔχουν πάλιν τὸ ἴδιον πρόσημον.

Ἐχουν καὶ τὴν ἰδίαν ἀπόλυτον τιμὴν (ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω), ἄρα εἶναι πάλιν ἴσοι.

γ) Ἀντίστροφον θεώρημα. — Ἐάν τὰ σημεῖα A, B, Γ κείνται ἐπι μιᾶς εὐθείας καὶ τὰ A', B', Γ' ἐπι ἑτέρας εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν πρῶτην καὶ ἂν πληροῦνται ἡ σχέσις

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}}$$

τότε αἱ εὐθεῖαι $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν δέσμη.

Ἀπόδειξις. Αἱ AA' καὶ BB' ἀνήκουν εἰς μίαν δέσμη O , ὅπου O τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν (καθ' ὑπόστασιν ἢ καθ' ἐκδοχήν). Ἡ εὐθεῖα $O\Gamma$ τέμνει τὴν ἑτέραν τῶν παραλλήλων εἰς σημεῖον Γ'' συμπίπτον μὲ τὸ Γ' , διότι:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma''}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}} \quad \text{ἐξ ὑποθέσεως. Ἐκ τῶν δύο τούτων} \Rightarrow$$

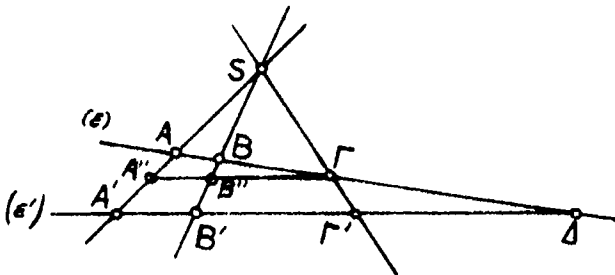
$\overline{B'\Gamma''} = \overline{B'\Gamma'} \Rightarrow \Gamma'' \equiv \Gamma'$. Ἄρα καὶ ἡ εὐθ $\Gamma\Gamma'$ ἀνήκει εἰς τὴν ἴδιαν δέσμη μὲ τὰς AA' καὶ BB' .

δ) Πόρισμα. Τὰ μέσα παραλλήλων χορδῶν γωνίας κείνται ἐπ' εὐθείας διερχομένης διὰ τῆς κορυφῆς, (ὡς «χορδὴ γωνίας» θὰ νοηταὶ πᾶν τμήμα ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας).

ε') Θεώρημα. Τρεῖς εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου S (ὄχι εἰς ἀπειρον ἀπόστασιν) τέμνονται ὑπὸ εὐθείας (ϵ) εἰς A, B, Γ καὶ ὑπὸ ἑτέρας εὐθείας (ϵ') εἰς A', B', Γ' ἀντιστοιχῶς. Ἐάν εἶναι $\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} = \frac{\overline{\Gamma' A'}}{\overline{\Gamma' B'}}$, τότε αἱ (ϵ) καὶ (ϵ') εἶναι παράλληλοι.

Διότι, ἂν αἱ (ϵ) καὶ (ϵ') ἐτέμοντο εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν Δ , θὰ ὑπῆρχε διὰ τοῦ Γ παρ/λος τῇ (ϵ') , ἡ ὁποία τέμνουσα τὰς SB', SA' εἰς B'' καὶ A'' (σχ. 57) θὰ ἐσχημάτιζε τρίγωνον $\Gamma A A''$, εἰς τὸ ὅποσον θὰ εἶχομεν: $\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} = \frac{\overline{\Gamma A''}}{\overline{\Gamma B''}}$, διότι $\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} = \frac{\overline{\Gamma' A'}}{\overline{\Gamma' B'}}$

ἐξ ὑποθέσεως καὶ $\frac{\overline{\Gamma A''}}{\overline{\Gamma B''}} = \frac{\overline{\Gamma' A'}}{\overline{\Gamma' B'}}$ κατὰ τὸ (Θ) τῆς δέσμης. Συνεπῶς θὰ ἴητο (§ 48) $AA'' // BB''$, ὅπερ ἐνάντιον τῇ ὑποθέσει.



Σχ. 57

Τὸ θεώρημα τοῦτο λέγεται δεύτερον ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τῆς δέσμης, κακῶς ὁμως, διότι δὲν ἰσχύει διὰ δέσμην τριῶν παραλλήλων εὐθειῶν.

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

57. α') Καλεῖται γινόμενον ὁσωνδήποτε εὐθυγράμμων τμημάτων $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \tau$, τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν τμημάτων μετρηθέντων διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $\mu(\alpha) \cdot \mu(\beta) \cdot \mu(\gamma) \dots \mu(\tau)$, ὅπου $\mu(x)$ σημαίνει τὸ μέτρον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος x . Διὰ τὴν ἀπλότητα θὰ παριστώμεν τὸ γινόμενον τοῦτο μὲ $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \dots \tau$.

Γενικώτερον εἰς πᾶσαν Ἀλγεβρικήν παράστασιν $f(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$, ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ εἶναι τμήματα, νοοῦμεν εἰς τὴν θέσιν τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, τὰ μέτρα αὐτῶν (θετικούς ἀριθμούς), μετρηθέντων μὲ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Οὕτω π.χ., ἂν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι τμήματα, γράφοντες $3\alpha^2 + \gamma\delta$ ἐννοοῦμεν τὸν ἀριθμὸν $3(\text{μετρ. } \alpha)^2 + (\text{μετρ. } \gamma)(\text{μετρ. } \delta)$ ἢ γράφοντες $\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}$ ἐννοοῦμεν $\frac{1}{\text{μετρ. } \alpha} + \frac{2}{\text{μετρ. } \beta}$ ἢ γράφοντες $\sqrt{\alpha\beta}$ ἐννοοῦμεν τὸν ἀριθμὸν $\sqrt{\text{μετρ. } \alpha \cdot \text{μετρ. } \beta}$.

β') Γεωμετρικαὶ σχέσεις. Μία σχέσις συνδέουσα τὰ μέτρα διαφόρων τμημάτων (ἢ ἀποστάσεων), δηλ. μία «μετρικὴ σχέσις», λέγεται «γεωμετρικὴ σχέσις», ὅταν ἀληθεύῃ δι' οἰανδήποτε μονάδα μετρήσεως. Διὰ νὰ συμβαίῃ νῦν δὲ τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ ἀνάγεται εἰς σχέσιν λόγων, διότι ὁ λόγος δύο τμημάτων εἶναι παντελῶς ἀνεξάρτητος τῆς μονάδος μετρήσεως τῶν μηκῶν.

Π.χ ἡ σχέσις $\alpha\beta\gamma + \delta^3 = \sqrt{2} \cdot \alpha^3 \cdot \epsilon$ εἶναι γεωμετρικὴ σχέσις μεταξὺ τῶν τμημάτων $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, διότι ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha^3\epsilon} + \frac{\delta^3}{\alpha^3\epsilon} = \sqrt{2}$ ἢ $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\epsilon} + \frac{\delta}{\alpha} \cdot \frac{\delta}{\alpha} \cdot \frac{\delta}{\epsilon} = \sqrt{2}$ καὶ συνεπῶς, ἂν ἀληθεύῃ διὰ μίαν μονάδα μετρήσεως τῶν τμημάτων, ἀληθεύει καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην μονάδα μετρήσεως (ἀφοῦ οἱ λόγοι δὲν μεταβάλλονται μὲ τὴν ἀλλαγὴν τῆς μονάδος).

Μία μετρικὴ σχέσις $f(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = 0$ μεταξὺ τμημάτων $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, διὰ νὰ εἶναι γεωμετρικὴ, πρέπει, ἂν τὸ f εἶναι πολυώνυμον, νὰ εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ἢ γενικώτερον ἢ f νὰ εἶναι ὁμογενὴς συνάρτησις.

γ') Εἰς τὰς μετρικὰς σχέσεις τῆς γεωμετρίας, ἡ μὴ εἶναι ἐπουσιώδης, διότι πᾶσαι αἱ γεωμετρικαί, μετρικαὶ σχέσεις μεταξὺ τμημάτων εἶναι ὁμογενεῖς (ἀνάγονται εἰς σχέσεις λόγων) καὶ συνεπῶς εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς μονάδος. Ἀπὸ οὐδὲν γεωμετρικὸν θεώρημα προκύπτει μὴ ὁμογενὴς σχέσις τμημάτων.

δ') Μία μὴ ὁμογενὴς σχέσις μεταξὺ τῶν μέτρων τμημάτων, π.χ. $\alpha^2 + \beta$

$= \gamma \sqrt{2}$ δὲν εἶναι γεωμετρικὴ σχέσις μεταξύ τῶν τμημάτων, διότι δυνατόν νὰ ἰσχύη διὰ μίαν ὀρισμένην μονάδα μετρήσεως, ἀλλὰ δὲν θὰ ἰσχύη, ὅταν τὰ α, β, γ μετρηθοῦν μὲ ἄλλην μονάδα.

ε') Παράδειγμα. Ἐστωσαν δύο οἰαδήποτε τμήματα α καὶ β .

Δυνάμεθα τότε νὰ κατασκευάσωμεν μίαν μονάδα μετρήσεως d , διὰ τὴν ὁποίαν νὰ ἰσχύη ἡ σχέσις $\alpha = \beta^2$.

Πράγματι ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τέταρτον ἀνάλογον τμήμα d τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{d}$ (§50), ὁπότε μὲ μονάδα τὸ d ἡ ἀναλογία γράφεται $\frac{\text{μετρ}(\alpha)}{\text{μετρ}(\beta)} = \text{μετρ}(\beta)$ ἢ $\text{μετρ}(\alpha) = (\text{μετρ}(\beta))^2$ ἢ μὲ τὴν ἀπλοποιημένην γραφὴν, $\alpha = \beta^2$. Ὡστε διὰ δύο τυχόντα τμήματα πάντοτε ἰσχύει $\alpha = \beta^2$ μὲ κατάλληλον μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν. Ἐν ἀλλάξει ἡ μονάς, ἡ σχέσις $\alpha = \beta^2$ παύει νὰ ἰσχύη, διότι $\alpha = \beta^2 \iff \frac{\text{μετρ}(\alpha)}{\text{μετρ}(\beta)} = \text{μετρ}(\beta)$ (μὲ μο-

νάδα d) καὶ ὅταν ἀλλάξει ἡ μονάς, ὁ μὲν λόγος $\frac{\text{μετρ}(\alpha)}{\text{μετρ}(\beta)} = \frac{\alpha}{\beta}$ (§ 42) δὲν μεταβάλλεται, ἐνῶ τὸ μετρ. β ἀλλάζει (§ 42). Ἡ σχέσις $\alpha = \beta^2$ δὲν εἶναι μετρικὴ—γεωμετρικὴ σχέσις μεταξύ τῶν τμημάτων α καὶ β .

ζ') Σταθερὸν γινόμενον. Λέγομεν ὅτι δύο μεταβλητὰ τμήματα x καὶ y ἔχουν σταθερὸν γινόμενον, ὅταν ὑπάρχουν δύο σταθερὰ τμήματα α καὶ β τοιαῦτα, ὥστε διὰ πᾶν ζεύγος (x, y) τῶν μεταβλητῶν τμημάτων νὰ ἰσχύη ἡ μετρικὴ σχέσις: $xy = \alpha\beta$.

ζ') Τετράγωνον τμήματος α καλοῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ μέτρου τοῦ τμήματος α καὶ τὸ παριστῶμεν ἀπλῶς μὲ α^2 . Ὡς εἶδομεν, εἰς τὰς γεωμετρικὰς σχέσεις ἡ ἐκλογὴ τῆς μονάδος δὲν ἔχει σημασίαν, διὰ τοῦτο καὶ ἡ μονάς μετρήσεως τῶν μηκῶν δὲν ἀναφέρεται.

η') Τμήμα λ λέγεται μέσον ἀνάλογον δύο ἄλλων τμημάτων μ καὶ ν , ὅταν τὸ τετράγωνόν του ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων:

$$\lambda^2 = \mu\nu.$$

(Ἐπειδὴ $\lambda^2 = \mu\nu \iff \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\lambda}{\nu}$, δηλ. τὸ λ ἰσταται εἰς τὸ μέσον τῆς ἀναλογίας, ἡ ὀνομασία του ὡς μέσου ἀναλόγου δικαιολογεῖται).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

308. Τὰ κέντρα βάρους τῶν τεσσάρων τριγῶνων, εἰς τὰ ὁποῖα κυρτὸν τετράπλευρον διαιρεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων του, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμιου.

309. Ἐν δύο εὐθείαι τέμνονται ὑπὸ παρ'ἑλίων $AB, \Gamma\Delta, EZ, H\Theta$ οὕτως, ὥστε αἱ διαγώνιοι $B\Gamma, \Delta E, ZH$ νὰ εἶναι παρ'ἑλοι, τότε θὰ εἶναι:

$$\Delta Z^2 = B\Delta \cdot Z\Theta.$$

310. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς AB τὸ τμήμα $\Delta E // A\Gamma$ (E ἐπὶ τῆς $B\Gamma$), κατόπιν ὁμοίως τὸ $EZ // AB$, τὸ $ZH // B\Gamma$, τὸ $H\Theta // A\Gamma$, τὸ $\Theta I // AB$. Νὰ δεიχθῇ ὅτι $\Delta I // B\Gamma$.

311. Ἐν τῷ τραπεζίῳ $AB\Gamma\Delta$, ἐὰν ἐνώσωμεν τὰ ἄκρα A καὶ Δ μίᾳ τῶν μὴ παρίλων πλευρῶν μὲ τὸ τυχόν σημεῖον E τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς $B\Gamma$ δι' εὐθειῶν AE καὶ ΔE , αἱ πρὸς τὰς εὐθείας ταύτας ἄγόμεναι παρίλοι ἐκ τῶν κορυφῶν Γ καὶ B ἀντιστοίχως συναντιῶνται ἐπὶ τῆς AD .

312. Ἐὰν εὐθεῖα παρίλος τῇ διαμέτρῳ AD τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνῃ τὰς εὐθείας AB καὶ $A\Gamma$ εἰς τὰ E καὶ Z , θὰ εἶναι : $\frac{AE}{AB} = \frac{AZ}{A\Gamma}$.

313. Ἄν διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου E τῶν διαγωνίων τραπεζίου ἀχθῆ παρίλος πρὸς τὰς βάσεις, τὸ ἐν τῷ τραπεζίῳ τμήμα τῆς παρίλου διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ E .

(Ἦποδ. Τὰ δύο μέρη, εἰς ἃ τὸ E χωρίζει τὸ ἐν λόγῳ τμήμα, νὰ συγκριθοῦν πρὸς τὴν μίαν τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου τῇ βοηθείᾳ ὁμοίων τριγώνων).

314. Ἐὰν εἰς κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ ἀχθῆ διὰ τοῦ Γ παράλληλος τῇ AB συναντῶσα τὴν $B\Delta$ εἰς τὸ O καὶ ἐκ τοῦ O παράλληλος τῇ AD συναντῶσα εἰς τὸ E τὴν ἐκ τοῦ B ἀγομένην παράλληλον τῇ $\Gamma\Delta$, δεῖξτε ὅτι τὸ E κείται ἐπὶ τῆς διαγωνίου $A\Gamma$.

(Ἦποδ. Ἄρκει νὰ δειχθῆ ἡ ἰσοδύναμος πρότασις: ἂν ἐκ τοῦ O ἀχθῆ $\parallel AD$, τέμνουσα τὴν $A\Gamma$ εἰς E , τότε $BE \parallel \Gamma\Delta$. Διὰ νὰ δειχθῆ τοῦτο, ἄρκει νὰ δειχθῆ ὅτι $KB/K\Delta = KE/K\Gamma$, ὅπου K τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων).

315. Δοθέντος ἡμικυκλίου φέρομεν ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου καὶ τρίτην ἐφαπτομένην εἰς τυχόν σημεῖον M τῆς ἡμιπεριφερείας. Νὰ δειχθῆ ὅτι τὸ κοινὸν σημεῖον E τῶν διαγωνίων τοῦ σχηματιζομένου τραπεζίου τέμνει διχα τὴν ἐκ τοῦ M κἀθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον.

(Ἦποδ. Ἐὰν $AB\Gamma\Delta$ τὸ σχηματιζόμενον τραπέζιον ($B\Gamma \perp AB$, $AD \perp AB$), δέον νὰ δειχθῆ πρῶτον ὅτι $ME \perp AB$. Πρὸς τοῦτο ἄρκει νὰ δειχθῆ: $EA : EG = MA : MG$. Χρησιμοποιοῦμεν τὴν ὁμοιότητα: $\text{τρ.}E\Delta A \approx \text{τρ.}E\Gamma B$).

316. Τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου M περιφερείας ἀπὸ δύο ἐφαπτομένας αὐτῆς ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἀπὸ τὴν χορδὴν τῶν ἐπαφῶν.

(Ἦποδ. Ἄν MG , MA , ME αἱ τρεῖς ἀποστάσεις, ἡ ἀποδεικτέα σχέσις $ME^2 = MG \cdot MA \iff \frac{ME}{MG} = \frac{MA}{ME}$. Ἄρκει νὰ δειχθῆ ὅτι $\text{τρ.}ME\Gamma \approx \text{τρ.}ME\Delta$).

317. Τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων σημείου περιφερείας ἀπὸ τὰς πλευρὰς πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς ταύτην ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας τὰς ἀγομένας εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου τούτου.

(Ἦποδ. Νὰ ληθῆ ὑπ' ὄψιν ἡ προηγουμένη ἄσκησις).

318. Τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων σημείου περιφερείας ἀπὸ τοὺς φορεῖς δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν τετραπλεύρου ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τοὺς φορεῖς τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν.

(Ἦποδ. Ἄν $ME \cdot MZ = MH \cdot M\Theta$ ἡ ἀποδεικτέα σχέσις, ἄρκει νὰ δειχθῆ ὅτι $\frac{ME}{MH} = \frac{M\Theta}{MZ}$ καὶ πρὸς τοῦτο ἄρκει νὰ δειχθῆ ὅτι $\Delta ME\Theta \approx \Delta MHZ$).

319. Ἄν γραφῆ ἡμιπεριφέρεια ἔχουσα κέντρον τὸ μέσον K τῆς βάσεως $B\Gamma$ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ ἐφαπτομένη τῶν ἴσων πλευρῶν AB , $A\Gamma$ εἰς Δ καὶ E , εἰς δὲ σημεῖον M τοῦ τόξου \widehat{DE} τῆς ἡμιπεριφερείας ἀχθῆ ἐφαπτομένη τέμνουσα τὰς πλευρὰς AB , $A\Gamma$ εἰς Z καὶ H , τότε θὰ εἶναι: $BZ \cdot \Gamma H = BK^2$.

(Υποδ. Άρκει νά δειχθῆ : $\frac{BZ}{BK} = \frac{KG}{GH}$ καί πρὸς τοῦτο ἀρκει νά δειχθῆ ὅτι τρ. BZK \approx τρ. KHG).

320. Ἐπί περιφερείας δίδονται τρία σημεῖα A, B, Γ καί αἱ προβολαὶ αὐτῶν H, M, N, τοῦ μὲν πρώτου ἐπὶ τὴν εὐθὺν ΒΓ, τῶν δὲ δύο ἄλλων ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΑ'. Νά δειχθῆ ὅτι: $AH^2 = AM \cdot AN$.

(Υποδ. Άρκει νά δειχθῆ ὅτι τρ. AHM \approx τρ. AHN).

321. Νά κατασκευασθῆ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος δίδεται τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους καὶ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἢ ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἢ μία τῶν ἰσῶν πλευρῶν.

322. Ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν AB, AG ὀρθογ. τριγώνου γράφομεν ἡμιπεριφερείας ἐκτὸς αὐτοῦ. Διὰ τοῦ A ἄγεται εὐθεῖα τέμνουσα εἰς Δ καὶ Ε τὰς ἡμιπεριφερείας. Νά εὐρεθῆ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου M διαιρουντος τὸ τμήμα ΔΕ εἰς σταθερὸν λόγον μ : ν, δηλ. τοιούτου, ὥστε $\frac{DM}{ME} = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ, ν δοθέντα τμήματα.

323. Ἐν ἐπιπέδῳ δίδονται δύο παράλληλοι (ε) καὶ (ε') καὶ σημεῖον Σ ἐκτὸς τῆς ταινίας αὐτῶν. Διὰ τοῦ Σ ἄγομεν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς (ε) καὶ (ε') ἀντιστοίχως εἰς Α καὶ Α' καὶ ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Α' καθέτου ἐπὶ τὴν ΣΑ' λαμβάνομεν σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε $A'M = SA$. Νά εὐρεθῆ ὁ γ.τ. τῶν M.

324. Νά δειχθῆ ὅτι δύο τρίγωνα μὲ ἀναλόγους διαμέσους εἶναι ὅμοια.

325. Ἡ εὐθεῖα ἡ ἐνοῦσα τὰ μέσα M καὶ N τῶν βάσεων τραπέζιου διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου E τῶν διαγωνίων καὶ διὰ κοινοῦ σημείου Z τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν προεκτεινομένων.

326. Δυθειστῶν δύο εὐθειῶν τεμνομένων ἐκτὸς τοῦ χάρτου σχεδιάσεως ν' ἀχθῆ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου καὶ διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν δύο πρώτων εὐθειῶν.

327. Δοθέντος ὀξυγωνίου τριγώνου ABΓ θεωροῦμεν τὰ ὀρθογώνια, ὧν δύο κορυφαὶ κείνται ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ, αἱ δὲ ἄλλαι δύο ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB, AG. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν ὀρθογωνίων τούτων;

328. Δοθέντος κυρτοῦ τετραπλεύρου ὑπάρχουν ἄπειρα παραλληλόγραμμα ἔχοντα τὰς κορυφάς των ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου καὶ τὰς πλευράς των παρῖλους πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμων τούτων;

329. Δίδεται περιφέρεια (K) καὶ δύο εὐθεῖαι (ε) καὶ (δ), ἐξ ὧν ἡ (ε) εἶναι ἐξωτερικὴ τῆς (K). Ζητεῖται νά κατασκευασθῆ εὐθεῖα ||(δ), τέμνουσα τὴν (K) εἰς Α καὶ Β καὶ τὴν (ε) εἰς Γ (κατὰ σειρὰν) οὕτως, ὥστε νά εἶναι $\frac{AB}{BG} = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ καὶ ν δοθέντα τμήματα.

330. Κυρτοῦ τετραπλεύρου ABΓΔ αἱ γωνίαι \widehat{B} καὶ \widehat{D} εἶναι ὀρθαί. Ἡ ἐκ τοῦ B ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν AG τέμνει τὴν πλευρὰν AD εἰς E καὶ ἡ ἐκ τοῦ D κάθετος ἐπὶ τὴν AG τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς Z. Ἐάν T τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου, νά δειχθῆ ὅτι τὰ E, T, Z κείνται ἐπ' εὐθείας.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ
ΔΙΧΟΤΟΜΟΥ ΓΩΝΙΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

58. α') Θεώρημα.— Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ συναντᾷ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΒΓ εἰς σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

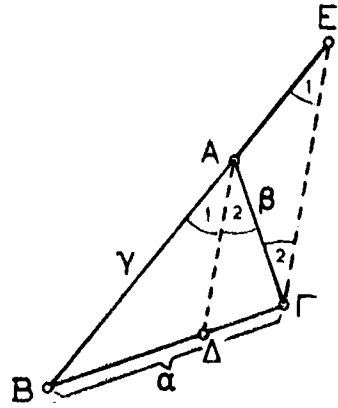
(χωρίζει τὴν ΒΓ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν εἰς αὐτὰ προσκειμένων πλευρῶν).

Ἀπόδειξις. Ὁ λόγος ΔΒ/ΔΓ μεταφέρεται διὰ τῆς ΓΕ, παρ/λου τῆ ΔΑ, ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ (σχ. 58), εἰς ΒΑ/ΑΕ (θεώρ. τοῦ Θαλοῦ), ἦτοι,

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{AE}$$

Ἐπειδὴ ὁμοῦς $\widehat{E}_1 = \widehat{A}_1$ (ἐντός - ἐκτός τῶν παρ/λων) $= \widehat{A}_2$ (διότι ΑΔ διχοτόμος) $= \widehat{\Gamma}_2$ (ἐντός ἐναλλάξ) $\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{\Gamma}_2$

$$\Rightarrow AE = A\Gamma \text{ καὶ ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία } \frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{AE} \text{ καθίσταται } \frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$$



Σχ. 58

β') Συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μέρηματα, εἰς ἃ χωρίζονται αἱ πλευραὶ ὑπὸ τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων.— Ἀναφερόμενοι εἰς τὸ σχ. 58 ἔχομεν :

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \text{ (ὡς ἐδείχθη)} \Rightarrow \frac{\Delta B}{AB} = \frac{\Delta \Gamma}{A\Gamma} \text{ ἢ :}$$

$$\frac{\Delta B}{\gamma} = \frac{\Delta \Gamma}{\beta} = \frac{\Delta B + \Delta \Gamma}{\beta + \gamma} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} \Rightarrow B\Delta = \frac{\alpha \gamma}{\beta + \gamma}, \quad \Delta \Gamma = \frac{\alpha \beta}{\beta + \gamma}$$

59. α') Θεώρημα.— Ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ' τριγώνου ΑΒΓ, συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ εἰς σημεῖον Δ' τοιοῦτον, ὥστε

$$\frac{\Delta' B}{\Delta' \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

Ἀπόδειξις. Ὁ λόγος $\frac{\Delta'Β}{\Delta'Γ}$ μεταφέρεται διὰ τῆς ΓΕ παραλλήλου

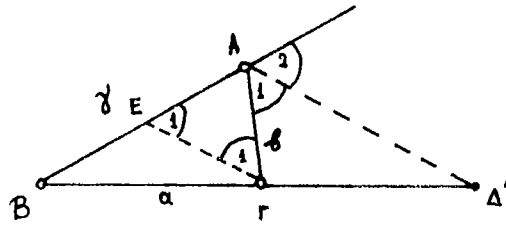
πρὸς τὴν ΑΔ' ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ εἰς τὸν ἴσον λόγον $\frac{ΑΒ}{ΑΕ}$ (Θεώρ.

Θαλοῦ). ἤτοι $\frac{\Delta'Β}{\Delta'Γ} = \frac{ΑΒ}{ΑΕ}$.

Ἐκ τῆς σειρᾶς ἰσοτήτων :

$$\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{E}_1 \Rightarrow \widehat{\Gamma}_1 = \widehat{E}_1$$

$$\widehat{E}_1 \Rightarrow ΑΕ = ΑΓ \text{ καὶ ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία καθίσταται } \frac{\Delta'Β}{\Delta'Γ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$



Σχ. 59

β) — Ὑπολογισμὸς τῶν ἀποστάσεων τοῦ ποδὸς τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς, συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Ἀναφερόμενοι εἰς τὸ σχ. 59 ἔχομεν :

$$\frac{\Delta'Β}{\Delta'Γ} = \frac{\gamma}{\beta} \text{ (ὡς ἐδείχθη) ἢ } \frac{\Delta'Β}{\gamma} = \frac{\Delta'Γ}{\beta} = \frac{\Delta'Β - \Delta'Γ}{\gamma - \beta} = \frac{\alpha}{\gamma - \beta} \text{ (}\gamma > \beta\text{)}$$

$$\Rightarrow \Delta'Β = \frac{\alpha\gamma}{|\gamma - \beta|}, \quad \Delta'Γ = \frac{\alpha\beta}{|\gamma - \beta|} \text{ (}\gamma \neq \beta\text{)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

331. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ πλευρὰ α θέσει καὶ μεγέθει, τὸ σημεῖον τομῆς τῆς πλευρᾶς ταύτης μετὰ τῆς ἀπέναντι διχοτόμου καὶ τὸ μήκος τῆς πλευρᾶς β.

332. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν β, γ καὶ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου δλ.

333. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν β, γ καὶ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου δ'λ.

334. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος ΑΒ = 8 ἐκ., ἡ ἐκ τῆς Α διχοτόμος = 5 ἐκ., ἡ δὲ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ κάθετος τῇ διχοτόμῳ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς σημεῖον Π ἀπέχον τοῦ Β ἀπόστασιν ΠΒ = 2 ἐκ.

335. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος ἡ ΑΒ = 10 ἐκ., ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ = 7 ἐκ., ἡ δὲ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον ταύτην νὰ τέμνη τὴν ΑΒ εἰς σημεῖον Π τοιοῦτον, ὥστε ΠΒ = 8 ἐκ.

60. Διαιρέσεις διανύσματος ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ. α') Ὅρισμοί. (I). Σημεῖον Γ κεί-

μενον επί τοῦ φορέως ἑνὸς διανύσματος \vec{AB} καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τμήματος AB λέγομεν ὅτι διαιρεῖ ἐσωτερικῶς τὸ \vec{AB} εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ , ὅταν

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \lambda \quad (\lambda > 0).$$

(Ἐάν $\frac{\Gamma B}{\Gamma A} = \lambda$, τότε τὸ Γ διαιρεῖ ἐσωτερικῶς εἰς λόγον λ , ὄχι τὸ \vec{AB} ἀλλὰ τὸ \vec{BA}).

(II). Σημεῖον Δ κείμενον ἐπὶ τοῦ φορέως ἑνὸς διανύσματος \vec{AB} καὶ εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ τμήματος AB λέγομεν ὅτι διαιρεῖ τὸ \vec{AB} ἐξωτερικῶς εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ , ὅταν

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \lambda \quad (\lambda > 0 \text{ καὶ } \neq 1).$$

β') (Θ) — Δοθέντος διανύσματος \vec{AB} καὶ ἑνὸς ἀριθμητικοῦ λόγου λ ὑπάρχει ἓν μόνον σημεῖον διαιροῦν ἐσωτερικῶς τὸ \vec{AB} εἰς λόγον λ καὶ ἓν μόνον σημεῖον διαιροῦν ἐξωτερικῶς τὸ \vec{AB} εἰς λόγον λ , τοῦ δευτέρου σημείου ὑπάρχοντος ἐφ' ὅσον $\lambda \neq 1$.

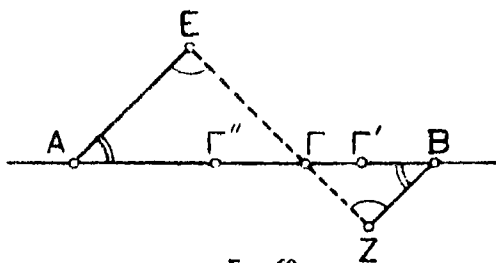
Ἀπόδειξις. ἰ) Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμητικὸς λόγος λ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον δύο δεδομένων τμημάτων, ἥτοι

$$\lambda = \frac{\mu}{\nu}, \text{ ὅπου } \mu, \nu \text{ δεδομένα}$$

τμήματα. (Τοῦ ν ἐκλεγομένου αὐθαίρετος, ὑπάρχει τμήμα $\mu = \lambda \cdot \nu \Rightarrow \mu/\nu = \lambda$ (βλ. § 44)).

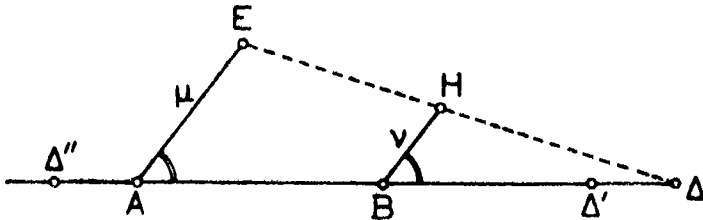
Ἐάν φέρωμεν ἐκ τῶν A καὶ B δύο παράλληλα καὶ ἀντίρροπα τμήματα, τὰ $AE = \mu$ καὶ $BZ = \nu$ (σχ. 60), τότε τὸ τμήμα EZ τέμνει τὸ τμήμα AB εἰς τι σημεῖον Γ (ἐσωτερικὸν) καὶ τὰ τρίγωνα ΓAE , ΓBZ εἶναι ὁμοία μετὰ ὁμολόγους πλευρὰς $A\Gamma$ μετὰ ΓB καὶ AE μετὰ BZ . Ὅθεν :

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{AE}{BZ} \text{ ἢ } \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\mu}{\nu} = \lambda. \text{ Ὡστε τὸ } \Gamma \text{ διαιρεῖ τὸ } \vec{AB} \text{ ἐσωτερικῶς εἰς λόγον } \lambda.$$



Ἄλλο σημεῖον διαιροῦν ἐσωτερικῶς τὸ \vec{AB} εἰς λόγον λ δὲν ὑπάρχει. Διότι, ἂν θεωρήσωμεν σημεῖον Γ' μεταξύ Γ καὶ B , τότε $\frac{\Gamma'A}{\Gamma'B} > \frac{\Gamma A}{\Gamma B}$, διότι καὶ $\Gamma'A > \Gamma A$ καὶ $\Gamma'B < \Gamma B$, δηλ. τὸ Γ' διαιρεῖ τὸ \vec{AB} εἰς μεγαλύτερον τοῦ λ λόγον. Ἄν δὲ θεωρήσωμεν σημεῖον Γ'' μεταξύ A καὶ Γ , τότε $\frac{\Gamma''A}{\Gamma''B} < \frac{\Gamma A}{\Gamma B}$. Ἄρα τὸ Γ εἶναι μοναδικόν.

ii) Ἐάν φέρωμεν ἐκ τῶν A καὶ B δύο παράλληλα καὶ ὁμόρροπα τμήματα (διανύσματα), τὰ $AE = \mu$ καὶ $BH = \nu$ ὅπου $\mu \neq \nu$ (διότι $\lambda \neq 1$), τότε ἡ εὐθεῖα EH τέμνει τὴν προέκτασιν τοῦ τμήματος AB εἰς τι σημεῖον Δ καὶ ἐκ τῶν προκύπτόντων ὁμοίων τριγώνων ΔAE , ΔBH ἔχομεν ὅτι: $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{AE}{BH}$ ἢ $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\mu}{\nu}$. Ἦτοι τὸ Δ διαιρεῖ ἐξωτερικῶς τὸ διάνυσμα \vec{AB} εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ .



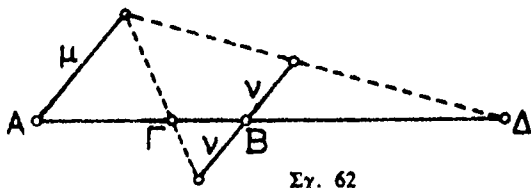
Σχ. 61

Ἄλλο σημεῖον, διαιροῦν ἐξωτερικῶς τὸ \vec{AB} εἰς τὸν ἴδιον λόγον λ , δὲν ὑπάρχει. Διότι, ἔστω πρῶτον ὅτι $\lambda > 1$. Τότε διὰ κάθε σημεῖον Δ'' ἐπὶ τῆς πρὸς τὸ μέρος τοῦ A προεκτάσεως τοῦ τμήματος AB θὰ εἶναι $\Delta''A < \Delta''B \Rightarrow \frac{\Delta''A}{\Delta''B} < 1$ καὶ ἐπειδὴ $\lambda > 1 \Rightarrow \frac{\Delta''A}{\Delta''B} < \lambda$. Ἐστω τώρα σημεῖον Δ' ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ AB καὶ μεταξύ B καὶ Δ κείμενον. Τότε, ἂν ὑποθεθῇ ὅτι $\frac{\Delta'A}{\Delta'B} = \lambda$, καταλήγομεν εἰς ἄτοπον. Διότι θὰ ἦτο: $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\Delta'A}{\Delta'B} = \frac{\Delta A - \Delta'A}{\Delta B - \Delta'B} = \frac{\Delta\Delta'}{\Delta\Delta'} = 1$, δηλ. $\frac{\Delta A}{\Delta B} = 1$ ἢ $\Delta A = \Delta B$, ὅπερ ἄτοπον. Ὁμοίως δεικνύομεν ὅτι οὔτε πέραν τοῦ Δ ὑπάρχει σημεῖον διαιροῦν τὸ \vec{AB} εἰς λόγον λ .

Ἐάν πάλιν $\lambda < 1$, τότε τὸ Δ ἔρχεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ AB πρὸς

τὸ μέρος τοῦ Α καὶ ἡ ἀπόδειξις τῆς μοναδικότητος τοῦ Δ εἶναι ὅμοια.

γ') Τὸ σχ. 62 δεικνύει τὴν διαίρεσιν τοῦ \vec{AB} ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς λόγον μ/v .



61. Διαίρεσις διανύσματος εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον λ.

α') Ἐστω \vec{AB} διάνυσμα κείμενον ἐπὶ ἄξονος $x x'$ καὶ Μ τυχόν σημεῖον τοῦ ἄξονος. Λέγομεν ὅτι τὸ Μ διαιρεῖ τὸ \vec{AB} εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον λ, ὅταν



$$\frac{\vec{MA}}{\vec{MB}} = \lambda \quad (\lambda \text{ σχετικὸς ἀριθμὸς}),$$

δηλ. ὅταν ὁ λόγος τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν διανυσμάτων \vec{MA}, \vec{MB} ἰσοῦται μὲ τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν λ.

β') (Θ) — Ὑπάρχει ἕν μόνον σημεῖον τῆς εὐθείας AB, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ διάνυσμα \vec{AB} εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον λ δοθέντα καὶ $\neq 1$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰς ζητήσωμεν ἐπὶ τοῦ $x'x$ (σχ. 63) σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{\vec{MA}}{\vec{MB}} = \lambda (\neq 1)$. Ἐχομεν $\frac{\vec{MA}}{\vec{MB}} = \lambda \iff \frac{\vec{MA}}{\vec{MA} + \vec{AB}} = \lambda$

(Θ. Chasles) $\iff \vec{MA} = \frac{-\vec{AB} \cdot \lambda}{\lambda - 1} \iff \vec{AM} = \frac{\vec{AB} \cdot \lambda}{\lambda - 1}$. Ἡ τελευταία

σχέσις ὀρίζει ἕν μόνον σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ ἄξονος $x'x$.

γ') Παρατηρήσεις: 1ον) Ἐὰν $\lambda < 0$, τὰ διανύσματα \vec{MA} καὶ \vec{MB} εἶναι ἀντίρροπα καὶ τὸ Μ κεῖται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ τμήματος AB (σχ. 64).

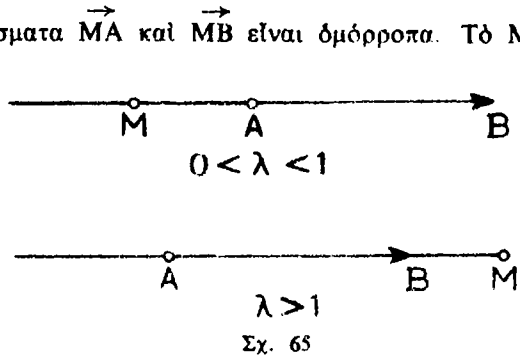


τὰ \vec{MA} καὶ \vec{MB} ἔχουν ἀντιθέτους φοράς ($\lambda < 0$)

Τὰ τμήματα MA καὶ MB λέγονται τότε προσθετικά (ἀθροιζόμενα δίδουν τὸ AB).

Σχ. 64

2ον) Ἐάν $\lambda > 0$, τὰ διανύσματα \vec{MA} καὶ \vec{MB} εἶναι ὁμόρροπα. Τὸ Μ κείται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ τμήματος AB ἢ πρὸς τὸ μέρος τοῦ A ἢ πρὸς τὸ μέρος τοῦ B . Λέγομεν τότε ὅτι τὰ τμήματα MA , MB εἶναι ἀφαιρετικά (ἀφαιρούμενα δίδουν τὸ AB). Τὸ Μ κείται πλησιέστερον πρὸς τὸ A , ὅταν $\lambda < 1$ καὶ πλησιέστερον πρὸς τὸ B , ὅταν $\lambda > 1$ (σχ. 65).



3ον) Ἐάν $\overline{MA}/\overline{MB} = -1$, τὸ Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ AB .

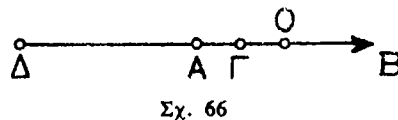
(Ἀσκήσεις : 336, 337, 338).

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΕΤΡΑΣ ΣΗΜΕΙΩΝ

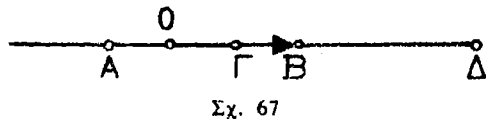
62. α') Ὅρισμός. Δύο σημεῖα Γ καὶ Δ , τὰ ὅποια διαιροῦν τὸ διά-
 νυσμα \vec{AB} εἰς τὸν ἴδιον ἀριθμητικὸν λόγον, λέγομεν ὅτι εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν A καὶ B .

Τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο, ἔστω Γ , εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τμήματος AB , τὸ δὲ ἄλλο, τὸ Δ , εἶναι ἐξωτερικὸν (§ 60). Ἔχομεν δὲ

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B} = \lambda.$$



Ἐάν $\lambda < 1$, τὰ Γ καὶ Δ κείνται πλησιέστερον πρὸς τὸ A παρά πρὸς τὸ B (σχ. 66). Ἐάν $\lambda > 1$, τὰ Γ καὶ Δ κείνται πλησιέστερον πρὸς τὸ B παρά πρὸς τὸ A (σχ. 67, $\lambda = 2$).



Εἰς πᾶσαν περίπτωσιν τὰ Γ καὶ Δ κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου O τοῦ AB , ἄρα καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς μεσοκαθέτου τοῦ AB .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Οἱ πόδες τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας \hat{A} τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν B καὶ Γ .

β') Ἰδιότης. Θεωρήσωμεν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν A καὶ B (σχ. 67). Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$(1) \quad \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$$

και εναλλάσσοντες τούς μέσους :

$$\frac{\Gamma\text{A}}{\Delta\text{A}} = \frac{\Gamma\text{B}}{\Delta\text{B}} \quad \eta$$

$$(2) \quad \frac{\overline{\text{A}\Gamma}}{\overline{\text{A}\Delta}} = \frac{\overline{\text{B}\Gamma}}{\overline{\text{B}\Delta}}.$$

Ἡ (2) δεικνύει ὅτι τὰ Α καὶ Β διαιροῦν εἰς ἴσους ἀριθμητικούς λόγους τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ἤτοι ὅτι εἶναι συζυγῆ ἄρμονικὰ τῶν Γ, Δ. Ἐπομένως :

«Ἐὰν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι συζυγῆ ἄρμονικὰ τῶν σημείων Α καὶ Β, τότε καὶ τὰ Α καὶ Β εἶναι συζυγῆ ἄρμονικὰ τῶν Γ καὶ Δ».

γ) Ἀρμονικὴ τετράς. Ἀντὶ τῆς (1) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$(3) \quad \frac{\overline{\Gamma\text{A}}}{\overline{\Gamma\text{B}}} = -\frac{\overline{\Delta\text{A}}}{\overline{\Delta\text{B}}}$$

δηλ. τὰ Γ καὶ Δ διαιροῦν τὸ $\overrightarrow{\text{A}\text{B}}$ εἰς ἀλγεβρικούς λόγους ἀντιθέτους. Ἡ (3) γράφεται

$$(4) \quad \frac{\overline{\Gamma\text{A}}}{\overline{\Gamma\text{B}}} : \frac{\overline{\Delta\text{A}}}{\overline{\Delta\text{B}}} = -1.$$

Λέγομεν ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τὰ πληροῦντα τὴν (4) ἀποτελοῦν ἄρμονικὴν τετράδα καὶ γράφομεν συμβολικῶς

$$(5) \quad \boxed{(A, B, \Gamma, \Delta) = -1}$$

Παρατηρήσεις. Ἄν πληροῦται ἡ (5), τότε πληροῦται καὶ ἡ

$$(6) \quad (\Gamma, \Delta, A, B) = -1$$

ἀφοῦ καὶ τὰ Α, Β εἶναι συζυγῆ ἄρμονικὰ τῶν Γ, Δ (ἔδαφ. β'), δηλ. καὶ ἡ τετράς Γ, Δ, Α, Β εἶναι ἄρμονικὴ. Ἐπίσης πληροῦται καὶ ἡ

$$(7) \quad (B, A, \Gamma, \Delta) = -1$$

(Ἀρκεῖ νὰ ἀντιστρέψωμεν τὰ μέλη τῆς (1) τοῦ ἔδαφ. β').

δ) Ἀρμονικὴ διαίρεσις. Λέγομεν ὅτι τὰ Γ καὶ Δ διαιροῦν ἄρμονικῶς τὸ τμήμα ΑΒ, ὅταν $(A, B, \Gamma, \Delta) = -1$.

63. Χαρακτηριστικαὶ ιδιότητες τῆς ἄρμονικῆς τετράδος. α) (Θ) — Ἴκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τέσσαρα συνευθειακὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἀποτελοῦν ἄρμονικὴν τετράδα εἶναι :

$$(1) \quad \overline{\text{O}\Gamma} \cdot \overline{\text{O}\Delta} = \text{O}\text{A}^2 = \text{O}\text{B}^2$$

ὅπου Ο τὸ μέσον τοῦ ΑΒ.

Ἀπόδειξις. Ἐάν τεθῆ: $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = -a$, $\overline{OG} = \gamma$, $\overline{OD} = \delta$, ἔχομεν τὰς ἀντιστρεπτάς συνεπαγωγὰς (ἢ ἰσοδυναμίας).

$$\begin{aligned} \frac{\overline{GA}}{\overline{GB}} &= -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \iff \frac{\overline{GO} + \overline{OA}}{\overline{GO} + \overline{OB}} = -\frac{\overline{DO} + \overline{OA}}{\overline{DO} + \overline{OB}} \iff \\ &\iff \frac{-\gamma + a}{-\gamma - a} = -\frac{-\delta + a}{-\delta - a} \iff \frac{\gamma - a}{\gamma + a} = \frac{a - \delta}{a + \delta} \iff \\ &\iff \frac{\gamma - a}{a - \delta} = \frac{\gamma + a}{a + \delta} \iff \frac{2\gamma}{2a} = \frac{2a}{2\delta} \iff \gamma\delta = a^2 \text{ ἤτοι } \overline{OG} \cdot \overline{OD} = \overline{OA}^2 \text{ ὁ.ἔ.δ.} \end{aligned}$$

β') (Θ) — Ἰκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τέσσαρα ἐπ' εὐθείας σημεῖα A, B, Γ, Δ ἀποτελοῦν ἄρμονικὴν τετράδα, εἶναι :

$$(2) \quad \frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AG}} + \frac{1}{\overline{AD}}.$$

Ἀπόδειξις. Ἄν τεθῆ: $\overline{AB} = \beta$, $\overline{AG} = \gamma$, $\overline{AD} = \delta$ τότε :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{GA}}{\overline{GB}} &= -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \iff \frac{\overline{GA}}{\overline{GA} + \overline{AB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DA} + \overline{AB}} \iff \frac{-\gamma}{-\gamma + \beta} = \frac{\delta}{-\delta + \beta} \\ &\iff \gamma\delta - \gamma\beta = -\gamma\delta + \beta\delta \iff 2\gamma\delta = \beta(\gamma + \delta) \iff \\ &\iff \frac{2}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta} \iff \frac{2}{\beta} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} \text{ (δηλ. ὁ ἀριθμὸς } \beta \text{ εἶναι μέσος ἄρμονικὸς τῶν } \gamma \text{ καὶ } \delta) \text{ ὁ.ἔ.δ.} \end{aligned}$$

γ') Ἐτέρα χαρακτηριστικὴ ιδιότης τῆς ἄρμονικῆς τετράδος σημείων (εὐκόλως ἀποδεικνυομένη) δίδεται εἰς τὴν ἄσκ. 340.

64. Ἔτεροι σχέσεις. (Θ) — Ἐάν τὰ Γ καὶ Δ διαιροῦν τὸ \overrightarrow{AB} εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ, τότε τὸ μέσον H τοῦ ΓΔ διαιρεῖ τὸ \overrightarrow{AB} εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον λ².

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, τὰ A, B, Γ, Δ ἀποτελοῦν ἄρμονικὴν τετράδα, θὰ ἔχομεν κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AG}} + \frac{1}{\overline{AD}}$ ἢ $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AG} + \overline{AD}}{\overline{AG} \cdot \overline{AD}}$. Ἀλλὰ $\overline{AG} + \overline{AD} = 2\overline{AH}$ συνεπῶς $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{2\overline{AH}}{\overline{AG} \cdot \overline{AD}}$ ἤτοι :

$$(1) \quad \overline{AG} \cdot \overline{AD} = \overline{AH} \cdot \overline{AB}.$$

Ἐπειδὴ καὶ τὰ B, A, Γ, Δ ἀποτελοῦν ἄρμονικὴν τετράδα, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τὰ A καὶ B εἰς τὴν σχέσιν (1), ὁπότε

$$(2) \quad \overline{B\Gamma} \cdot \overline{B\Delta} = \overline{BH} \cdot \overline{BA}.$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$(3) \quad \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{B\Gamma}} \cdot \frac{\overline{A\Delta}}{\overline{B\Delta}} = -\frac{\overline{A\overline{H}}}{\overline{B\overline{H}}} \quad \eta \quad \frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} \cdot \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} = -\frac{\overline{HA}}{\overline{HB}}.$$

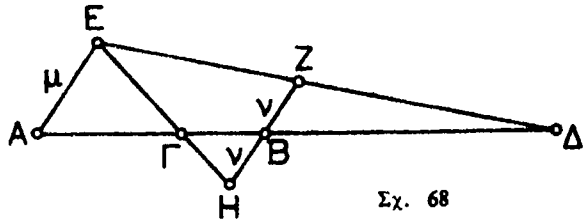
Ἐὰν π.χ. τὸ Γ εἶναι ἐσωτερικὸν καὶ τὸ Δ ἐξωτερικὸν τοῦ τμήματος AB, τότε $\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} = -\lambda$, $\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} = \lambda$ καὶ ἡ (3) γίνεται $(-\lambda) \cdot (\lambda) = -\frac{\overline{HA}}{\overline{HB}}$ ἤτοι $\frac{\overline{HA}}{\overline{HB}} = \lambda^2$.

Παρατήρησις. Ἡ ἰσότης (1) εἶναι ἐπίσης χαρακτηριστικὴ τῆς ἄρμονικῆς διαιρέσεως.

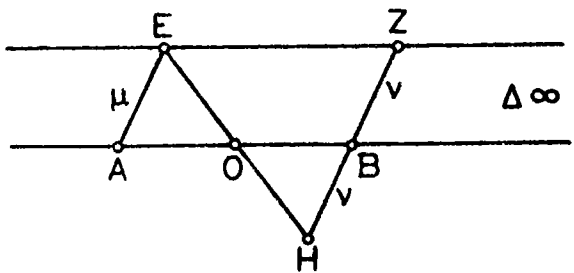
65. Συμβατικὰ συζυγῆ ἄρμονικὰ σημεῖα.

α') (Θ) — Τὸ συζυγὲς ἄρμονικὸν ὡς πρὸς τὰ A καὶ B τοῦ μέσου τοῦ AB εἶναι τὸ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον τῆς εὐθ. AB.

Ἀπόδειξις. Τὸ AB διαιρεῖται ἄρμονικῶς ὑπὸ τῶν Γ καὶ Δ διὰ τῆς κατασκευῆς ἐν σχήματι 68, ὅπου $\mu > \nu$. ($\Gamma A : \Gamma B = \Delta A : \Delta B = \mu : \nu$). Ὄταν ὁμοῦς εἶναι $\mu = \nu$ (σχ. 69), τότε τὸ Γ μεταβαίνει εἰς τὸ μέσον O τοῦ AB, ἐνῶ ἡ εὐθεῖα EZ γίνεται παράλληλος πρὸς τὴν εὐθ. AB. Τὸ συζυγὲς ἄρμονικὸν τοῦ O, τὸ ὅποιον εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν EZ καὶ AB, ἐνῶ κατὰ τὴν Εὐκλείδειον Γεωμετρίαν δὲν ὑπάρχει, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ($\mu = \nu$) δύναται νὰ νοηθῆ κατὰ τὴν προβολικὴν γεω-



Σχ. 68



Σχ. 69

μετρίαν ὡς τὸ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημεῖον Δ_∞ τῆς εὐθείας AB (ἢ τῆς EZ). (§ 55).

$$\text{Θέτομεν : } \boxed{\frac{\overline{\Delta_\infty A}}{\overline{\Delta_\infty B}}} = - \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = + 1.$$

Ἦτοι τὸ εἰς ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθ. AB εἶναι, κατὰ σύμβασιν, τὸ μόνον σημεῖον, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ \overrightarrow{AB} εἰς ἀλγεβρικὸν λόγον $\lambda = +1$.

β') **Σύμβασις.** Διὰ νὰ ἔχουν δλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθ. AB ἔν συζυγῆς ἁρμονικὸν ὡς πρὸς τὰ A καὶ B , ὀρίζομεν ὡς **συζυγῆς ἁρμονικὸν τοῦ A αὐτοῦ τοῦτο τὸ A καὶ ὡς συζυγῆς ἁρμονικὸν τοῦ B αὐτοῦ τοῦτο τὸ B** , διότι οὕτω πληροῦται ἡ χαρακτηριστικὴ ιδιότης τῆς ἁρμονικῆς τετράδος τῆς § 63, α'. Ἦτοι ἢ $\overline{OG} \cdot \overline{OD} = \overline{OA}^2 - \overline{OB}^2$ ἰσχύει, ὅταν $\Gamma \equiv A \wedge \Delta \equiv A$ ἢ ὅταν $\Gamma \equiv B \wedge \Delta \equiv B$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

336. Ἐπ' εὐθείας δίδονται σημεῖα O, A, B . Κατασκευάσατε σημεῖον M μεταξύ A καὶ B τοιοῦτον, ὥστε $4MA = 3MB$. Ὑπολογίσατε τὸν λόγον $\overline{MA} : \overline{MB}$. Δείξατε ὅτι $\overline{OM} = -4\overline{OA} + 3\overline{OB}$.

337. Ἐστω ἄξων ($x'Ox, i$) καὶ $M_1(x_1), M_2(x_2)$ δύο σημεῖα αὐτοῦ ἔχοντα τετημημένας x_1, x_2 ἀντιστοίχως. i) Δείξατε ὅτι

$$(1) \quad \overline{M_1 M_2} = x_2 - x_1.$$

ii) Ἐάν αἱ τετημημέναι δύο σημείων A καὶ B τοῦ ἄξωνος εἶναι ἀντιστοίχως, $-\sqrt{2} - 1$ καὶ $-\sqrt{2} + 2$, ὑπολογίσατε βάσει τοῦ τύπου (1) τὴν τετημημένην σημείου M τοιοῦτου, ὥστε $3\overline{MA} + 2\overline{MB} = -2\sqrt{2} - 3$.

338. Δύο σημεῖα A καὶ B ἑνὸς ἄξωνος ἔχον τετημημένας α καὶ β ἀντιστοίχως. Ὑπολογίσατε τὴν τετημημένην σημείου M τοιοῦτου, ὥστε

$$3\overline{MA} = 5\overline{MB}.$$

339. Δίδονται τρία σημεῖα A, B, Γ ἐπὶ ἄξωνος ἔχοντα τετημημένας $3, (-2), (-1)$. Προσδιορίσατε διὰ τῆς τετημημένης τούτου :

i) Τὸ συζυγῆς ἁρμονικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς τὰ A, B .

ii) Τὸ συζυγῆς ἁρμονικὸν τοῦ A ὡς πρὸς τὰ B, Γ .

340. (Χαρακτηριστικὴ ιδιότης τῆς ἁρμονικῆς τετράδος). Ἐάν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι αἱ τετημημέναι τεσσάρων διαφορετικῶν σημείων A, B, Γ, Δ ἑνὸς ἄξωνος, δείξατε ὅτι ἰκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα $(A, B, \Gamma, \Delta) = -1$, εἶναι :

$$\boxed{(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = 2\alpha\beta + 2\gamma\delta}.$$

Ἐκ ταύτης ἐπανεῦρετε τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) τῆς § 63.

341. Ἐάν H καὶ I εἶναι τὰ μέσα τῶν ἐπ' εὐθείας τμημάτων AB καὶ ΓA . Δείξατε ὅτι μία ἀναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη, ἵνα $(A, B, \Gamma, \Delta) = -1$, εἶναι :

$$AB^2 + \Gamma A^2 = 4HI^2.$$

342. Κύκλος ἐφάπτεται τῶν ἰσῶν πλευρῶν AB καὶ AG ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς B καὶ Γ . Δείξατε ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ A , διαιρεῖται ἄρμονικῶς ὑπὸ τοῦ A καὶ τῆς $B\Gamma$.

343. Ἐστω τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$, M καὶ N τὰ μέσα τῶν βάσεων AB καὶ $\Gamma\Delta$, E τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων, Z τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν AD , $B\Gamma$. Δείξατε ὅτι ἡ τετράς τῶν σημείων M , N , E , Z εἶναι ἄρμονικῆ.

344. Δύο μεταβλητὰ σημεῖα M καὶ M' κινουῦνται ἐπὶ ἀξονος οὕτως, ὥστε αἱ τετμημένοι τῶν x καὶ x' νὰ συνδέωνται πάντοτε διὰ τῆς σχέσεως $xx' - 3(x+x') = 0$. i) Ὅρισατε τὰς τετμημένας τῶν σημείων τοῦ ἀξονος, εἰς τὰ ὅποια τὰ M καὶ M' συμπίπτουν. Ἐστωσαν δὲ A καὶ B τὰ σημεῖα ταῦτα. ii) Δείξατε ὅτι $(A, B, M, M') = -1$.

345. Χορδὴ $\Gamma\Delta$ κύκλου (O) εἶναι κάθετος ἐπὶ διαμέτρου AB . Ἐάν M τυχὸν σημεῖον τῆς περιφέρειας, αἱ δὲ εὐθεῖαι $M\Gamma$, $M\Delta$ τέμνουν τὴν εὐθ AB εἰς E καὶ Z , δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον $OE \cdot OZ$ ἔχει σταθερὰν τιμὴν.

346. Δείξατε ὅτι μία ἀναγκαῖα καὶ ἰκονὴ συνθήκη, ἵνα $(A, B, \Gamma, \Delta) = -1$, εἶναι τοῦ H ὄντος μέσου τοῦ $\Gamma\Delta$, νὰ πληροῦνται ἡ σχέσις :

$$\overline{H\Gamma} \cdot \overline{H\Delta} + \overline{HA} \cdot \overline{HB} = 0.$$

347. Ἐστωσαν A' , B' , Γ' τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ εἰς τρ. $AB\Gamma$ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῶν πλευρῶν $B\Gamma$, ΓA , AB .

Ἡ εὐθεῖα $B'\Gamma'$ τέμνει τὴν εὐθ $B\Gamma$ ἔστω εἰς A_1 καὶ τὴν ἐκ τοῦ Γ παράλληλον τῇ AB εἰς Δ . Παρατηροῦντες ὅτι τὸ τρ. $\Gamma B'\Delta$ εἶναι ἰσοσκελὲς δείξατε ὅτι ἡ τετράς A_1, A', B, Γ εἶναι ἄρμονικῆ.

348. Ἐάν O τὸ κέντρον καὶ ρ ἡ ἀκτίς τοῦ εἰς τρ. $AB\Gamma$ ἐγγεγραμμένου κύκλου, O_1 καὶ ρ_2 τὸ κέντρον καὶ ἡ ἀκτίς τοῦ ἐντός τῆς \widehat{A} παρεγγεγραμμένου κύκλου καὶ Δ ὁ ποῦς τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου τῆς \widehat{A}

i) δείξατε ὅτι ἡ τετράς (A, Δ, O, O_1) εἶναι ἄρμονικῆ.

ii) χρησιμοποιοῦντες μίαν ὀρθὴν προβολὴν ἐπὶ τοῦ φορέως τοῦ ὕψους $AA' - u_\alpha$ δείξατε ὅτι

$$\frac{2}{u_\alpha} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_2}.$$

iii) Συναγάγετε κατασκευὴν ἑνὸς ἐκ τῶν τριῶν στοιχείων u_α , ρ , ρ_2 , ὅταν δίδωνται τὰ δύο ἄλλα.

349. Ἐστω τετράγωνον $AB\Gamma\Delta$, περιφέρεια (c) κέντρον Δ καὶ ἀκτίνοσ ΔA καὶ περιφέρεια (c') διαμέτρου ΔA . Εὐθεῖα διὰ τοῦ Δ τέμνει τὴν (c) εἰς M καὶ M' , τὴν (c') εἰς P καὶ τὴν AB εἰς P' . Δείξατε ὅτι $(M, M', P, P') = -1$.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

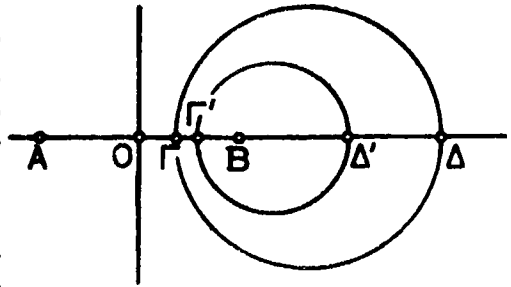
66. α') Καλεῖται ἀπολλώνιος κύκλος ὡς πρὸς τὰ σημεῖα A καὶ B κάθε κύκλος ἔχων ἄκρα διαμέτρου δύο σημεῖα, συζυγῆ ἄρμονικὰ τῶν A καὶ B .

β') Πᾶς ἀπολλώνιος κύκλος ὡς πρὸς τὰ A καὶ B κεῖται εἰς τὸ ἓν τῶν ἡμιεπιπέδων, εἰς α ἢ μεσοκάθετος τοῦ AB χωρίζει τὸ ἐπίπεδον.

Διότι τὰ συζυγῆ ἄρμονικὰ Γ καὶ Δ τῶν A καὶ B κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου O τοῦ AB (§ 62, α').

γ) Δύο ἀπολλώνιοι κύκλοι ὡς πρὸς τὰ A καὶ B, κείμενοι εἰς τὸ ἴδιον ἡμιεπίπεδον ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ AB, κείνται ὁ εἰς ἐντὸς τοῦ ἄλλου.

Ἐστω O τὸ μέσον τοῦ AB.
Ἐνα ζεύγος (Γ, Δ) συζυγῶν ἀρμονικῶν ὡς πρὸς τὰ A, B κείται μετὰ τοῦ B πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου O, ὅταν $\frac{GA}{GB} = \frac{DA}{DB} > 1$ (σχ. 70). Ἄς θεωρήσωμεν τώρα καὶ δεῦτερον ζεύγος (Γ', Δ') συζυγῶν ἀρμονικῶν ὡς πρὸς τὰ A καὶ B καὶ ἔστω ὅτι τὸ Γ' κείται μετὰξὺ Γ καὶ Δ, δηλ.



Σχ. 70

$$(1) \quad OG < OG' < OD.$$

Ἐπειδὴ $OG \cdot OD = OG' \cdot OD'$ (§ 63, α'), ἡ (1) γράφεται :

$$OG < \frac{OG \cdot OD}{OD'} < OD \Rightarrow 1 < \frac{OD}{OD'} \text{ καὶ } \frac{OG}{OD'} < 1 \Rightarrow$$

$OD' < OD$ καὶ $OD' > OG$, δηλ. $OG < OD' < OD$ δηλ. καὶ τὸ Δ' κείται ἐπίσης μετὰξὺ Γ καὶ Δ' ἄρα ὀλόκληρον τὸ τμήμα ΓΔ' κείται ἐντὸς τοῦ ΓΔ καὶ συνεπῶς ὁ κύκλος διαμέτρου ΓΔ' κείται ὀλόκληρος ἐντὸς τοῦ κύκλου μὲ διάμετρον ΓΔ.

Πόρισμα.— Δύο ἀπολλώνιοι περιφέρειαι ὡς πρὸς τὸ ἴδιον ζεύγος σημείων A καὶ B οὐδέποτε ἔχουν κοινὸν τι σημεῖον.

δ') Τόπος τῶν ἀναλόγων ἀποστάσεων. (Θ) — Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων M τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα A καὶ B εἶναι σταθερὸς, ἦτοι :

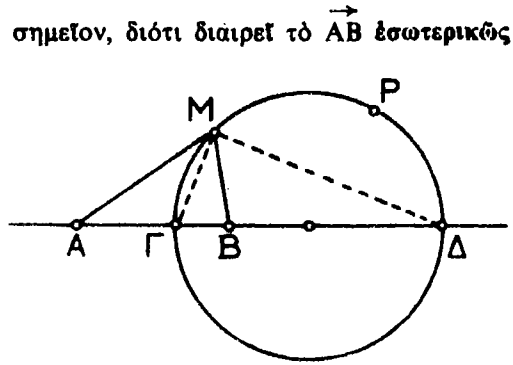
$$\frac{MA}{MB} = \lambda \quad (\text{σταθερὸν } \neq 1),$$

εἶναι περιφέρεια μὲ ἄκρα διαμέτρου τὰ σημεῖα τὰ διαιροῦντα τὸ διάνυσμα \vec{AB} ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ (§60).

Ἀπόδειξις. Ἐστω $\lambda > 1$ καὶ M σημεῖον τοῦ τόπου μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς ευθ AB. Διὰ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου MΓ τοῦ τρ. AMB, ὁ λόγος MA/MB μεταφέρεται εἰς GA/GB. Δηλ. :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{GA}{GB} \text{ καὶ ἐπειδὴ } \frac{MA}{MB} = \lambda \Rightarrow \frac{GA}{GB} = \lambda.$$

Ἵνατε τὸ Γ εἶναι σταθερὸν σημεῖον, διότι διαιρεῖ τὸ \overrightarrow{AB} ἑσωτερικῶς εἰς λόγον λ. Ὅμοίως διὰ τῆς ἑξωτερικῆς διχοτόμου ΜΔ τοῦ τρ. AMB ὁ λόγος $\lambda = MA/MB$ μεταφέρεται εἰς $\Delta A/\Delta B = \lambda$. Ἴρα καὶ τὸ Δ εἶναι σταθερὸν σημεῖον, διαιροῦν τὸ \overrightarrow{AB} ἑξωτερικῶς εἰς ἀριθμητικὸν λόγον λ.



Σχ. 71

Ἐπειδὴ $\overrightarrow{\Gamma M \Delta} = 1$ ὀρθή, ἔπεται ὅτι τὸ Μ ἀνήκει εἰς τὴν περιφέρειαν διαμέτρου ΓΔ, ἥτις κείται ἐξ ὀλοκλήρου ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ AB εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον τὸ περιέχον τὸ Β. Τὰ Γ καὶ Δ εἶναι προφανῶς σημεῖα τοῦ τόπου.

Ἐάν $\lambda < 1$, τὰ Γ καὶ Δ κείνται ὡς πρὸς τὸ μέσον Ο τοῦ AB πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α.

Ἵνατε ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόπου κείνται ἐπὶ ἀπολλωνίου περιφέρειας ὡς πρὸς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοιχούσης εἰς λόγον $\Gamma A : \Gamma B = \Delta A : \Delta B = \lambda$.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω Ρ σημεῖον τῆς ἀπολλωνίου περιφέρειας διαμέτρου ΓΔ (σχ. 71).

Ἐάν ἦτο $\frac{PA}{PB} = \lambda'$, ὅπου $\lambda' \neq \lambda$, τότε τὸ Ρ θὰ ἔκειτο καὶ ἐπὶ ἑτέρας

ἀπολλωνίου περιφέρειας μὲ ἄκρα διαμέτρου Γ' καὶ Δ' τοιαῦτα, ὥστε $\Gamma'A : \Gamma'B = \Delta'A : \Delta'B = \lambda'$. Ἀλλὰ τότε αἱ δύο διαφορετικαὶ ἀπολλωνίου περιφέρειαι θὰ εἶχον κοινὸν σημεῖον τὸ Ρ, ὅπερ ἀδύνατον (ἐδ. γ', πόρισμα).

Ἴρα $\frac{PA}{PB} = \lambda$. Συνάγομεν ἀκόμη ὅτι ἡ ΡΓ καὶ ΡΔ εἶναι διχοτόμοι τῆς \widehat{APB} (σχ. 71).

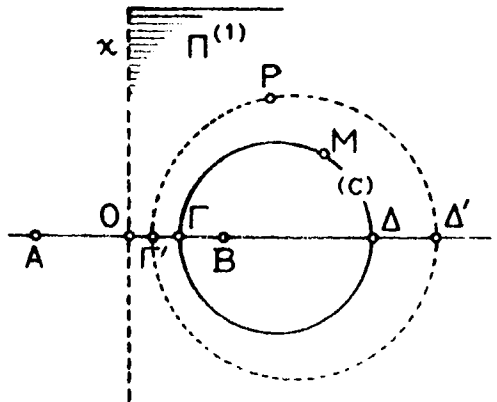
Παρατήρησις. Ἐάν $\lambda = 1$, ὁ ἀντίστοιχος τόπος εἶναι προφανῶς ἡ μεσοκάθετος τοῦ AB.

67. Περιοχαὶ τοῦ ἐπιπέδου καθοριζόμεναι ὑπὸ τοῦ τόπου τῶν σημείων Μ τῶν ἐχόντων τὴν ιδιότητα : $MA : MB = \lambda \neq 1$.

Ἴας ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι $\lambda > 1$, ὅποτε ὁ τόπος τῶν Μ : $\frac{MA}{MB} = \lambda$ εἶναι ἀπολλωνίος κύκλος (c) διαμέτρου ΓΔ (σχ. 72), κείμενος ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ AB πρὸς τὸ

μέρος του Β (διότι $MA > MB$). Έστω Ρ σημείον κείμενον έξω του άπολλωνίου τούτου κύκλου, άλλ' εις τό ίδιον ήμιεπίπεδον μετ' αυτού ώς πρός τήν μεσοκάθετον. Τότε $PA/PB \neq \lambda$ και τό Ρ θά κείται επί έτέρας άπολλωνίου περιφερείας, διαμέτρου ΓΔ', όπου $\Gamma'A : \Gamma'B = \Delta'A : \Delta'B = PA : PB$.

Έπειδή οι δύο ουτοι άπολλώνιοι κύκλοι κείνται πρός τό αυτό μέρος τής μεσοκάθετου Οχ, έπεται ότι ό εις θά κείται έντός του άλλου (§ 66, γ') και έπειδή τό Ρ είναι έξωτερικόν του (c), έπεται ότι ό (c) κείται έντός του δευτέρου, δηλ. του με διάμετρον ΓΔ'. Άρα $\Gamma'A < \Gamma\Delta$ και $\Gamma'B > \Gamma\Delta$, έξ ών έπεται $\frac{\Gamma'A}{\Gamma'B} < \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta}$



Σχ. 72

δηλ. $\frac{PA}{PB} < \lambda$.

Έάν τό Ρ κείται επί τής μεσοκάθετου, τότε $PA : PB = 1$, δηλ. πάλιν $PA : PB < \lambda$.

Έάν τό Ρ κείται εις τό αντίθετον ήμιεπίπεδον έκείνου, εις τό όποιον κείται ό (c), τότε $PA < PB$ και $PA : PB < 1 < \lambda$. Έπομένως :

Αι' όλα τά σημεία Ρ τά έξω του άπολλωνίου κύκλου (c) ισχύει :

$$\frac{PA}{PB} < \lambda$$

Έντελώς αναλόγως εύρισκομεν ότι, άν τό Ρ κείται εις τό έσωτερικόν του κύκλου (c), τότε : $\frac{PA}{PB} > \lambda$. Έπομένως :

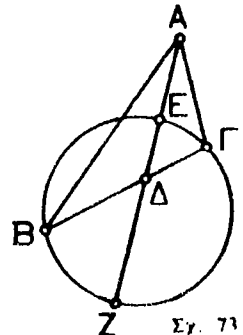
Δοθείσης άπολλωνίου περιφερείας (c), ής τά σημεία Μ πληρούν τήν σχέσηιν $MA : MB = \lambda$, όπου $\lambda > 1$, πών σημείον Ρ του επιπέδου κείμενον έκτός του κύκλου (c) έχει τήν ιδιότητα : $PA : PB < \lambda$ και πών σημείον Ρ' έντός του (c) έχει τήν ιδιότητα : $P'A : P'B > \lambda$.

Τά αντίστροφα συμβαίνουν, όταν $\lambda < 1$.

68. Παρατήρησις. Έστω ΑΔ ή έσωτερική διχοτόμος τρι.ΑΒΓ και α, β, γ τά μήκη των πλευρών του τριγώνου. Θά έχωμεν (§ 58) :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma A} = \frac{BD + \Delta\Gamma}{BA + \Gamma A} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} \quad \text{ήτοι :}$$

$$(1) \quad \frac{BD}{BA} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}, \quad \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma A} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}$$



Σχ. 73

Έκ των (1) έπεται ότι τά Β και Γ κείνται επί τής ίδιας άπολλωνίου περιφερείας ώς πρός τά σημεία Δ και Α, τής έχούσης άκρα διαμέτρου τά σημεία Ε και Ζ (σχ. 73) τοιαύτα, ώστε :

$$\frac{E\Delta}{E\Lambda} = \frac{Z\Delta}{Z\Lambda} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

350. Είς ὃ γ.τ. τῶν σημείων, ἀπὸ τῶν ὁποίων δύο δεδομένοι κύκλοι φαίνονται ὑποσῆς γωνίας:

351. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ βᾶσις a , ὁ λόγος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καί :

- i) Τὸ ἐπὶ τὴν δοθείσαν βᾶσιν ὕψος h
- ii) τὸ ἄθροισμα τῶν παρὰ τὴν βᾶσιν γωνιῶν h
- iii) ἡ διαφορὰ τῶν παρὰ τὴν βᾶσιν γωνιῶν h
- iv) ἡ διχοτόμος τῆς ἀπέναντι τῆς a γωνίας.

352. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον $AB\Gamma$, οὗτινος δίδεται ἡ βᾶσις $B\Gamma = a$, ὁ λόγος $\frac{AB}{A\Gamma} = \lambda > 1$ καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς A ὕψος νὰ εἶναι τὸ μέγιστον δυνατὸν. Νὰ υπολογισθοῦν ἀκολουθῶς τὸ ὕψος τοῦτο καὶ αἱ πλευραὶ AB , $A\Gamma$ συναρτήσῃ τῶν a καὶ λ .

353. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται τὸ ὕψος u_a , ἡ διχοτόμος δ_a καὶ εἰς τὸ ὁποῖον νὰ πληροῦται ἡ σχέσις :

$$AB + A\Gamma = 2B\Gamma.$$

(Ἐπόδ. βλ. § 68).

354. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον ἐκ τῆς $B\Gamma = a$, τῆς διχοτόμου $A\Delta = \delta$ καὶ τοῦ ἄθροισματος $AB + A\Gamma = k$.

(Ἐπόδ. βλ. § 68).

355. Διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς δύο κύκλων ἄγομεν χορδὰς εὐρισκομένας εἰς δοθέντα λόγον $\mu : \nu$. Νὰ εὐρεθῆ ὁ γ.τ. τῆς τομῆς τῶν καθέτων, αἰτίνες ἄγονται ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους χορδὰς.

356. Νὰ κατασκευασθῆ κυρτὸν τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἂν δίδονται αἱ τέσσαρες πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου.

(Ἐπόδ. Ἐν $AB\Gamma\Delta$ τὸ ζητούμενον καὶ ληφθῆ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς $A\Delta$ σημείον E τοιοῦτον, ὥστε $\widehat{\Delta\Gamma E} = \widehat{B\Gamma A}$, τότε τρ. $\Gamma\Delta E \approx$ τρ. $AB\Gamma$. Τὸ τμήμα ΔE ὀρίζεται, τὸ δὲ Γ κεῖται ἐπὶ ἀπολλωνίου περιφερείας γνωστῆς : $\Gamma A : \Gamma E = \Gamma B : \Gamma\Delta$).

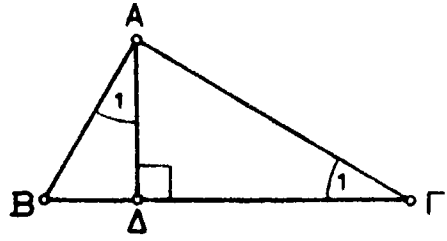
357. Ἐστῶσαν Δ καὶ Δ' οἱ πόδες τῶν διχοτόμων (ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς) τῆς γωνίας \widehat{A} τριγώνου $AB\Gamma$, E καὶ E' οἱ πόδες τῶν διχοτόμων τῆς \widehat{B} καὶ Z καὶ Z' οἱ πόδες τῶν διχοτόμων τῆς $\widehat{\Gamma}$. Νὰ δειχθῆ ὅτι οἱ κύκλοι μὲ διαμέτρους $\Delta\Delta'$, EE' , ZZ' ἔχουν κοινὴν χορδὴν.

358. Ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς Oy γωνίας xOy δίδονται δύο σημεία Δ καὶ A , ἵπου $O\Delta < OA$. Νὰ εὐρεθῆ ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς Ox , σημείον M τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς \widehat{OMA} νὰ διέρχεται διὰ τοῦ Δ .

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

69. α') **Θεώρημα τοῦ Εὐκλείδου** — Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκάστη κάθετος πλευρὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτείνουσας καὶ

της προβολής της επί την ύποτείνουσαν.



Σχ. 74

Ἐστω ΑΔ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ὕψος τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΒΑΓ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὁμοία ὡς ἔχοντα : $\widehat{ΒΔΑ} = \widehat{ΒΑΓ}$ (ὄρθαι) καὶ $\widehat{ΑΒΔ} = \widehat{ΓΒΑ}$ (κοινὴ) μὲ ὁμολόγους πλευρὰς :

ΑΒ (τοῦ τρ. ΑΒΔ) ὁμόλογος τῆς ΒΓ (τοῦ τρ. ΑΒΓ)
 ΒΔ (τοῦ τρ. ΑΒΔ) » » ΑΒ (τοῦ τρ. ΑΒΓ).

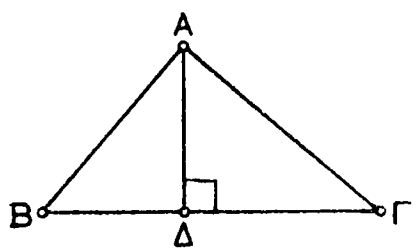
Ἐπομένως : $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΒΔ}{ΑΒ}$. Δηλ. $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$, ὅπου ΒΔ ἡ προβολὴ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

β') Πόρισμα 1ον. Τὸ τετράγωνον χορδῆς κύκλου ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον τὴν διερχομένην διὰ τοῦ ἐνὸς ἄκρου τῆς χορδῆς ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς χορδῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ταύτην.

γ') Πόρισμα 2ον. Τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχουν λόγον, ὃν λόγον ἔχουν αἱ προβολαὶ τῶν πλευρῶν τούτων ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

Διότι, εἰς τὸ σχ. 74 ἰσχύουν : $ΑΒ^2 = ΒΓ \times ΒΔ$ καὶ $ΑΓ^2 = ΒΓ \times ΓΔ$.
 Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη : $ΑΒ^2 / ΑΓ^2 = ΒΔ / ΓΔ$.

70. Πυθαγόρειον θεώρημα — Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας.



Σχ. 75

Διότι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Εὐκλείδου ἔχομεν (σχ. 75) :

$ΑΒ^2 = ΒΓ \times ΒΔ$ καὶ $ΑΓ^2 = ΒΓ \times ΔΓ$ καὶ ἐκ τούτων : $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot (ΒΔ + ΔΓ) = ΒΓ \cdot ΒΓ = ΒΓ^2$.

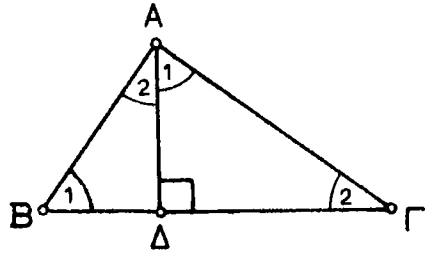
Ἦτοι : $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$.

Προφανῶς εἶναι : $ΑΒ^2 = ΒΓ^2 - ΑΓ^2$ καὶ $ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2$.
 Τὸ ἀντίστροφον τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος ἰσχύει :

«Αν εις τρίγωνον ΑΒΓ είναι $a^2 = \beta^2 + \gamma^2$, τότε $\hat{A} = 90^\circ$ ». Διότι, ἂν κατασκευάσωμεν τρ. Α'Β'Γ' ὀρθογώνιον εἰς Α' μὲ Α'Β' = γ, Α'Γ' = β, βλέπομεν ὅτι καὶ $a^2 = Β'Γ'^2 \Rightarrow$ τρ. ΑΒΓ = τρ. Α'Β'Γ' $\Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$. (Βλ. καὶ § 80).

Σημειώσεις. Εἰς τὰς διδασκαλίαις τοῦ Πυθαγόρα (580 - 501 πρὸ Χριστοῦ), αἱ ὁποῖαι εἰσήγαγον εἰς τὰ μαθηματικά ἅπαξ διὰ παντός τὸ λογικὸν στοιχεῖον, τὴν ἀπαιτήσιν τῆς ἀποδείξεως καὶ βασικὰς ἀρχάς, περιλαμβάνεται καὶ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, τὸ ὅποτον χρησιμοποιεῖται ἀπὸ τὸν ἄνθρωπον εἰς τὰς μαθηματικὰς καὶ τεχνικὰς ἐρεῦνας τοῦ διηκνῶς καὶ αἰωνίως. Τὸ ἴδιον ἰσχύει καὶ διὰ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ (Θαλῆς ὁ Μιλήσιος 640 - 548 πρὸ Χριστοῦ).

71. (Θ) — Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο τμημάτων, εἰς ἃ διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν.



Σχ. 76

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (σχ. 76) $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ καὶ $\hat{A}_2 = \hat{G}_2$ ἔπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὁμοία μὲ ὁμολόγους πλευράς :

ΑΔ (τοῦ τρ. ΑΒΔ) ὁμολόγος τῆς ΔΓ (τοῦ τρ. ΑΔΓ)
 ΒΔ (τοῦ τρ. ΑΒΔ) » » ΑΔ (τοῦ τρ. ΑΔΓ)

καὶ συνεπῶς : $\frac{ΑΔ}{ΔΓ} = \frac{ΒΔ}{ΑΔ} \Rightarrow ΑΔ^2 = ΒΔ \times ΔΓ$. ὁ.ἔ.δ.

72. (Θ) — Ἄν ΑΔ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ τότε ἰσχύει : $ΒΓ \cdot ΑΔ = ΑΒ \cdot ΑΓ$.

Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ (σχ. 74), ἐξ ὧν : $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΓ} \Rightarrow ΑΒ \times ΑΓ = ΒΓ \times ΑΔ$.

73. (Θ) — Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἀντίστροφον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψους ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν.

Ἐστώσαν β, γ αἱ κάθετοι πλευραί, α ἡ ὑποτείνουσα καὶ υ τὸ ἐπ' αὐτὴν ὕψος. Ἔχομεν, $αυ = βγ$ (§ 72) \Rightarrow

$$α^2 υ^2 = β^2 γ^2 \Rightarrow (β^2 + γ^2) υ^2 = β^2 γ^2 \text{ (Πυθαγόρειον θεώρημα)} \Rightarrow$$

$$\frac{β^2 + γ^2}{β^2 γ^2} = \frac{1}{υ^2} \Rightarrow \frac{1}{υ^2} = \frac{β^2}{β^2 γ^2} + \frac{γ^2}{β^2 γ^2} \Rightarrow \frac{1}{υ^2} = \frac{1}{β^2} + \frac{1}{γ^2}.$$

74. Σύνοψις τῶν ἀνωτέρω μετρικῶν σχέσεων.

Ἐστῶσαν β, γ αἱ κάθετοι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου, α ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ, β', γ' αἱ προβολαὶ τῶν β καὶ γ ἐπὶ τὴν α καὶ ν τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος. Μεταξὺ τῶν ἑξ τμημάτων

$$(1) \quad \alpha, \beta, \gamma, \beta', \gamma', \nu$$

ὑφίστανται αἱ ἀνωτέρω δειχθεῖσαι μετρικαὶ σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ἐπιτρέπουσι τὸν ὑπολογισμὸν τῶν τεσσάρων ἐκ τῶν τμημάτων (1), ὅταν δοθοῦν δύο ἐξ αὐτῶν. Αἱ σχέσεις αὗται συνοψίζονται ὡς κάτωθι :

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \alpha\beta', & \gamma^2 &= \alpha\gamma' \\ \frac{\beta^2}{\gamma^2} &= \frac{\beta'}{\gamma'} \\ \alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2, & \beta^2 &= \alpha^2 - \gamma^2, & \gamma^2 &= \alpha^2 - \beta^2 \\ \nu^2 &= \beta'\gamma' \\ \alpha\nu &= \beta\gamma \\ \frac{1}{\nu^2} &= \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εἰς τὰς ἐπομένους τέσσαρας ἀσκήσεις δίδονται δύο ἐκ τῶν 6 στοιχείων $\alpha, \beta, \gamma, \beta', \gamma', \nu$ ὀρθογωνίου τριγώνου (βλ. § 74) καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τέσσαρα.

$$359. \beta = 520, \gamma = 1248.$$

$$361. \alpha = 9, \gamma' = 4.$$

$$360. \beta = 5, \nu = 3.$$

$$362. \alpha = 5, \nu = 2,4.$$

363. Εἰς ἡμικύκλιον διαμέτρου $AB = 2R$ καὶ κέντρου O , αἱ εἰς A καὶ B ἐφαπτόμεναι συναντῶνται ὑπὸ τυχούσης τρίτης ἐφαπτομένης εἰς M καὶ M' .

i) Δείξατε ὅτι $\widehat{MOM'} = 1$ ὀρθή. ii) Ὑπολογίσατε τὸ γινόμενον $AM \cdot BM'$.

364. Ὑπολογίσατε τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου γνωρίζοντες τὰς καθέτους πλευράς, $\beta = 5, \gamma = 6$.

365. Δίδεται ὀρθή γωνία \widehat{XOY} καὶ κύκλος (O, R) εὐθεῖα τέμνει τὰς OX, OY εἰς A καὶ B ὅπως, ὥστε $OA = \alpha, OB = \beta$. Εὑρετε εἰς ποῖαν συνθήκην δέον νὰ ὑπόκεινται τὰ α, β, R , ἵνα ἡ εὐθεῖα τέμνη τὸν κύκλον.

366. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν δύο καθέτων ἀκτίνων κύκλου ἐπὶ τυχούσαν διάμετρον ἢ καὶ ἐπὶ τυχούσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου εἶναι σταθερόν.

367. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων σημείου περιφέρειας ἀπὸ τὰ ἄκρα χορδῆς παραλλήλου πρὸς τὴν διὰ τοῦ σημείου διερχομένην ἀκτίνα εἶναι σταθερόν.

368. Ἐάν δύο χορδαὶ κύκλου τέμνονται καθέτως εἰς τι σημεῖον O ἐντὸς τοῦ κύκλου κείμενον, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων τμημάτων, εἰς ἃ διαιροῦνται αἱ χορδαὶ ὑπὸ τοῦ σημείου τομῆς τῶν O ἴσονται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου.

369. Ἐάν διὰ σημείου O ἐκτὸς κύκλου κειμένου ἀχθοῦν δύο κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας

εὐθείαι τέμνουσαι την περιφέρειαν ἢ μία εἰς τὰ Α καὶ Β, ἢ δὲ ἄλλη εἰς τὰ Γ καὶ Δ, νὰ δεῖ-
χθῆ ὅτι τὸ ἄθροισμα :

$$OA^2 + OB^2 + OG^2 + OD^2 \text{ εἶναι σταθερόν.}$$

370. Ἐάν ἰσοσκελὲς τραπέζιον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν βάσεων.

371. Δοθείσης εὐθείας xy καὶ σημείου Α αὐτῆς, τίς ὁ γ.τ. σημείου Μ τοιοῦτου, ὥστε ἀν ἀχθῆ ἡ $MP \perp xy$, νὰ εἶναι $(MA)^2 = (AP)k$, ἔνθα k δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα;

372. Δοθείσης εὐθείας xy καὶ σημείου Α αὐτῆς, τίς ὁ γ.τ. σημείου Μ τοιοῦτου, ὥστε ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ΜΠ ἀπὸ τῆς xy καὶ ἡ ΜΑ νὰ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως : $(MA)^2 = (MP) \cdot k$, ὅπου k δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα;

373. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Οχ ὀρθῆς γωνίας \widehat{XOy} δίδεται σταθερόν σημεῖον Α. Μεταβλητὴ περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς Οχ εἰς Α καὶ τέμνει τὴν Ογ εἰς Β καὶ Γ.

i) Τόπος τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας.

ii) Ἐάν Β' τὸ συμμετρικόν τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν ευθΟΧ, ποῖον τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου Β'ΑΓ;

iii) Δείξτε ὅτι, μεταβαλλομένης τῆς περιφερείας, τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AG^2}$ μένει σταθερόν.

374. Ἐστω ΑΒΓ ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ $AB = AG$, Δ τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ Η τὸ ὀρθόκέντρον αὐτοῦ.

i) Δείξτε ὅτι $BD^2 = AD \times HD$.

ii) Θεωροῦμεν καὶ τὸ ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΟΓ μὲ $BO \perp OG$ καὶ ΒΟ

ΟΓ κείμενον πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος τοῦ ΑΒΓ, ὡς πρὸς τὴν ΒΓ. Ὑποτιθεμένου ὅτι τα Β καὶ Γ μένουσιν σταθερὰ καὶ ὅτι τὸ Α κινεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΟΑ, δείξτε ὅτι τὸ $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OH}$ μένει σταθερόν καὶ ἴσον πρὸς $\frac{1}{OA}$.

375. Δίδονται δύο παράλληλοι (ε) καὶ (η), ἐπὶ τῆς (η) σημείον Ο καὶ τρίτη εὐθεῖα (ι) διερχομένη διὰ τοῦ Ο. i) Δείξτε ὅτι ὑπάρχουν δύο κύκλοι ἔχοντες τὰ κέντρα των ἐπὶ τῆς (ε) καὶ ἐφαπτόμενοι, ἕκαστος, τῶν (ι) καὶ (η). ii) Ἐάν d ἡ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων καὶ P_1, P_2 τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν δύο τούτων κύκλων μετὰ τῆς (ι), δείξτε ὅτι : $OP_1 \times OP_2 = d^2$.

376. Ἐστω Ρ τυχόν σημεῖον εἰς τὸ ἑσωτερικόν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Νὰ δεῖχθῆ ὅτι

$$PA^2 + PG^2 = PB^2 + PD^2$$

377. Δύο κύκλοι ἀκτίων r_1 καὶ r_2 ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α. Ἐάν ἀχθῆ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν ΒΓ (Β, Γ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς), ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν r_1, r_2 :

i) Ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τὴν ΒΓ.

ii) Τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

75. α') Ἀντικατάστασις ἄθροισματος τετραγώνων ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου — i) Δοθέντων δύο τμημάτων α καὶ β νὰ κατασκευασθῆ τρίτον τμήμα x τοιοῦτον, ὥστε

$$x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Ἐπειδὴ τὰ τμήματα x , a , β πληροῦν τὴν μετρικὴν σχέσιν $x^2 = a^2 + \beta^2$, ἔπεται ὅτι τὸ x εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθετοὺς πλευρὰς a καὶ β .

ii) Δοθέντων ὁσωνδήποτε τμημάτων, π.χ. a , β , γ , δ , ε , νὰ κατασκευασθῆ τμήμα x τοιοῦτον, ὥστε

$$x = \sqrt{a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2}.$$

Λύσις. Ἡ κατασκευὴ τοῦ x δεικνύεται εἰς τὸ σχ. 77, ἐκ τοῦ ὁποίου : $x^2 = e^2 + OD^2 = e^2 + \delta^2 + OG^2 = e^2 + \delta^2 + \gamma^2 + OB^2 = e^2 + \delta^2 + \gamma^2 + \beta^2 + a^2$.

β') Ἀντικατάστασις ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος τετραγώνων ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου. iii) Νὰ κατασκευασθῆ τμήμα x τοιοῦτον, ὥστε

$$x = \sqrt{a^2 - \beta^2},$$

ὅπου a , β δεδομένα τμήματα καὶ $a > \beta$.

Ἐπειδὴ τὰ x , a , β πληροῦν τὴν μετρικὴν σχέσιν $x^2 = a^2 - \beta^2$, ἔπεται ὅτι τὸ x ἴσουςται πρὸς τὴν κάθετον πλευρὰν ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχοντος ὑποτείνουσαν a καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν τὴν β .

iv) Νὰ κατασκευασθῆ τμήμα x τοιοῦτον, ὥστε

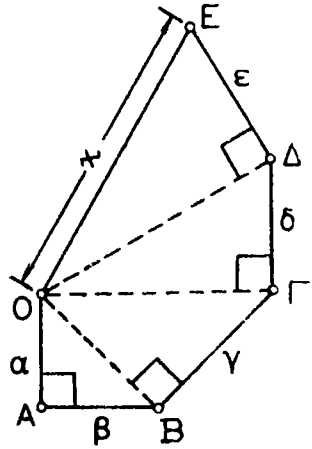
$$x = \sqrt{a^2 + \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2 - \varepsilon^2}.$$

Λύσις. Εὐρίσκομεν τμήμα K τοιοῦτον, ὥστε $K^2 = a^2 + \beta^2 + \delta^2$ (βλ. σχ. 77) καὶ τμήμα Λ τοιοῦτον, ὥστε $\Lambda^2 = \gamma^2 + \varepsilon^2$, ὁπότε $x = \sqrt{K^2 - \Lambda^2}$ καὶ ἐφ' ὅσον $K > \Lambda$, ἡ κατασκευὴ ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην.

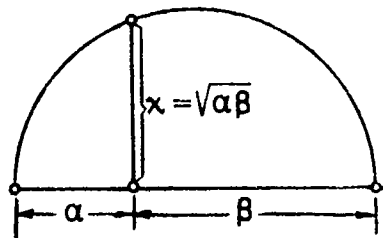
γ') Ἀντικατάστασις τοῦ γινομένου δύο τμημάτων ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου. ν) Νὰ κατασκευασθῆ τὸ μέσον ἀνάλογον δύο δεδομένων τμημάτων a καὶ β (§ 57, η'). Ἦτοι νὰ εὑρεθῆ τμήμα x τοιοῦτον, ὥστε

$$x = \sqrt{a\beta}.$$

Λύσις. Ἐπειδὴ $x = \sqrt{a\beta} \iff x^2 = a \cdot \beta$, διὰ τοῦτο, βάσει τοῦ θεωρήματος τῆς § 71, ὡς x δύναται νὰ χρησιμεύσῃ τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου, εἰς τὸ ὁποῖον a καὶ β εἶναι τὰ δύο τμήματα, εἰς ἃ διαίρεται ἡ ὑποτείνουσα ὑπὸ τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους. Ἐξ οὗ ἡ κατασκευὴ τοῦ σχ. 78.



Σχ. 77



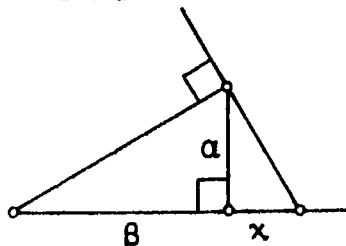
Σχ. 78

δ') Κατασκευή του a^2/β . vi) Νά κατασκευασθῆ τμήμα x τοιοῦτον, ὥστε

$$x = \frac{a^2}{\beta}, \text{ ὅπου } a, \beta, \text{ δεδομένα τμήματα.}$$

Λύσις. $x = \frac{a^2}{\beta} \iff a^2 = \beta \cdot x$. Ἐπο-

μένως, ἂν τὸ a εἶναι τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ β τὸ ἓν ἐκ τῶν τμημάτων, εἰς ἃ τὸ ὕψος διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν, τότε τὸ x θὰ εἶναι τὸ ἕτερον ἐκ τῶν δύο τμημάτων τῆς ὑποτείνουσας (σχ. 79).



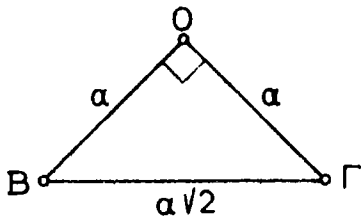
Σχ. 79

ε') Κατασκευή του $a\sqrt{2}$, ὅπου $v \in \Phi$. vii) Δοθέντος τμήματος a νά κατασκευασθῆ τμήμα x τοιοῦτον, ὥστε

$$x = a\sqrt{2}.$$

Λύσις. $x = a\sqrt{2} \iff x^2 = a^2 + a^2$.

Ὅθεν ὡς x δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς a, a (σχ. 80).



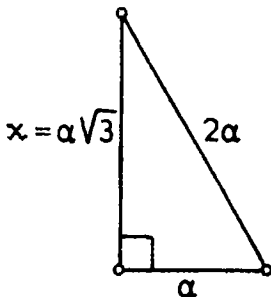
Σχ. 80

viii) Δοθέντος τοῦ τμήματος a , νά κατασκευασθῆ τμήμα x τοιοῦτον, ὥστε

$$x = a\sqrt{3}$$

Λύσις. $x = a\sqrt{3} \iff x^2 = 4a^2 - a^2 \iff x^2 = (2a)^2 - a^2$,

ὅθεν ἀναγόμεθα εἰς τὴν κατασκευὴν iii τοῦ ἑδαφίου β' (βλ. σχ. 81).



Σχ. 81

ix) Δοθέντος τοῦ τμήματος a νά κατασκευασθῆ τμήμα x τοιοῦτον, ὥστε

$$x = a\sqrt{5}.$$

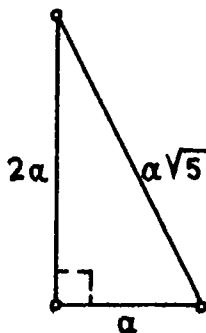
Λύσις. $x = a\sqrt{5} \iff x^2 = 4a^2 + a^2 \iff x = \sqrt{(2a)^2 + a^2}$.

Ἡ κατασκευὴ δεῖκνύεται εἰς τὸ (σχ.82).

x) Δοθέντος τοῦ τμήματος a νά κατασκευασθῆ τμήμα $x = a\sqrt{v}$, ὅπου v φυσικὸς ἀριθμὸς.

1η Λύσις. $x = a\sqrt{v} \iff x = \sqrt{va^2} \iff$

$$\iff x = \sqrt{\underbrace{a^2 + a^2 + a^2 + \dots + a^2}_v \text{ φορές}}.$$



Σχ. 82

Ἐπομένως ἀναγόμεθα εἰς τὴν κατασκευὴν (ii) τοῦ ἔδ. α' (σχ. 77) μὲ $a = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = \dots$

2α Λύσις. $x = a\sqrt{v} \iff x^2 = va^2 \iff x^2 = (va) \cdot a$. Ἦτοι τὸ x εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ a καὶ τοῦ v -πλασίου τοῦ a (ἔδ. γ').

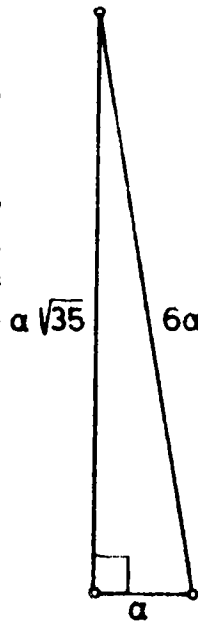
3η Λύσις. Ἀναλύομεν τὸ v εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τετραγώνων.

Ἐστω π.χ. πρὸς κατασκευὴν τὸ τμήμα $x = a\sqrt{35}$. Τότε $x^2 = 35a^2 = (6a)^2 - a^2 \iff x = \sqrt{(6a)^2 - a^2}$ καὶ τὸ x κατασκευάζεται ὡς κάθετος πλευρὰ μὲ ὑποτείνουσαν $6a$ καὶ κάθετον a (σχ. 83).

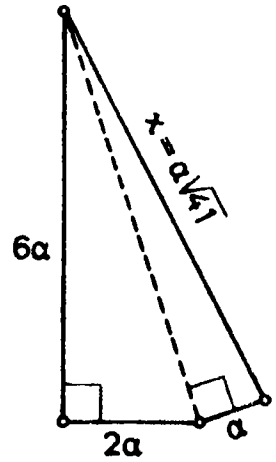
Ἐστω ἐπίσης $x = a\sqrt{41}$. Τότε

$$\begin{aligned} x^2 &= 41a^2 = \\ &= 36a^2 + 4a^2 + a^2 = \\ &= (6a)^2 + (2a)^2 + a^2 \end{aligned}$$

ὁπότε ἀναγόμεθα εἰς τὴν περίπτωση (ii) τοῦ ἔδ. α' (βλ. σχ. 84).



Σχ. 83



Σχ. 84

ς') Κατασκευὴ τοῦ $\frac{a}{\sqrt{v}}$ ὅπου $v \in \Phi$.

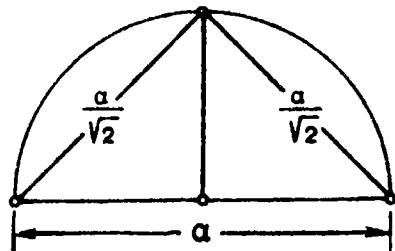
Ἐπειδὴ $x = \frac{a}{\sqrt{v}} \iff x = \frac{a\sqrt{v}}{v}$, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ

$a\sqrt{v}$ μὲ μίαν ἐκ τῶν προηγουμένων μεθόδων (κατασκευὴ x) καὶ κατόπιν νὰ τὸ διαιρέσωμεν εἰς v ἴσα μέρη. Εἰδικότερον :

ix) Δοθέντος τοῦ a νὰ κατασκευασθῇ τὸ $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Λύσις. } x = \frac{a}{\sqrt{2}} \iff x^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\iff a^2 = x^2 + x^2.$$



Σχ. 85

Ἐπομένως, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ἰσοσκελές τρίγωνον μὲ ὑποτείνουσαν a (σχ. 85).

ζ') Δοθέντων τῶν τμημάτων α, β, γ νὰ κατασκευασθῆ τμήμα x τοιοῦτον, ὥστε

$$x = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

Λύσις. Φέρομεν τὸ x εἰς τὴν θέσιν τοῦ τετάρτου ἀναλόγου :

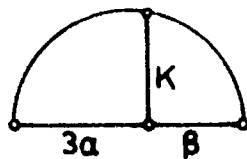
$$x = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \iff \frac{x}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma} \iff \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\boxed{x}}$$

Τώρα τὸ x κατασκευάζεται ὡς τέταρτον ἀνάλογον (§ 50).

76. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. -- Νὰ κατασκευασθῆ τμήμα x τοιοῦτον ὥστε

$$x = \frac{\alpha^2 + 3\beta^2}{\sqrt{3\alpha\beta + \frac{\gamma^2}{2}}}$$

ὅπου α, β, γ δεδομένα τμήματα.

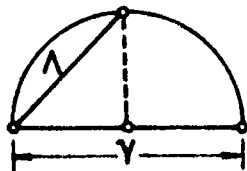


Σχ. 86

Λύσις : Ἀντικαθιστῶμεν τὸ 3αβ ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου : $K^2 = 3\alpha\beta = (3\alpha) \cdot \beta$ (σχ. 86)

καὶ τὸ $\frac{\gamma^2}{2}$ ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου : $\Lambda^2 =$

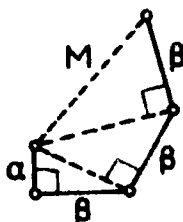
$$\frac{\gamma^2}{2} \iff \Lambda^2 = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \quad (\text{σχ. 87}).$$



Σχ. 87

Ἐπίσης τὸ $\alpha^2 + 3\beta^2$ ὑπὸ ἑνὸς τετραγώνου : $M^2 = \alpha^2 + 3\beta^2$ (σχ. 88), ὁπότε, $x =$

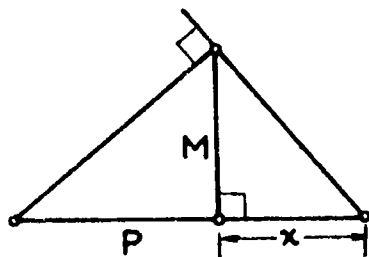
$\frac{M^2}{\sqrt{K^2 + \Lambda^2}}$ Τέλος κατασκευάζομεν τμήμα P -- $\sqrt{K^2 + \Lambda^2}$ (σχ. 90), ὁπότε $x = \frac{M^2}{P}$ καὶ ἀναγόμεθα εἰς γνωστὴν κατασκευὴν : $M^2 = P \cdot x$ (σχ. 90) βασιζομένην εἰς τὸ ἐδ. δ'.



Σχ. 88



Σχ. 89



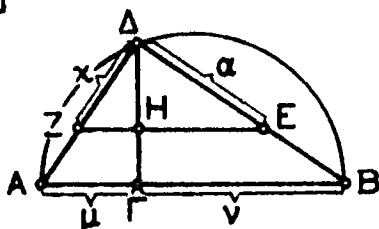
Σχ. 90

77. Πρόβλημα. Νὰ κατασκευασθῆ τμήμα, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ ἔχη λόγον πρὸς δοθὲν τετράγωνον, ὃν λόγον ἔχουν δύο δοθέντα τμήματα.

Ἦτοι ζητεῖται τμήμα x τοιοῦτον, ὥστε :

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{\mu}{\nu} \quad (\alpha, \mu, \nu, \text{δοθέντα τμήματα})$$

Λύσις. Ἐπ' εὐθείας λαμβάνομεν δύο διαδοχικὰ τμήματα $ΑΓ = \mu$, $ΓΒ = \nu$ καὶ μὲ διάμετρον τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\mu + \nu = ΑΒ$ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν (σχ. 91). Εἰς τὸ $Γ$ ὑψοῦμεν $\perp ΑΒ$ τέμνουσαν εἰς Δ τὴν ἡμιπεριφέρειαν καὶ φέρομεν τὰς $\Delta Β$ καὶ $\Delta Α$.



Σχ. 91

Ἐπὶ τῆς $\Delta Β$ λαμβάνομεν τμήμα $\Delta Ε = \alpha$ καὶ ἐκ τοῦ E φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν $ΒΑ$, τέμνουσαν εἰς Z τὴν $ΑΔ$. Τὸ ζητούμενον τμήμα x εἶναι τὸ ΔZ . Διότι ἐκ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου $Z\Delta E$ ἔχομεν :

$$\frac{\Delta Z^2}{\Delta E^2} = \frac{ZH}{HE} \quad \eta \quad \frac{x^2}{a^2} = \frac{ZH}{HE} \quad (\S 69, \gamma')$$

Ἀπὸ τὸ θεώρημα τῆς δέσμης ἔχομεν :

$$\frac{ZH}{HE} = \frac{AG}{GB} \Rightarrow \frac{ZH}{HE} = \frac{\mu}{\nu}. \quad \text{Ἐπομένως : } \frac{x^2}{a^2} = \frac{\mu}{\nu}.$$

78. Ἀλγεβρική μέθοδος ἐκτελέσεως Γεωμετρικῶν κατασκευῶν. Ἐνίοτε, ὅταν ἡ λύσις ἑνὸς προβλήματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν εὕρεσιν ἑνὸς τμήματος, λαμβάνομεν ὡς ἄγνωστον τοῦ προβλήματος τὸ μέτρον x τοῦ ἄγνωστου τμήματος καὶ ὑπολογίζομεν τὸ x βάσει μετρικῶν σχέσεων ἀπορροουσῶν ἀπὸ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος. Δυνατὸν νὰ εὕρωμεν ὡς τιμὴν τοῦ x μίαν ἀλγεβρικήν παράστασιν ἐξαρτωμένην ἀπὸ γνωστὰ τμήματα καὶ δυναμένην νὰ κατασκευασθῇ γεωμετρικῶς βάσει τῆς § 75 (βλ. παράδειγμα τῆς § 76).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ἐάν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ δεδομένα τμήματα, νὰ κατασκευασθοῦν τμήματα x , ὧν τὰ μέτρα συνδέονται μὲ τὰ μέτρα τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ διὰ τῶν σχέσεων :

$$378. x = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha^2}.$$

$$379. x = \sqrt{3\alpha^2 + 3\beta^2 - \gamma^2}.$$

$$380. x = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta}}.$$

$$381. \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}}.$$

$$382. x = \alpha + \sqrt{\alpha\beta - \gamma\delta}.$$

$$383. x = \sqrt{\alpha^2 + \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}.$$

$$384. x = \sqrt{\alpha^2 + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}.$$

$$385. x = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

$$386. x = \alpha\sqrt{2 + \sqrt{5}}.$$

$$387. x = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \sqrt{5}}}.$$

388. Δίδεται κύκλος (K, R) και η εφαπτομένη του εις τὸ A. Νά εὑρεθῇ σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς εφαπτομένης τοιοῦτον, ὥστε ἂν ἀχθῆ τὸ τμήμα ΚΔ τέμνον εις Ε τὴν περιφέρειαν. νά εἶναι $\Delta E = \frac{A\Delta}{2}$.

(Ὑπόδ. Ἐὰς ληφθῆ ὡς ἄγνωστος x, τὸ μέτρον τοῦ τμήματος ΑΔ).

389. Ἐπὶ ἡμιπεριφέρειᾶς διαμέτρου ΑΒ νά εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε $MA \cdot MB = c^2$, ὅπου c δοθὲν τμήμα.

390. Ἐστω τρίγωνον ΟΑΒ, ὀρθογώνιον εις τὸ Ο, ἔχον $\widehat{B} = 30^\circ$ καὶ ΟΑ = a. Νά κατασκευασθῇ σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΟΒ τοιοῦτον, ὥστε :

$$MB + 2MA = a(2 + \sqrt{3}).$$

(Ὑπόδ. Νά ληφθῆ ὡς ἄγνωστος τὸ (ΟΜ) = x).

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

79. Ἐπεκτεταμένον Πυθαγόρειον θεώρημα.— Ἐστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ προβολὴ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἐπὶ τὸν φορέα τῆς ΑΓ. Τότε :

i) Ἐὰν $A < 90^\circ \Rightarrow B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot A\Delta$ (σχ. 92).

ii) Ἐὰν $A > 90^\circ \Rightarrow B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta$ (σχ. 93).

Ἀπόδειξις. i) Ἐὰν $A < 90^\circ$, τότε τὰ Δ καὶ Γ κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Α (δηλ. ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΑΧ) καὶ συνεπῶς εἶναι πάντοτε :

$$\Gamma\Delta = |A\Gamma - A\Delta|.$$

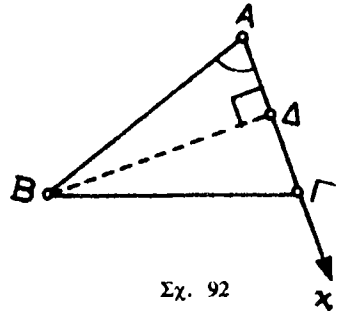
Τετραγωνίζοντες καὶ προσθέτοντες εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη τὸ ΔB^2 λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned} \Gamma\Delta^2 + B\Delta^2 &= \\ &= A\Gamma^2 + A\Delta^2 - 2A\Gamma \cdot A\Delta + B\Delta^2 \end{aligned}$$

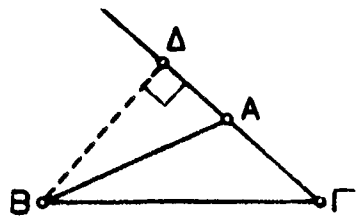
καὶ ἐπειδὴ $\Gamma\Delta^2 + B\Delta^2 = B\Gamma^2$ καὶ $A\Delta^2 + B\Delta^2 = AB^2$ (Πυθαγ. θεώρ.), λαμβάνομεν :

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot A\Delta.$$

ii) Ἐὰν $A > 90^\circ$, τὰ Δ καὶ Γ κείνται ἑκατέρωθεν τοῦ Α καὶ



Σχ. 92



Σχ. 93

$$\begin{aligned} \Gamma\Delta &= A\Gamma + A\Delta, \text{ ὁπότε } \Gamma\Delta^2 = A\Gamma^2 + A\Delta^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta \Rightarrow \Gamma\Delta^2 + B\Delta^2 = \\ &= A\Gamma^2 + A\Delta^2 + B\Delta^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta, \text{ δηλ. : } B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta. \end{aligned}$$

Πόρισμα. Εἰς τρ. ΑΒΓ :

$$\begin{aligned} A < 90^\circ &\Rightarrow B\Gamma^2 < AB^2 + A\Gamma^2 \\ A > 90^\circ &\Rightarrow B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2. \end{aligned}$$

80. Κριτήριον περί τοῦ ἄν γωνία τις τριγώνου εἶναι ὀξεῖα, ὀρθή ἢ ἀμβλεῖα.

(Θ) — Εἰς τὰ τρίγωνα ἰσχύουν αἱ λογικαὶ ἰσοδυναμίαι :

$$A < 90^\circ \Leftrightarrow B\Gamma^2 < AB^2 + A\Gamma^2$$

$$A = 90^\circ \Leftrightarrow B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$$

$$A > 90^\circ \Leftrightarrow B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2.$$

Ἀποδείξεις. Ἐκ τοῦ προηγουμένου πορίσματος καὶ ἐκ τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος ἰσχύουν προφανῶς αἱ συνεπαγωγαί :

$$A < 90^\circ \Rightarrow B\Gamma^2 < AB^2 + A\Gamma^2, \quad A = 90^\circ \Rightarrow B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2,$$

$$A > 90^\circ \Rightarrow B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2.$$

Ἐπειδὴ αἱ περιπτώσεις εἶναι ἐξαντλητικαί, ἰσχύουν καὶ τὰ ἀντίστροφα.

(Ἀσκήσεις : 391, 392, 373, 397, 427, 428).

81. Ἀλγεβρική διατύπωσις τοῦ ἐπεκτεταμένου Πυθαγορείου θεωρήματος. (Θ) — Ἐστω τυχόν τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ $A\Delta$ ἡ προβολὴ τῆς πλευρᾶς AB ἐπὶ τὸν φορέα τῆς $A\Gamma$. Τότε ἰσχύει πάντοτε :

$$(1) \quad B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2\overline{A\Gamma} \cdot \overline{A\Delta}$$

ὅπου $\overline{A\Gamma}$, $\overline{A\Delta}$ αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τῶν διανυσμάτων $\vec{A\Gamma}$, $\vec{A\Delta}$.

Ἀποδείξεις. Νοοῦμεν τὴν πλευρὰν $A\Gamma$ κειμένην ἐπὶ τινος ἄξονος, ὅποτε τὰ διανύσματα $\vec{A\Gamma}$ καὶ $\vec{A\Delta}$ ἔχουν ἀλγεβρικός τιμὰς ἔστω τὰς $\overline{A\Gamma}$, $\overline{A\Delta}$.

Ἐὰν ἡ \widehat{A} εἶναι ὀξεῖα (σχ. 92), τότε τὰ $\vec{A\Delta}$, $\vec{A\Gamma}$ εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἔχουν ἀλγεβρικός τιμὰς ὁμοσήμους, ἐπομένως τὸ γινόμενον $\overline{A\Gamma} \cdot \overline{A\Delta}$ εἶναι θετικὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν, $A\Gamma \cdot A\Delta$. Ἐπομένως ἡ σχέσις $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot A\Delta$ (§ 79) καθίσταται $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2\overline{A\Gamma} \cdot \overline{A\Delta}$.

Ἐὰν ἡ \widehat{A} εἶναι ἀμβλεῖα (σχ. 93), τότε τὰ $\vec{A\Delta}$ καὶ $\vec{A\Gamma}$ εἶναι ἀντίρροπα καὶ ἔχουν ἀλγεβρικός τιμὰς ἑτεροσήμους. Ἐπομένως τὸ γινόμενον $\overline{A\Gamma} \cdot \overline{A\Delta}$ εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἴσον πρὸς $-A\Gamma \cdot A\Delta$, δηλαδὴ $A\Gamma \cdot A\Delta = -\overline{A\Gamma} \cdot \overline{A\Delta}$. Ἡ σχέσις λοιπὸν $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta$ καθίσταται, $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2\overline{A\Gamma} \cdot \overline{A\Delta}$.

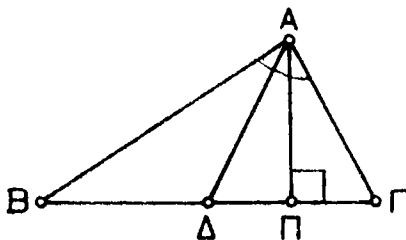
Ἐάν $\widehat{A} = 90^\circ$, τότε $\overline{A\Delta} = 0$ καὶ συνεπῶς πάλιν ἡ (1) ἰσχύει. Ὄστε ἡ μετρικὴ σχέσις (1) ἰσχύει εἰς πᾶσαν περίπτωσιν.

82. Πρῶτον θεώρημα τῆς διαμέσου. (Μετασχηματισμὸς τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου).

(Θ) — Ἐάν $A\Delta$ μία διάμεσος τοῦ τρ. $AB\Gamma$, τότε ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσις :

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2A\Delta^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}.$$

Ἀπόδειξις: Ἐστω $\Delta\Pi$ ἡ προβολὴ τῆς διαμέσου $A\Delta$ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $B\Gamma$. Τότε τὸ ἐπεκτεταμένον πυθαγόρειον θεώρημα (§ 81) ἐφαρμοζόμενον εἰς τὰ τρίγωνα $AB\Delta$ καὶ $A\Delta\Gamma$ δίδει :



Σχ. 94

$$(1) \quad \begin{cases} AB^2 = \Delta A^2 + \Delta B^2 - 2\overline{\Delta B} \cdot \overline{\Delta\Pi} \\ A\Gamma^2 = \Delta A^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\overline{\Delta\Gamma} \cdot \overline{\Delta\Pi} \end{cases}$$

Ἐπειδὴ $\overline{\Delta B} = -\overline{\Delta\Gamma}$, λαμβάνομεν προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς (1) :

$$(2) \quad AB^2 + A\Gamma^2 = 2A\Delta^2 + 2B\Delta^2 \quad \text{ἢ καὶ}$$

$$(3) \quad AB^2 + A\Gamma^2 = 2A\Delta^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}.$$

Αἱ σχέσεις (2) καὶ (3) ἰσχύουν καὶ ὅταν τὸ A κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθ. $B\Gamma$.

(Ἀσκήσεις: 394, 395, 403, 404).

83. Δεύτερον θεώρημα τῆς διαμέσου. (Μετασχηματισμὸς τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου). (Θ) — Ἐάν Δ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ $\Delta\Pi$ ἡ προβολὴ τῆς διαμέσου $A\Delta$ ἐπὶ τὴν εὐθ. $B\Gamma$, τότε ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσις :

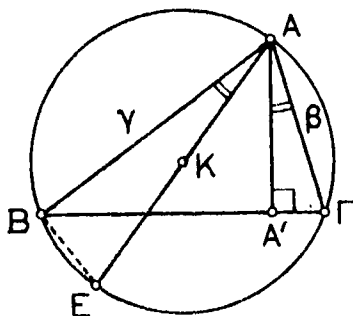
$$(1) \quad AB^2 - A\Gamma^2 = 2\overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Delta\Pi}.$$

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) τῆς προηγουμένης § 82 (δπου, $-2\overline{\Delta B} = -\overline{B\Gamma}$ καὶ $2\overline{\Delta\Gamma} = \overline{B\Gamma}$).

Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι ἡ σχέσις (1) ἰσχύει καὶ ὅταν τὸ A κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθ. AB (συμπίπτει μὲ τὸ Π).

(Ἀσκήσεις: 402, 416).

84. Μετασχηματισμὸς τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν τριγώνου. (Θ)—Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἐπὶ τὸ ὕψος τὸ ἀγόμενον εἰς τὴν τρίτην πλευράν.



Σχ. 95

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ΑΕ διάμετρος τοῦ περικύκλου τοῦ τρ. ΑΒΓ καὶ ΑΑ' τὸ ὕψος, γνωρίζομεν ὅτι, εἰς πᾶσαν περίπτωσιν, $\widehat{ΑΒ} = \widehat{Α'ΑΓ}$ καὶ συνεπῶς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ καὶ Α'ΑΓ εἶναι ὁμοία. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων ἔπεται :

$$\frac{ΑΒ}{ΑΑ'} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} \text{ ἢ } \frac{\gamma}{\upsilon_{\alpha}} = \frac{2R}{\beta} \text{ καὶ τελικῶς,}$$

$$\beta\gamma = 2R\upsilon_{\alpha}$$

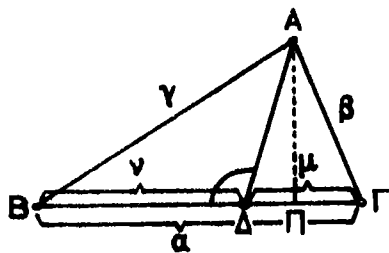
(Ἀσκήσεις : 409, 410, 411, 412, 413, 426).

85. Σχέσις τοῦ Stewart — (Ἀπλή μορφή) α') (Θ) — Δοθέντος τρ. ΑΒΓ καὶ σημείου Δ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ (δηλ. Δ μεταξὺ Β καὶ Γ), ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσηις :

$$(1) \quad ΑΒ^2 \cdot ΔΓ + ΑΓ^2 \cdot ΒΔ = ΒΓ(ΑΔ^2 + ΔΓ \cdot ΒΔ).$$

Ἀπόδειξις. Τὸ ΑΔ χωρίζει τὸ τρ. ΑΒΓ εἰς δύο τρίγωνα, τρ. ΑΔΒ καὶ τρ. ΑΔΓ, ἐξ ὧν τὸ ἓν εἶναι (ἐν γένει) ἀμβλυγώνιον εἰς Δ, τὸ δὲ ἄλλο ὀξυγώνιον. Ἄν ΔΠ ἡ προβολὴ τοῦ ΑΔ ἐπὶ τὴν ευθ ΒΓ (σχ. 96), τὸ ἐπεκτεταμένον πυθαγόρειον θεώρημα ἐφαρμοζόμενον εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ (§ 79) δίδει :

$$\begin{array}{l|l} ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2 + 2ΒΔ \cdot ΔΠ & ΔΓ \\ ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 - 2ΔΓ \cdot ΔΠ & ΒΔ \end{array}$$



Σχ. 96

Πολύντες τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ ΔΓ καὶ τῆς δευτέρας ἐπὶ ΒΔ καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη, ἐξαλείφομεν τὸ ΔΠ :

$$\begin{aligned} ΑΒ^2 \cdot ΔΓ + ΑΓ^2 \cdot ΒΔ &= ΑΔ^2(ΔΓ + ΒΔ) + ΒΔ^2 \cdot ΔΓ + ΔΓ^2 \cdot ΒΔ = \\ &= ΑΔ^2 \cdot ΒΓ + ΒΔ \cdot ΔΓ \cdot (ΒΔ + ΔΓ) = ΑΔ^2 \cdot ΒΓ + ΒΔ \cdot ΔΓ \cdot ΒΓ = \\ &= ΒΓ(ΑΔ^2 + ΒΔ \cdot ΔΓ) \text{ καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὴν ἀποδεικτέαν σχέσιν (1).} \end{aligned}$$

β') Μετασχηματισμός του $\mu \cdot AB^2 + \nu AI^2$, όπου μ, ν , δοθέντα τμήματα ή δοθέντες φυσικοί αριθμοί. Διά της σχέσεως Stewart δυνάμεθα να δίδωμεν άλλην μορφήν εις τὸ ἄθροισμα $\mu \cdot AB^2 + \nu \cdot AI^2$, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἐξυπηρετεῖ εις διάφορα ζητήματα, εις τὰ ὅποια ἐμφανίζεται ἄθροισμα τοιαύτης μορφῆς. Πρὸς μετατροπὴν τοῦ $\mu \cdot AB^2 + \nu AI^2$, ὀρίζομεν ἐπὶ τοῦ τμήματος ΒΓ, σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε :

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \frac{\mu}{\nu} \quad (\text{σχ. } 96)$$

ὁπότε $\frac{\Gamma\Delta}{\mu} = \frac{\Delta B}{\nu} = \frac{\Delta\Gamma + \Delta B}{\mu + \nu} = \frac{B\Gamma}{\mu + \nu} \Rightarrow$

$\Delta\Gamma = \mu \cdot \frac{B\Gamma}{\mu + \nu}$, $\Delta B = \nu \cdot \frac{B\Gamma}{\mu + \nu}$ καὶ ἡ σχέσις (1) γίνεται :

$$AB^2 \cdot \mu \cdot \frac{B\Gamma}{\mu + \nu} + AI^2 \cdot \nu \cdot \frac{B\Gamma}{\mu + \nu} = B\Gamma \left\{ A\Delta^2 + \mu\nu \cdot \frac{B\Gamma^2}{(\mu + \nu)^2} \right\} \quad \eta$$

$$(2) \quad \mu \cdot AB^2 + \nu \cdot AI^2 = (\mu + \nu)A\Delta^2 + \frac{\mu\nu}{\mu + \nu} \cdot B\Gamma^2$$

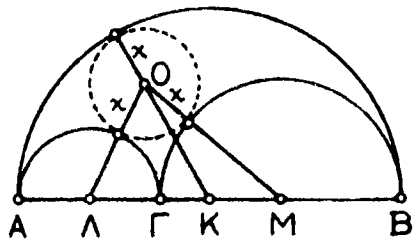
, ὅπου $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \frac{\mu}{\nu}$.

γ') Ἡ σχέσις τοῦ Stewart ὑπὸ τὴν μορφήν (1) συνδέει τὰ 6 τμήματα β, γ, α, μ, ν, ΑΔ (σχ. 96) ($\gamma^2\mu + \beta^2\nu = \alpha(A\Delta^2 + \mu\nu)$) καὶ χρησιμοποιεῖται πρὸς ὑπολογισμὸν ἑνὸς τῶν ΑΔ ἢ β ἢ γ, ὅταν δίδωνται τὰ ἄλλα ἢ καὶ δι' ἄλλους σχετικὸς ὑπολογισμοὺς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ υπολογισθῇ ἡ ἀκτίς x τοῦ κύκλου O τοῦ ἐφαπτομένου τῶν τριῶν ἡμικυκλίων μὲ διαμέτρους ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ (σχ. 97), ὅπου Α, Γ, Β ἐκ' εὐθείας, ΑΓ=α, ΓΒ=2α, ΑΒ=3α.

Λύσις. Αἱ ἀκτίνες τῶν τριῶν ἡμικυκλίων εἶναι ΑΛ=α/2, ΜΒ=α, ΚΒ=3α/2. Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΛΜ ἔχομεν :

$OL = \frac{\alpha}{2} + x$ (οἱ κύκλοι (O) καὶ (Λ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς).



Σχ. 97

OM = α + x (οἱ κύκλοι (O) καὶ (M) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς).

OK = $\frac{3\alpha}{2} - x$ (οἱ κύκλοι (O) καὶ (K) ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς).

AK = KA - LA = $\frac{3\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \alpha$

KM = KB - MB = $\frac{3\alpha}{2} - \alpha = \frac{\alpha}{2}$ καὶ LM = $\frac{3\alpha}{2}$.

Ἡ σχέσις τοῦ Stewart εἰς τὸ τρί. ΟΛΜ :

$$ΟΛ^2 \cdot ΚΜ + ΟΜ^2 \cdot ΛΚ = ΛΜ(ΟΚ^2 + ΛΚ \cdot ΚΜ)$$

καθίσταται :

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 \cdot \frac{a}{2} + (a+x)^2 a - \frac{3a}{2} \left(\left(\frac{3a}{2} - x\right)^2 + a \cdot \frac{a}{2} \right) \iff 7x - 3a$$

$$\text{καὶ } x = \frac{3a}{7} = \frac{ΑΒ}{7}.$$

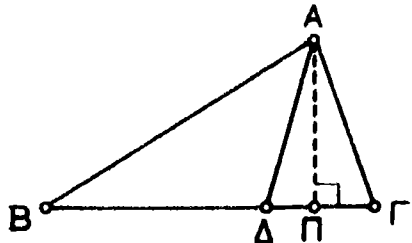
(Ἀσκήσεις : 405, 406, 407, 408, 421, 430).

86. Γενικευμένη σχέσις τοῦ Stewart. (Θ) — Ἐάν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ τῆς φερούσης τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ ληθῆ τυχόν σημεῖον Δ, τότε ἰσχύει ἡ μετρικὴ σχέσηις :

$$(1) \quad ΑΒ^2 \cdot \overline{ΔΓ} + ΑΔ^2 \cdot \overline{ΓΒ} + ΑΓ^2 \cdot \overline{ΒΔ} + \overline{ΔΓ} \cdot \overline{ΓΒ} \cdot \overline{ΒΔ} = 0.$$

Ἀπόδειξις. Ἐάν ΔΠ ἡ προβολὴ τοῦ ΑΔ ἐπὶ τὴν εὐθ ΒΓ (σχ. 98), τὸ ἐπεκτεταμένον πυθαγόρειον θεώρημα, ἐφαρμοζόμενον εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ δίδει :

$$\begin{aligned} ΑΒ^2 &= ΑΔ^2 + ΔΒ^2 - 2\overline{ΔΒ} \cdot \overline{ΔΠ} \parallel \overline{ΔΓ} \\ ΑΓ^2 &= ΑΔ^2 + ΔΓ^2 - 2\overline{ΔΓ} \cdot \overline{ΔΠ} \parallel \overline{ΒΔ} \end{aligned}$$



Σχ. 98

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ $\overline{ΔΓ}$, τῆς δευτέρας ἐπὶ $\overline{ΒΔ}$ καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη, ἐξαλείφωμεν τὸ $\overline{ΔΠ}$:

$$ΑΒ^2 \cdot \overline{ΔΓ} + ΑΓ^2 \cdot \overline{ΒΔ} = ΑΔ^2(\overline{ΔΓ} + \overline{ΒΔ}) + ΔΒ^2 \cdot \overline{ΔΓ} + ΔΓ^2 \cdot \overline{ΒΔ}.$$

Ἐπειδὴ $\overline{ΔΓ} + \overline{ΒΔ} = \overline{ΒΔ} + \overline{ΔΓ} = \overline{ΒΓ} = -\overline{ΓΒ}$ (θεώρ. Chasles), ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται :

$$\begin{aligned} ΑΒ^2 \cdot \overline{ΔΓ} + ΑΓ^2 \cdot \overline{ΒΔ} + ΑΔ^2 \cdot \overline{ΓΒ} &= \overline{ΔΒ} \cdot \overline{ΔΒ} \cdot \overline{ΔΓ} + \overline{ΔΓ} \cdot \overline{ΔΓ} \cdot \overline{ΒΔ} \\ &= \overline{ΔΒ} \cdot \overline{ΔΒ} \cdot \overline{ΔΓ} - \overline{ΔΓ} \cdot \overline{ΔΓ} \cdot \overline{ΔΒ} = \overline{ΔΒ} \cdot \overline{ΔΓ} (\overline{ΔΒ} - \overline{ΔΓ}) \\ &= \overline{ΔΒ} \cdot \overline{ΔΓ} (\overline{ΓΔ} + \overline{ΔΒ}) = \overline{ΔΒ} \cdot \overline{ΔΓ} \cdot \overline{ΓΒ} = -\overline{ΒΔ} \cdot \overline{ΔΓ} \cdot \overline{ΓΒ} \end{aligned} \quad \text{ὁπότε :}$$

$$ΑΒ^2 \cdot \overline{ΔΓ} + ΑΔ^2 \cdot \overline{ΓΒ} + ΑΓ^2 \cdot \overline{ΒΔ} + \overline{ΔΓ} \cdot \overline{ΓΒ} \cdot \overline{ΒΔ} = 0.$$

Παρατηρήσις. 1η. Ἡ σχέσις τοῦ Stewart γράφεται :

$$(2) \quad ΑΒ^2 \cdot \overline{ΔΓ} + ΑΓ^2 \cdot \overline{ΒΔ} = \overline{ΒΓ} (ΑΔ^2 + \overline{ΔΓ} \cdot \overline{ΒΔ})$$

Κατὰ τὰς θέσεις δὲ τοῦ Δ δύναται νὰ ἀπαλλαγῇ τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν. Ἐν π.χ. τὸ Δ κείται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΓΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β, ὀρισθῆ δὲ θετικὴ φορά ἢ ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Γ, ἢ (2) καθίσταται :

$$ΑΒ^2 \cdot ΔΓ - ΑΓ^2 \cdot ΒΔ = ΒΓ(ΑΔ^2 - ΔΓ \cdot ΒΔ)$$

2α. Ἡ σχέσις (1) ἰσχύει καὶ διὰ τέσσαρα τυχόντα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, κείμενα ἐπ' εὐθείας.

3η. Συμμετρική γραφή της σχέσεως : 'Εάν Α, Β, Γ τρία τυχόντα σημεία ἐπ' εὐθείας και Ρ τυχόν σημείον τοῦ ἐπιπέδου, τότε ἰσχύει :

$$PA^2 \cdot \overline{B\Gamma} = PB^2 \cdot \overline{\Gamma A} + PG^2 \cdot \overline{AB} + \overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Gamma A} \cdot \overline{AB} \cdot 0$$

87. Μήκος τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου. α') (Θ) Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ (βλ. σχ. 58) πληροῖ τὴν μετρικὴν σχέσιν :

$$A\Delta^2 = AB \cdot A\Gamma - \Delta B \cdot \Delta\Gamma$$

Ἀπόδειξις. Ἡ σχέσηις Stewart δίδει εἰς τὸ τρ. ΑΒΓ :

$$(1) \quad AB^2 \cdot \Delta\Gamma + A\Gamma^2 \cdot B\Delta = B\Gamma(A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma).$$

Ἐπειδὴ ὁμως : $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}$ (ὡς ἐδειχθη) $\Rightarrow AB \cdot \Delta\Gamma = A\Gamma \cdot \Delta B$ καὶ ἡ

(1) δύναται νὰ γραφῆ :

$$AB \cdot A\Gamma \cdot \Delta B + A\Gamma \cdot AB \cdot \Delta\Gamma = B\Gamma \cdot (A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma)$$

ἢ
$$AB \cdot A\Gamma(\Delta B + \Delta\Gamma) = B\Gamma(A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma)$$

ἢ ἐπειδὴ $\Delta B + \Delta\Gamma = B\Gamma \Rightarrow AB \cdot A\Gamma = A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma \Rightarrow A\Delta^2 = AB \cdot A\Gamma - B\Delta \cdot \Delta\Gamma.$

(Ἄλλην ἀπόδειξιν βλέπε εἰς τὰς μετρικὰς σχέσεις ἐν κύκλῳ).

β') Μήκος τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν. Ἐν ΑΔ—δ_Α, ἡ δεχθεῖσα σχέσις : $\Delta A^2 = \beta\gamma - \Delta B \cdot \Delta\Gamma$ γράφεται, ἀντικαθιστωμένων τῶν ΔΒ, ΔΓ ὑπὸ τῶν εἰς τὴν § 58 β' εὑρεθεισῶν τιμῶν τῶν :

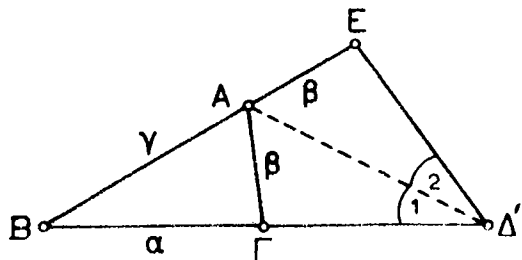
$$\delta_A^2 = \beta\gamma \cdot \frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta + \gamma)^2} \quad \eta$$

$$\delta_A^2 = \beta\gamma \left\{ 1 - \frac{\alpha^2}{(\beta + \gamma)^2} \right\}. \quad \text{Ὁμοίως, } \delta_B^2 = \gamma\alpha \left\{ 1 - \frac{\beta^2}{(\gamma + \alpha)^2} \right\}, \quad \delta_{\Gamma}^2 = \alpha\beta \left\{ 1 - \frac{\gamma^2}{(\alpha + \beta)^2} \right\}.$$

88. Μήκος τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου. α') (Θ) Ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ' τριγώνου ΑΒΓ (βλ. σχ. 99) πληροῖ τὴν μετρικὴν σχέσιν :

$$A\Delta'^2 = A'B \cdot \Delta'\Gamma - AB \cdot A\Gamma.$$

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΑΒ (σχ. 99) ἄς λάβωμεν τμῆμα ΑΕ = ΑΓ. Τότε τρ. ΑΕΔ' = τρ. ΑΓΔ', συνεπῶς $\widehat{\Delta'_1} = \widehat{\Delta'_2}$ καὶ ἡ Δ'Α καθίσταται ἐσωτερικὴ διχοτόμος τοῦ τρ. ΒΔ'Ε. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα περὶ ἐσωτερικῆς διχοτόμου θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 99

$$\Delta'A^2 = \Delta'B \cdot \Delta'E - AB \cdot AE \quad (\S 87) \quad \text{ήτοι} \quad \Delta\Delta'^2 = \Delta'B \cdot \Delta'\Gamma - AB \cdot A\Gamma.$$

β') Μήκος της εξωτερικής διχοτόμου συναρτήσει των πλευρών. Ἐν τεθῆ $\Delta\Delta' = \delta'A$, ἢ δειχθεῖσα σχέσις $\Delta'A^2 = \Delta'B \cdot \Delta'\Gamma - AB \cdot A\Gamma$ γράφεται βάσει τῶν τύπων τῆς § 59, β':

$$\delta_A'^2 - \frac{\alpha^2 \beta \gamma}{(\beta - \gamma)^2} - \beta \gamma \Rightarrow$$

$$\delta_A'^2 = \beta \gamma \left\{ \frac{\alpha^2}{(\beta - \gamma)^2} - 1 \right\}, \quad \text{ὅπου} \quad \beta \neq \gamma. \quad \text{Κυκλικῶς εὐρίσκομεν τὰ} \quad \delta_B'^2, \quad \delta_\Gamma'^2.$$

(Ἀσκήσεις: 422, 423, 424, 425).

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΜΕΣΟΥ

89. α') Ὑπολογισμὸς τῶν διαμέσων συναρτήσει τῶν πλευρῶν.— Ἐστώσαν α, β, γ τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν τριγώνου καὶ $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$ τὰ μέτρα τῶν ἀντιστοιχῶν διαμέσων. Τὸ θεώρημα τῆς § 82 δίδει: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^3}{2}$ καὶ ἐξ αὐτοῦ

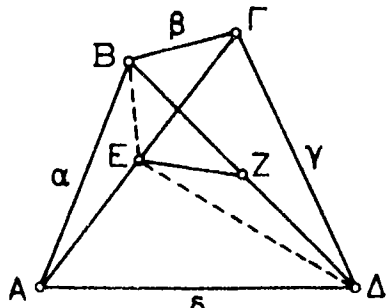
$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}.$$

Κυκλικῶς λαμβάνομεν:

$$\mu_\beta^2 = \frac{2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2}{4} \quad \text{καὶ} \quad \mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}.$$

β') (Θ) — Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν τετραπλεύρου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο διαγωνίων του σὺν τῷ τετραπλασίῳ τετραγώνῳ τῆς ἀποστάσεως τῶν μέσων τῶν διαγωνίων του.

Πράγματι ἀπὸ τὸ σχ. 100, ἂν E καὶ Z τὰ μέσα τῶν διαγωνίων $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$ τοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, λαμβάνομεν διὰ τριπλῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῆς διαμέσου:



$$(\alpha^2 + \beta^2) + (\gamma^2 + \delta^2) = - \left(2BE^2 + \frac{A\Gamma^2}{2} \right) + \left(2\Delta E^2 + \frac{A\Gamma^2}{2} \right) =$$

$$-2 \{BF^2 + E\Delta^2\} + A\Gamma^2 = 2 \left\{ 2EZ^2 + \frac{\Delta B^2}{2} \right\} + A\Gamma^2 \quad \text{ήτοι:}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = A\Gamma^2 + B\Delta^2 + 4EZ^2.$$

Σχ. 100

γ') (Θ) — Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων παντὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν του.

δ') Τόπος τῶν σημείων M, τὰ ὅποια πληροῦν τὴν μετρικὴν σχέσιν

$$\boxed{MA^2 + MB^2 = c^2}$$

ἔπου A, B σταθερὰ σημεῖα καὶ c δεδομένον τμήμα.

Ἐάν O τὸ μέσον τοῦ AB καὶ M τὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, τότε

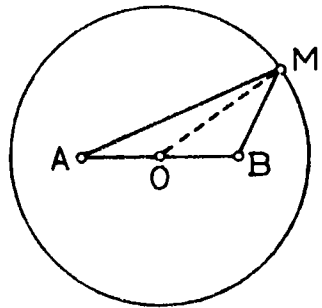
(1) $MA^2 + MB^2 = c^2$ (ιδιότης τοῦ M)

(2) $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}$

(θεώρ. διαμέσου) καὶ ἐπομένως :

$2 MO^2 + \frac{AB^2}{2} = c^2$, ἔξ οὗ :

$MO = \sqrt{\frac{c^2}{2} - \frac{AB^2}{4}}$ = σταθερ. μήκος



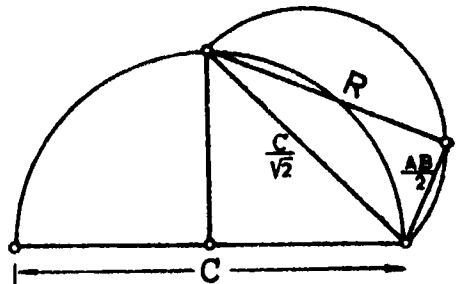
Σχ. 101

Ἐπομένως τὸ M ἀνήκει εἰς τὴν σταθερὰν περιφέρειαν $(O, \sqrt{\frac{c^2}{2} - \frac{AB^2}{4}})$.

Ἀντιστρόφως κάθε σημεῖον P τῆς περιφέρειᾶς ταύτης ἔχει τὴν ιδιότητα : $PA^2 + PB^2 = c^2$, ὅπως εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

Κατασκευὴ τῆς ἀκτίδος τοῦ τόπου.—Ἡ ἀκτίς R τοῦ τόπου δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$R = \sqrt{\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$ καὶ



Σχ. 102

κατασκευάζεται ὡς κάθετος πλευρὰ ὀρθογ. τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν $c/\sqrt{2}$ καὶ ἑτέραν κάθετον τὴν $AB/2$,

ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχ. 102. Φυσικὰ ὁ τόπος ὑπάρχει, ὅταν $c^2 \geq AB^2/2$, ἄλλως, εἶναι τὸ κενὸν σύνολον.

(Ἀσκήσεις : 399, 400, 401).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΜΕΣΟΥ

90. α) Τόπος τῶν σημείων M τῶν πληρούντων τὴν μετρικὴν σχέσιν $MA^2 - MB^2 = c^2$, ὅπου A, B σταθερὰ σημεία καὶ c σταθερὸν τμήμα.

Ἐστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, Π ἡ προβολὴ τοῦ M ἐπὶ τὴν εὐθ AB καὶ O τὸ μέσον τοῦ AB . Τὸ δεῦτερον θεώρημα τῆς διαμέσου (§ 83) δίδει :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overline{AB} \cdot \overline{O\Pi} \text{ καὶ ἐπειδὴ } MA^2 - MB^2 = c^2 \text{ (ιδιότης τοῦ } M) \rightarrow 2\overline{AB} \cdot \overline{O\Pi} = c^2 \Rightarrow \overline{O\Pi} = \frac{c^2}{2\overline{AB}}.$$

Ἐπειδὴ $\overline{AB} \cdot \overline{O\Pi} > 0$, ἔπεται ὅτι τὸ $\overrightarrow{O\Pi}$ καὶ \overrightarrow{AB} εἶναι ὁμόρροπα, ἄρα τὸ Π κεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (O, B) τῆς περιεχοῦσης ἐκεῖνο ἐκ τῶν δύο σταθερῶν σημείων A καὶ B , τὸ ὁποῖον ἀπέχει, μονίμως, ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ M . Τὸ σημεῖον Π εἶναι πλήρως ὀρισμένον, διότι κεῖται ἐπὶ γνωστῆς ἡμιευθείας (O, B) καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὴν ἀρχὴν O αὐτῆς, ἀπόστασιν γνωστὴν :

$$\frac{c^2}{2\overline{AB}}. \text{ Ἐπομένως τὰ σημεῖα } M \text{ εὐρίσκονται ἐπὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὴν } AB \text{ εἰς τὸ σταθερὸν σημεῖον } \Pi.$$

Ἀντιστρόφως διὰ πᾶν σημεῖον P τῆς εὐθείας ταύτης ἰσχύει (σχ. 103)

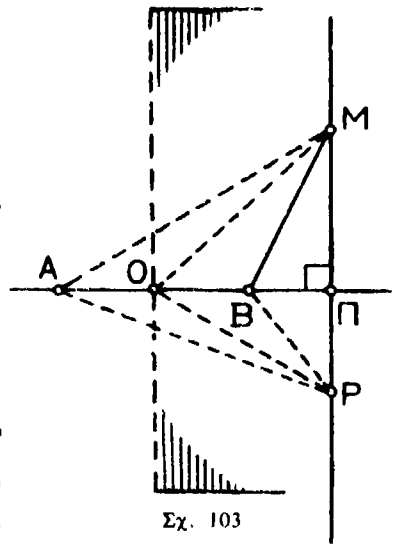
$$PA^2 - PB^2 = 2\overline{AB} \cdot \overline{O\Pi} = 2\overline{AB} \cdot \frac{c^2}{2\overline{AB}} = c^2.$$

Ὡστε τὸ σημειοσύνολον $\{M \mid MA^2 - MB^2 = c^2\}$ εἶναι μίᾳ εὐθείᾳ καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθ AB , εἰς σημεῖον Π κείμενον ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας (O, B) καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ μέσου O τοῦ AB ἴσην πρὸς $c^2/2(\overline{AB})$.

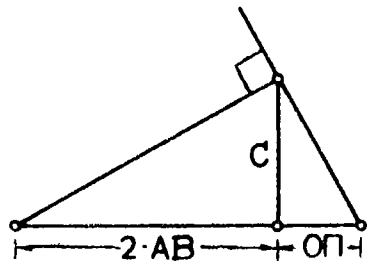
Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ τόπου ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ τμήμα $O\Pi$ ἴσον πρὸς τὸ $\frac{c^2}{2(\overline{AB})}$.

Τοῦτο γίνεται βάσει τῆς § 75, δ'. ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχ. 104.

β') Ἀλγεβρική διατύπωσις. —



Σχ. 103



Σχ. 104

Τὸ σύνολον τῶν σημείων M , διὰ τὰ ὅποια : $MA^2 - MB^2 = K$, ὅπου $K = c^2$ ἢ $K = -c^2$, εἶναι εὐθεία κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθ AB εἰς σημεῖον Π ὀριζόμενον ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$2\overline{AB} \cdot \overline{O\Pi} = K$$

Ἐνθα O τὸ μέσον τοῦ σταθεροῦ τμήματος AB .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

391. Ποῖον τὸ εἶδος τῆς γωνίας τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς εἰς τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα μήκη πλευρῶν :

i) 5, 12, 13.

ii) 4, 5, 6.

iii) 4, 5, 7.

iv) $a, \beta, \sqrt{a^2 + \beta^2} + a\beta$.

Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐν λόγῳ γωνία.

392. Εἰς πᾶν ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν πλευρῶν ὑπερβαίνει τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

393. Λοθέντος ἡμικυκλίου λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς διαμέτρου αὐτοῦ AB τυχόν σημεῖον Γ καὶ ἐπὶ τῶν τμημάτων $A\Gamma$ καὶ $B\Gamma$, ὡς ἐπὶ διαμέτρων, γράφομεν ἡμικύκλια ἐντὸς τοῦ δοθέντος, φέρομεν δὲ ἐκ τοῦ Γ κάθετον ἐπὶ τὴν AB . Νὰ δεიχθῇ ὅτι οἱ κύκλοι οἱ ἐγγεγραμμένοι εἰς τὰ δύο μέρη, εἰς ἃ χωρίζεται ὑπὸ τῆς καθέτου ἢ μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν ἐπιφάνεια, εἶναι ἴσοι.

394. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποῦ αἱ διάμεσοι ἔχουν μήκη μ_1, μ_2, μ_3 .

395. Ἐάν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο διαμέσων ἐνὸς τριγώνου ἴσονται πρὸς τὸ πενταπλάσιον τετράγωνον τῆς τρίτης διαμέσου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

396. Ποῖα σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν διαμέσων μ_a, μ_b, μ_c τριγώνου, τοῦ ὁποῦ αἱ πλευραὶ πληροῦν τὴν σχέσιν : $\beta^2 + \gamma^2 = 2a^2$;

397. Ἐάν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου κατασκευασθοῦν τετράγωνα ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων τῶν συνδεόντων τὰς γειτονικὰς κορυφὰς τῶν τετραγώνων τούτων, συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν.

398. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδεται ἡ $B\Gamma = a$, ἡ διάμεσος $BM = \mu$ καὶ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορά k^2 τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν. Συνθήκαι δυνατότητος.

399. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον $AB\Gamma$, οὗτινος δίδεται ἡ $B\Gamma$, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν AB καὶ $A\Gamma$ καὶ ἡ γωνία \hat{A} ἢ ἐν ὄψος.

400. Νὰ κατασκευασθῇ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου M τοιοῦτου, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐφαπτομένων τμημάτων τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ M πρὸς δύο δεδομένας περιφέρειάς νὰ ἴσονται πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

401. Ὁρθὴ γωνία $B\hat{A}\Gamma$ στρέφεται περὶ τὴν σταθερὰν κορυφὴν τῆς A κειμένην ἐντὸς δοθέντος κύκλου. Ἐάν αἱ πλευραὶ τῆς τέμνουν εἰς B καὶ Γ τὴν περιφέρειαν, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου τῆς $B\Gamma$.

402. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς μ_c , τῆς $\beta^2 - \gamma^2 = k^2$ καὶ τῆς γωνίας τῆς διαμέσου μ_c καὶ τῆς πλευρᾶς a .

403. Συναρτήσῃ τῶν τεσσάρων πλευρῶν τραπεζίου νά υπολογισθῇ τὸ μήκος τοῦ τμήματος τοῦ συνδέοντος τὰ μέσα τῶν βάσεων του.

404. Τὸ ὡς ἄνω τμήμα νά ἐκφρασθῇ συναρτήσῃ τῶν βάσεων καὶ τῶν διαγωνίων.

405. Νά υπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοι τραπεζίου συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

406. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἠποστάσεων ἀπὸ τὰς κορυφὰς δεδομένου τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

407. Νά υπολογισθοῦν αἱ βάσεις τραπεζίου, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ διαγώνιοι καὶ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ.

408. Νά υπολογισθοῦν συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν τριγώνου $AB\Gamma$ τὰ τμήματα, ἅτινα ἰγόμενα ἐκ τῆς κορυφῆς A χωρίζουν τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς n ἴσα μέρη.

409. Ἐπὶ δοθέντος τόξου νά εὑρεθῇ σημεῖον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τόξου νά ἴσούται πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

410. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου $AB\Gamma$, οὔτινος ἡ κορυφή A εἶναι σταθερὰ, αἱ δὲ B καὶ Γ κινουῦνται ἐπὶ δοθείσης ἀπεράντου εὐθείας οὕτως, ὥστε $AB \cdot A\Gamma = k^2$ ($k =$ δοθὲν τμήμα).

411. Ἐὰν M τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου $A\Gamma$ τοῦ περι τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ $M\Delta$ ἡ ἀπόστασις τοῦ M ἀπὸ τῆς πλευρᾶς $A\Gamma$, νά δειχθῇ πρῶτον ὅτι $MB = MA + M\Gamma$ καὶ κατόπιν ἡ σχέσις: $MB^2 = MA^2 + M\Gamma^2 + 4R \cdot M\Delta$, ἔνθα R ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου.

412. Τριγώνου $AB\Gamma$ μένει σταθερὰ ἡ βᾶσις $B\Gamma$ καὶ ἀκόμη, $\frac{v_\beta \cdot v_\gamma}{v_\alpha} = k$ ($k =$ δοθὲν τμήμα). Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῆς κορυφῆς A .

413. Νά κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὔτινος γνωρίζομεν τὴν γωνίαν \widehat{A} , τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἔγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τούτου ἀπὸ τὰς κορυφὰς B καὶ Γ .

414. Εἰς δοθέντα κύκλον νά ἐγγραφῇ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ καὶ i) τὸ ἄθροισμα ἢ ii) τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ἢ iii) ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων ἢ iv) τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων διαδοχικῶν πλευρῶν.

415. Εἰς δοθέντα κύκλον νά ἐγγραφῇ κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, οὔτινος δίδονται δύο ἀπέναντι πλευραὶ $AB = \alpha$ καὶ $\Gamma\Delta = \beta$ καὶ τὸ ἄθροισμα ἢ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν $B\Gamma$ καὶ $A\Delta$.

(Ἐπὶ δὲ. Ἐὰν ἡ ἐκ τοῦ B παρ/λος πρὸς τὴν διαγώνιον $A\Gamma$ τέμνη τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὸ B' , τότε τὸ τετράπλευρον $AB'\Gamma\Delta$ ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς α καὶ β καὶ τὰς δύο ἄλλας διαδοχικὰς ἴσας πρὸς $B\Gamma$ καὶ $A\Delta$. Ὅθεν ἡ κατασκευὴ τοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην).

416. Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι τὰ μέτρα τῶν διαδοχικῶν πλευρῶν ἀπλοῦ τετραπλεύρου δείξατε ὅτι :

i) Ἡ $|\alpha^2 + \gamma^2 - (\beta^2 + \delta^2)|$ ἴσούται πρὸς τὸ διπλάσιον μιᾶς διαγωνίου ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης διαγωνίου ἐπὶ ταύτην.

ii) Ἡ σχέσις $\alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2 + \delta^2$ εἶναι χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῶν τετραπλεύρων τῶν ἐχόντων καθέτους διαγωνίους.

iii) Ἐστω ἄρθρωτὸν τετράπλευρον, δηλ. μεταβαλλόμενον τετράπλευρον, ἀλλὰ διατηροῦν σταθερὰ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του. Ἐὰν κατὰ τινα στιγμήν τοῦτο ἔχη καθέτους διαγωνίους, τότε καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς μεταβολῆς του αἱ διαγώνιοί του παραμένουν κάθετοι.

417. Ἐστω $A\Delta$ ὕψος τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$. Δείξατε ὅτι, ἂν

$$A\Delta^2 = \overline{A\Gamma} \cdot \overline{A\Delta},$$

τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον εἰς A .

418. Ψευδορθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ καλεῖται ἐκεῖνο, τοῦ ὁποῦ $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 90^\circ$. Ἐν $\Delta\Delta$ τὸ ὕψος του, δεῖξτε ὅτι ἡ ἰδιότης

$$A\Delta^2 = \overline{A\Gamma} \cdot \overline{A\Delta}$$

εἶναι χαρακτηριστικὴ διὰ τὰ ψευδορθογώνια τρίγωνα.

Δεῖξτε ἐπίσης ὅτι εἰς τὸ ἀνωτέρω τρίγωνον ἰσχύει ἡ σχέσηις : $AB^2 + A\Gamma^2 = 4R^2$, ὅπου R ἡ ἀκτίς τοῦ περὶ τὸ $\tau\rho.$ $AB\Gamma$ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ ὅτι ἡ σχέσηις αὕτη δὲν εἶναι χαρακτηριστικὴ διὰ τὸ ψευδορθογώνιον τρίγωνον.

419. Δίδεται ἄξων $\alpha'Ox$, ἐπ' αὐτοῦ δύο σημεῖα A καὶ A' τοιαῦτα, ὥστε $\overline{OA} = -\overline{OA'}$ $= a > 0$ καὶ ὀρθογώνιον παρ/μον $A'ABB'$ μὲ $BA = B'A' = \beta$. Δύο μεταβλητὰ σημεῖα M καὶ M' κινουνται ἐπὶ τοῦ ἄξωνος οὕτως, ὥστε $\overline{AM} \cdot \overline{A'M'} = -\beta^2$. Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐπιπέδων $M'B'$ καὶ MB ; Ποῖα ἡ θέσις τῆς περιφέρειᾶς διαμέτρου MM' ὡς πρὸς τὸν τόπον; Πῶς δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἐν ζεύγος M, M' τῶν ἀνωτέρω σημείων, ὅταν δίδεται τὸ μέσον τοῦ MM' ;

420. Ἐάν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ μὲ $\widehat{A} = 90^\circ$ ἡ διχοτόμος $A\Delta = AB$, νὰ δεῖχθῇ ἡ σχέσηις $B\Gamma^2 = 2\Gamma\Delta^2$.

421. Δοθέντος τριγώνου $AB\Gamma$ νὰ δεῖχθῇ ὅτι ὑπάρχει σταθερὸν σημεῖον Σ ἀπέχον ἐξ Ἰσου ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα M τοῦ ἐπιπέδου τὰ πληροῦντα τὴν μετρικὴν σχέσιν $MA^2 + MB^2 + 3M\Gamma^2 = c^2$, ὅπου c δεδομένον τμήμα. (Γενίκευσις). (Ἐπόδ. βλ. § 85, β').

422. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐξωτερικαὶ καὶ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποῦ αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι 7, 12, 9 μέτρων.

423. Τριγώνου $AB\Gamma$ δίδονται αἱ πλευραὶ β, γ καὶ ὅτι ἡ διάμεσος AM ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς \widehat{A} . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ a καὶ ἡ διάμεσος AM συναρτήσῃ τῶν β καὶ γ . Νὰ γίνῃ ἐπίσης γεωμ. κατασκευὴ τοῦ τριγώνου.

424. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσῃ τοῦ k , τὸ μήκος τῆς διχοτόμου $A\Delta$ τριγώνου $AB\Gamma$, ὅταν δίδεται ὅτι $\beta\gamma = k^2$ καὶ ὅτι $\beta + \gamma = 2a$.

425. Νὰ δεῖχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον $AB\Gamma$: $\delta^2_A + \delta^2_B + \delta^2_\Gamma \leq \tau^2$.

426. Ἐάν πολύγωνον μὲ ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς περιφέρειᾶς ἀπὸ τὰς πλευρὰς περιττῆς τάξεως ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τὰς πλευρὰς τάξεως ἄρτιας.

427. Ἐάν O τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ $\tau\rho.$ $AB\Gamma$ κύκλου καὶ K τὸ τοῦ περιγεγραμμένου, νὰ δεῖχθῇ ὅτι $KO^2 = R^2 - 2R\rho$.

(Ἐπόδ. Νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ ἄσκ. 145 καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ KO^2 ἐκ τοῦ $\tau\rho.$ KOM (M , μέσον τόξου $\widehat{B\Gamma}$) διὰ τοῦ ἐπεκτεταμένου Πυθαγορείου θεωρ.).

428. Ἐάν K τὸ κέντρον τοῦ περὶ τριγώνου περιγεγραμμένου κύκλου καὶ O_1 τὸ τοῦ παρὰ τὴν πλευρὰν a παρεγγεγραμμένου, νὰ δεῖχθῇ ἡ σχέσηις :

$$KO_1^2 = R^2 + 2R\rho_x.$$

(Ἐπόδ. βλ. ἄσκ. 145. Ἡ KO_1^2 δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τοῦ $\tau\rho.$ KO_1M (ἀμβλυγώνιου), ὅπου M τὸ μέσον τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$).

429. Νὰ δεῖχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογώνιου τριγώνου ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα τὰ τριχοτομοῦντα τὴν ὑποτείνουσαν ἰσοῦται πρὸς τὰ $5/9$ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτείνουσης.

430. Ἐάν G τὸ βαρύκεντρον τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ M τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου, νὰ δεῖχθῇ ὁ τύπος τοῦ Leibniz :

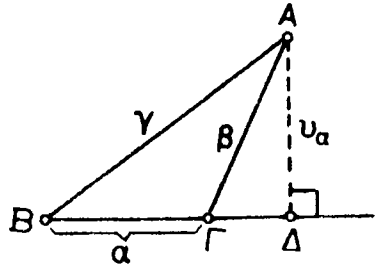
$$MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + G\Gamma^2$$

ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΤΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

Α' ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

(Συνέχεια τῶν μετρικῶν σχέσεων ἐν τριγώνῳ)

91. Ὑπολογισμὸς τῶν ὑψῶν τριγώνου συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν.— Ἐστώσαν α, β, γ τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν τρ. $AB\Gamma$ καὶ u_x, u_β, u_γ τὰ μέτρα τῶν ἀντιστοιχῶν ὑψῶν. Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ὕψους $A\Delta = u_x$ (σχ. 105) ἀρκεῖ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ προβολὴ $\Gamma\Delta$ τῆς πλευρᾶς $A\Gamma$ ἐπὶ τὸν φορέα τῆς $B\Gamma$. Τὸ ἐπεκτεταμένον πυθαγόρειον θεώρημα δίδει :



Σχ. 105

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\overline{GB} \cdot \overline{GD} \Rightarrow$$

$$\overline{GD} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\overline{GB}} \Rightarrow \overline{GD}^2 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2}{4\alpha^2}$$

Τὸ πυθαγόρειον θεώρημα εἰς τὸ τρίγωνον $A\Gamma\Delta$ δίδει :

$$u_x^2 = \beta^2 - \overline{GD}^2 = \beta^2 - \frac{(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha^2\beta^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2}{4\alpha^2} =$$

$$\frac{(2\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)(2\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)}{4\alpha^2} = \frac{\{(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2\} \{\gamma^2 - (\alpha - \beta)^2\}}{4\alpha^2}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)(\gamma - \alpha + \beta)(\gamma + \alpha - \beta)}{4\alpha^2} \quad \text{καὶ}$$

$$(1) \quad u_x = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{(\alpha + \beta + \gamma)(-\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)}.$$

Συνήθως θέτομεν : $\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ (ἡμιπερίμετρος), ὁπότε $\tau - \alpha =$

$$= \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2}, \quad \tau - \beta = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2}, \quad \tau - \gamma = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \quad \text{καὶ ὁ ἀνωτέρω τύπος}$$

μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς :

$$u_x = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{2\tau \cdot 2(\tau - \alpha) \cdot 2(\tau - \beta) \cdot 2(\tau - \gamma)} = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}.$$

Τελικῶς :

$$(2) \quad u_x = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

$$u_\beta = \frac{2}{\beta} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

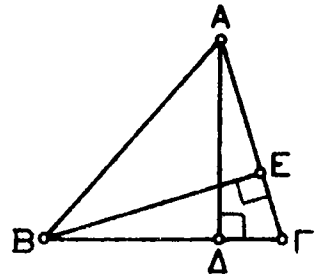
$$u_\gamma = \frac{2}{\gamma} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}.$$

92. Έμβαδόν τριγώνου. α') (Θ) — Εἰς πᾶν τρίγωνον τὰ ὕψη εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν πλευρῶν, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἴστανται κάθετα.

Ἦτοι, ἂν α, β, γ αἱ πλευραὶ καὶ $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$ τὰ ἀντίστοιχα ὕψη, τότε :

$$(1) \quad \boxed{u_\alpha = \beta u_\beta = \gamma u_\gamma}$$

Ἔστωσαν AD καὶ BE δύο ὕψη τοῦ τρ. $AB\Gamma$ (σχ. 106) καὶ ἡ $\widehat{\Gamma}$ δεξεία. Τότε προφανῶς τρ. $A\Delta\Gamma \approx$ τρ. BEG



Σχ. 106

καὶ $\frac{AD}{BE} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ ἢ $\boxed{\frac{u_\alpha}{u_\beta} = \frac{\beta}{\alpha}} \Rightarrow u_\alpha = \beta u_\beta.$

Ἡ σχέσηις αὐτὴ δεικνύεται ὁμοίως καὶ ὅταν $\Gamma > 90^\circ$. Ὅμοίως, $\beta u_\beta = \gamma u_\gamma$. (Ἐξ ἄλλου οἱ τύποι (2) τῆς § 91 δεικνύουν τὸ θεώρημα).

β') **Έμβαδόν τριγώνου.** Οἱ τύποι (1) δεικνύουν ὅτι δι' ἓν δεδομένον τρίγωνον τὸ γινόμενον μιᾶς πλευρᾶς ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τῆς πλευρᾶς, δηλ. εἶναι μία σταθερὰ ποσότης διὰ τὸ θεωρούμενον τρίγωνον.

Τὸ ἕμισυ τοῦ γινομένου μιᾶς οἰασθῆποτε πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος καλοῦμεν «ἐμβαδόν» τοῦ τριγώνου (βλ. καὶ § 98 β').

Τὸ ἐμβαδόν ἑνὸς τρ. $AB\Gamma$ παριστῶμεν συνήθως μὲ E ἢ $E_{AB\Gamma}$ δηλ.

$$(2) \quad E_{AB\Gamma} \stackrel{\text{ἐξ ὀρισμοῦ}}{=} \frac{1}{2} u_\alpha = \frac{1}{2} \beta u_\beta = \frac{1}{2} \gamma u_\gamma = E_{B\Gamma A} = E_{B\Gamma\alpha} \text{ κτλ.}$$

Ὅστω ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν τριγῶνων ὀρίζομεν μίαν συνάρτησιν f , ἢ ὁποία διὰ κάθε τρίγωνον T ἔχει μίαν ὀρισμένην θετικὴν τιμὴν $f(T) = E$, ἣτις ἐκφράζει τὸ (ἀνωτέρω ὀρισθὲν) ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου T . Τὸ πεδῖον ὀρισμοῦ τῆς συναρτήσεως ταύτης $f(T)$ εἶναι δηλαδή τὸ σύνολον τῶν τριγῶνων καὶ τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς εἶναι τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν.

Ὅπως θὰ δεῖξωμεν ἀμέσως κατωτέρω, ἡ συνάρτησις αὐτὴ $f(T)$ ($= \frac{1}{2}$ βάσεως \times ὕψος) εἶναι προσθετικὴ, δηλ. ἂν ἓν τρίγωνον T διαμερισθῇ εἰς οἰονδῆποτε πλῆθος τριγῶνων T_1, T_2, \dots, T_n , τότε

$$f(T) = f(T_1) + f(T_2) + \dots + f(T_n)$$

δηλ. τὸ ἐμβαδόν τοῦ T ἴσουςται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγῶνων, εἰς τὰ ὁποία τὸ T ἀναλύεται.

93. Ἰδιότητες τοῦ ἔμβαδου τῶν τριγῶνων.

(i)—Ἐάν σημεῖον Σ κείται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ τριγῶνου $AB\Gamma$, τότε :

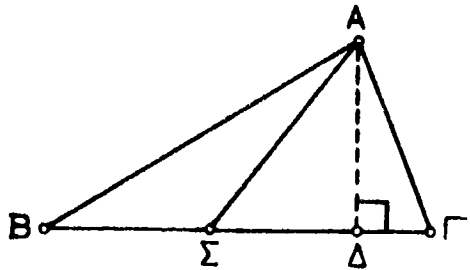
$$E_{AB\Gamma} = E_{AB\Sigma} + E_{A\Sigma\Gamma}.$$

$$\text{Διότι: } E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta$$

$$(\text{σχ. 107}) = \frac{1}{2} (B\Sigma + \Sigma\Gamma) \cdot A\Delta =$$

$$= \frac{1}{2} B\Sigma \cdot A\Delta + \frac{1}{2} \Sigma\Gamma \cdot A\Delta =$$

$$= E_{AB\Sigma} + E_{A\Sigma\Gamma}.$$



Σχ. 107

Πόρισμα. Ἐάν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ κείνται κατὰ σειράν τὰ σημεῖα $B, A_1, A_2, \dots, A_n, \Gamma$, τότε

$$E_{\mu B A \Gamma} = E_{\mu B A A_1} + E_{\mu B A A_2} + \dots + E_{\mu B A A_n \Gamma}.$$

(ii)—Ἐάν σημεῖον Σ κείται εἰς τὸ ἐσωτερικόν τριγῶνου $AB\Gamma$, τότε :

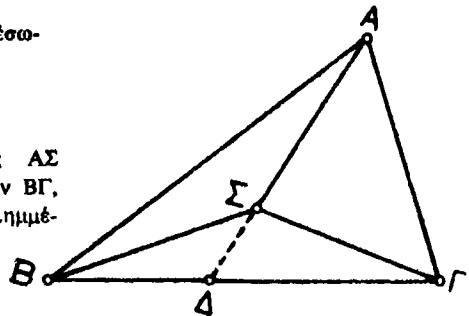
$$E_{AB\Gamma} = E_{\Sigma AB} + E_{\Sigma B\Gamma} + E_{\Sigma \Gamma A}.$$

Διότι ἡ προέκτασις τοῦ τμήματος $A\Sigma$ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Σ τέμνει τὴν πλευρὰν $B\Gamma$, ἔστω εἰς Δ , καὶ ἐφαρμόζοντες ἐπανιληθμῶς τὸ προηγούμενον ἔχομεν

$$E_{AB\Gamma} = E_{B\Delta A} + E_{\Gamma\Delta A} =$$

$$= \{E_{B\Delta\Sigma} + E_{B\Sigma\Delta}\} + \{E_{\Gamma\Delta\Sigma} + E_{\Gamma\Sigma\Delta}\}$$

$$= E_{B\Delta\Sigma} + E_{\Gamma\Delta\Sigma} + \{E_{B\Sigma\Delta} + E_{\Gamma\Sigma\Delta}\} = E_{\Sigma AB} + E_{\Sigma \Gamma A} + E_{\Sigma B\Gamma}.$$



Σχ. 108

(iii)—Ἐάν σημεῖον Σ κείται ἐκτὸς τοῦ τρ. $AB\Gamma$, ἀλλ' ἐντὸς τῆς γωνίας \hat{A} , τότε :

$$E_{AB\Gamma} = E_{\Sigma AB} + E_{\Sigma A\Gamma} - E_{\Sigma B\Gamma}.$$

Διότι τὸ τμήμα $A\Sigma$ τέμνει τὴν πλευρὰν $B\Gamma$, ἔστω εἰς Δ καὶ ἐφαρμόζοντες τὸ (i) ἔχομεν :

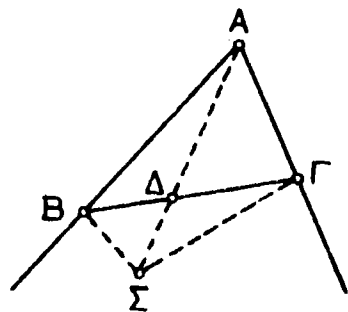
$$E_{\Sigma AB} + E_{\Sigma A\Gamma}$$

$$= (E_{B\Delta A} + E_{B\Delta\Sigma}) + (E_{A\Delta\Gamma} + E_{\Gamma\Delta\Sigma}) =$$

$$= \{E_{B\Delta A} + E_{A\Delta\Gamma}\} + \{E_{B\Delta\Sigma} + E_{\Gamma\Delta\Sigma}\} =$$

$$= E_{AB\Gamma} + E_{\Sigma B\Gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\Sigma AB} + E_{\Sigma A\Gamma} - E_{\Sigma B\Gamma} = E_{AB\Gamma}.$$



Σχ. 109

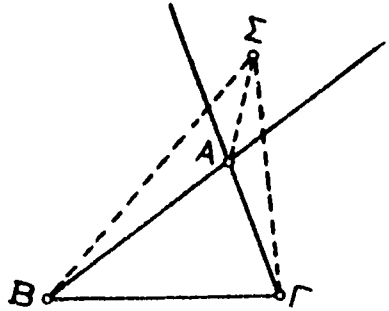
(iv) — 'Εάν σημειον Σ κείται ἐντὸς τῆς γωνίας, ἢ ὅποια εἶναι κατὰ κορυφὴν τῆς γωνίας \widehat{A} τριγώνου ΑΒΓ, τότε :

$$E_{AB\Gamma} = E_{\Sigma B\Gamma} - E_{\Sigma AB} - E_{\Sigma A\Gamma}$$

Διότι τότε τὸ Α εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τρ. ΣΒΓ (σχ. 110) καὶ συνεπῶς κατὰ τὸ (ii) ἰσχύει :

$$E_{\Sigma B\Gamma} = E_{AB\Gamma} + E_{\Sigma AB} + E_{\Sigma A\Gamma}$$

ἐκ τούτου δὲ ἔπεται τὸ ἀποδεικτέον.



Σχ. 110

(v) — Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ καὶ σημείου Σ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ, καλοῦμεν ἀλγεβρικήν ἀπόστασιν τοῦ Σ ἀπὸ τινος πλευρᾶς τοῦ τριγώνου τὴν ἀπόστασιν τοῦ Σ ἀπὸ τὸν φορέα τῆς πλευρᾶς, ἐφοδιασμένην μὲ τὸ πρόσημον + ἢ —, καθ' ὅσον τὸ Σ κείται ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν εἰς τὸ ἴδιον ἡμισπίεδον μὲ τὴν ἀπέναντι κορυφὴν ἢ εἰς τὸ ἀντίθετον. Τούτου τεθέντος, τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἴσούται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν τοῦ πολλαπλασιασμένων ἐπὶ τὰς ἀλγεβρικὰς ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ Σ.

'Απόδειξις. Ἐστώσαν x, y, z αἱ ἀλγεβρικαὶ ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΒΓ = a , ΓΑ = β , ΑΒ = γ ἀντιστοίχως.

'Εάν τὸ Σ κείται ἐντὸς τοῦ τριγώνου, τότε τὰ x, y, z εἶναι ὅλα θετικὰ καὶ ἴσα πρὸς τὰ ὕψη τῶν τριγώνων ΣΒΓ, ΣΓΑ, ΣΑΒ καὶ τὸ ἀνωτέρω θεωρ. (ii) δίδει :

$$(1) \quad E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} ax + \frac{1}{2} by + \frac{1}{2} \gamma z.$$

'Εάν τὸ Σ κείται ἐκτὸς τοῦ τρ. ΑΒΓ, ἀλλ' ἐντὸς τῆς \widehat{A} (σχ. 109), τότε ἡ x εἶναι < 0 , ἐνῶ y καὶ z θετικαί. Τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τρ. ΣΒΓ εἶναι τότε $-\frac{1}{2} ax$, ἐνῶ τὰ ἔμβαδά τῶν τρ.

ΣΑΒ, τρ. ΣΑΓ εἶναι $\frac{1}{2} \gamma z, \frac{1}{2} by$ ἀντιστοίχως καὶ ἡ σχέσις τοῦ θεωρ. (iii) γίνεται

$$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} \gamma z + \frac{1}{2} by + \frac{1}{2} ax, \text{ ἤτοι ἡ (1) πάλιν ἰσχύει.}$$

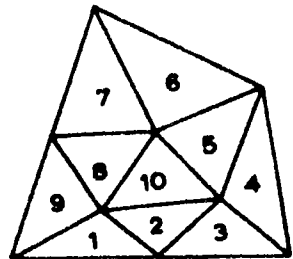
'Αν τὸ Σ κείται ἐντὸς τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς ΒΑΓ (σχ. 110), τότε τὰ y καὶ z εἶναι ἀρνητικὰ, τὸ x θετικὸν καὶ ἡ σχέσις τοῦ θεωρ. (iv) ὁδηγεῖ πάλιν εἰς τὴν ἰσότητα (1).

Τέλος, ἐάν τὸ Σ κείται ἐπὶ τοῦ φορέως μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τρ. ΑΒΓ, τότε μία ἐκ τῶν ἀποστάσεων x, y, z εἶναι μηδὲν καὶ ὁ τύπος (1) ἰσχύει.

94. Ἡ προσθετικότητα τοῦ ἔμβαδου. α) Τριγωνισμὸς. — Ἐστω εἰς

διαμερισμὸς ἐνὸς ἄλλοδ πολυγώνου εἰς τρίγωνα οὕτως, ὥστε νὰ πληροῦνται αἱ ἐπόμενα συνθήκαι : τὰ τρίγωνα, εἰς ἃ διεχωρίσθη τὸ πολύγωνον λαμβανόμενα ἀνά δύο ἢ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον μεταξύ των ἔχουν ἢ ἔχουν μίαν κορυφὴν κοινὴν ὡς μόνον κοινὸν σημεῖον ἢ ἔχουν μίαν πλευρὰν κοινὴν καὶ οὐδὲν ἕτερον σημεῖον κοινόν. Εἰς τεμαχισμὸς τοῦ πολυγώνου εἰς τρίγωνα πληροῦντα τὰς ἀνωτέρω συνθήκας λέγεται «τριγωνισμὸς» τοῦ πολυγώνου σχ. 110α.

β) (Θ) — Τὸ ἔμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἴσούται πρὸς τὸ ἀθροῖσμα τῶν ἔμβαδῶν τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὅποια τὸ δοθὲν τρίγωνον διαμερίζεται δι' ἐνὸς οἰοῦδηποτε τριγωνισμοῦ.



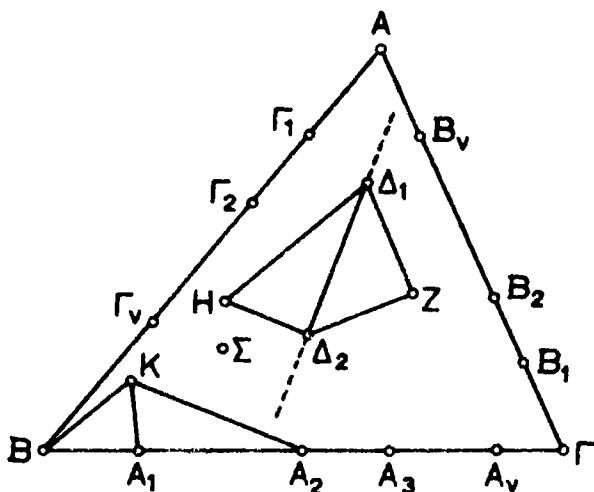
Σχ. 110α

Ἀπόδειξις. Ἐὰς θεωρήσωμεν τρίγωνον $AB\Gamma$ διηρημένον εἰς τρίγωνα διὰ τριγωνισμού. Ἐὰς λάβωμεν καὶ ἓν σταθερὸν σημεῖον Σ ἐντὸς τοῦ τρ. $AB\Gamma$ καὶ ἄς καλέσωμεν τὰς ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπὸ τὰς πλευρὰς $B\Gamma$, ΓA , AB διὰ τῶν h_1 , h_2 , h_3 ἀντιστοίχως.

Αἱ πλευραὶ τῶν τριγῶνων τοῦ τριγωνισμού κείνται ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς τοῦ τρ. $AB\Gamma$ (ὅπως ἢ $\Delta_1\Delta_2$ ἢ ἢ A_1K (σχ. 111)) ἢ κείνται ἐπὶ τῆς περιμέτρου τοῦ τρ. $AB\Gamma$ (ὅπως αἱ BA_1 , A_1A_2 ...).

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὄλων τῶν τριγῶνων τοῦ τριγωνισμού ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμιγινόμενων ὄλων τῶν πλευρῶν τῶν τριγῶνων τούτων ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους ἀλγεβρικὰς ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ Σ (§ 93, (v), (i)).

Θεωρήσωμεν εὐθύγραμμον τμήμα τοῦ τριγωνισμού, ἔστω $\Delta_1\Delta_2$, κείμενον ἐντὸς τοῦ τρ. $AB\Gamma$. Τὸ τμήμα τοῦτο ἀνήκει εἰς δύο τρίγωνα τοῦ τριγωνισμού, τὰ $\Delta_1H\Delta_2$ καὶ $\Delta_1Z\Delta_2$, κείμενα ἑκατέρωθεν τῆς $\Delta_1\Delta_2$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ H καὶ Z κείνται ἑκατέρωθεν τῆς $\Delta_1\Delta_2$, αἱ ἀλγεβρικαὶ ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπὸ τὴν $\Delta_1\Delta_2$ ἀναφορικῶς πρὸς τὰ τρίγωνα $H\Delta_1\Delta_2$ καὶ $Z\Delta_1\Delta_2$ εἶναι προφανῶς ἀντίθετοι: ἡ ὡς πρὸς τὸ τρ. $\Delta_1H\Delta_2$ καὶ $-h$ ὡς πρὸς τὸ τρ. $Z\Delta_1\Delta_2$ (ἂν δὲν εἶναι μηδενικαί). Ἐπομένως κατὰ τὴν ἄθροισιν ὄλων



Σχ. 111

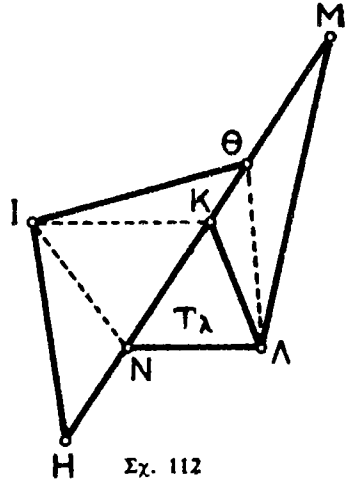
τῶν ἡμιγινόμενων τὰ $\frac{1}{2} \Delta_1\Delta_2 \cdot h$ καὶ $-\frac{1}{2} \Delta_1\Delta_2 \cdot h$ θὰ ἐξαλειφθοῦν. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ τμήματα, ὅπως τὸ A_1K . Ὅτῳ ὄλα τὰ ἡμιγινόμενα τὰ ἀφορῶντα τὰ ἐσωτερικὰ τμήματα τοῦ τριγωνισμού κατὰ τὴν ἄθροισιν ἐξαλείφονται καὶ μένουσιν μόνον τὰ ἡμιγινόμενα τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ τμήματα τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς περιμέτρου. Ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὄλων τῶν τριγῶνων τοῦ τριγωνισμού ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{2} (BA_1 \cdot h_1 + A_1A_2h_1 + \dots + A_v\Gamma \cdot h_1) + \frac{1}{2} (\Gamma B_1 \cdot h_2 + B_1B_2 \cdot h_2 + \dots + B_v A \cdot h_2) + \frac{1}{2} (A\Gamma_1 \cdot h_3 + \Gamma_1\Gamma_2 \cdot h_3 + \dots + \Gamma_v B \cdot h_3) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot h_1 + \frac{1}{2} \Gamma A \cdot h_2 + \frac{1}{2} AB \cdot h_3$. Τὸ ἐξαγόμενον τούτου εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ἐκτελεσθέντος τριγωνισμού καὶ ἰσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγῶνου $AB\Gamma$ ὁ.ἔ.δ.

Παρατήρησις. Τὸ Σ δύναται νὰ ληφθῆ καὶ ἐκτὸς τοῦ τρ. $AB\Gamma$, ὅποτε ἡ ἀπόδειξις παραμένει, ὡς ἔχει, ἐνὸς ϕ ς h_1 , h_2 , h_3 θὰ θεωροῦνται αἱ προσημασμένα ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπὸ τὰς AB , $B\Gamma$, ΓA .

γ) (Θ) — Ἐὰν τρίγωνον $AB\Gamma$ ἀναλυθῆ καθ' οἰονδήποτε τρόπον εἰς ἕτερα τρίγωνα,

τότε τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τρ. ΑΒΓ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἔμβαδῶν τῶν τριγῶνων, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τρίγωνον τοῦτο διεμερισθῆ.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἀνελύθη εἰς σύστημα τριγῶνων $T_1, T_2, \dots, T_{\lambda}, \dots, T_n$, τὰ ὁποῖα εἶναι μεταξύ των συνεχόμενα καὶ ἔχουν ὡς συνένομα τὸ τρ. ΑΒΓ. Ἐάν αἱ συνθήκαι τοῦ τριγωνισμού δὲν πληροῦνται, τοῦτο σημαίνει ὅτι ὀρισμένοι κορυφαὶ τριγῶνων T_{λ} εὐρίσκονται εἰς ἔσωτερικὰ σημεῖα ὀρισμένων πλευρῶν ἄλλων τριγῶνων. Ἐάν ὁμοῦ ἐνώσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς ἐπὶ τῶν πλευρῶν γειτονικῶν τριγῶνων κειμένης κορυφᾶς τῶν T_{λ} μετὰ τὰς ἀπέναντι κορυφᾶς τοῦ γειτονικοῦ τριγῶνου (σχ. 112) (ἐστιγμένοι γραμμαὶ), λαμβάνομεν ἕν νέον σύστημα τριγῶνων, T'_1, T'_2, \dots, T'_m (ΙΗΝ, ΙΝΚ, ΙΚΘ, ΝΑΚ, ΚΘΛ, ΘΜΛ... καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς). Ὁ διαμερισμὸς τοῦ τρ. ΑΒΓ εἰς τὰ τρίγωνα T_1, T_2, \dots, T_m εἶναι, τώρα, εἰς τριγωνισμόν.



Σχ. 112

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἔμβαδῶν τῶν τριγῶνων T'_1, T'_2, \dots, T'_m εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἔμβαδῶν τῶν T_1, T_2, \dots, T_n , διότι κατὰ τὸν διαμερισμὸν ἑνὸς τριγῶνου T_p (ὅπως τοῦ ΗΙΘ ἢ τοῦ ΚΛΜ) εἰς δύο ἢ τρία τρίγωνα τὸ ἄθροισμα τῶν ἔμβαδῶν τῶν προκύπτοντων τριγῶνων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἔμβαδόν τοῦ T_p (§ 93). Ἀλλὰ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα τὸ ἄθροισμα τῶν ἔμβαδῶν τῶν T'_1, T'_2, \dots, T'_m ἰσοῦται πρὸς τὸ ἔμβαδόν τοῦ ΑΒΓ. Ἄρα καὶ τὸ ἴσον ἄθροισμα τῶν ἔμβαδῶν τῶν T_1, T_2, \dots, T_n ἰσοῦται πρὸς τὸ ἔμβαδόν τοῦ ΑΒΓ δ.ε.δ.

δ') Ἐπέκτασις εἰς τὰ κυρτὰ πολύγωνα. (Θ)—Καθ' οἰονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἀναλυθῆ κυρτὸν πολύγωνον εἰς τρίγωνα, τὸ ἄθροισμα τῶν ἔμβαδῶν τῶν ἐπὶ μέρους τριγῶνων εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ (δηλ. εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ τρόπου τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυγώνου εἰς τρίγωνα).

Ἀπόδειξις. Ἐς θεωρήσωμεν κατ' ἀρχὰς κυρτὸν πολύγωνον διηρημένον εἰς τρίγωνα διὰ τριγωνισμόν τινος (δδ. α'), ὃς λάβωμεν τυχόν σημεῖον Σ εἰς τὸ ἔσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου καὶ ἄς καλέσωμεν $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ τὰς ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπὸ τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3 \dots A_n$. Σκεπτόμενοι ἀκριβῶς, ὅπως εἰς τὸ ἐδάφ. β', εὐρίσκομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἔμβαδῶν ὅλων τῶν τριγῶνων τοῦ τριγωνισμού εἶναι ἴσον πρὸς $\frac{1}{2} A_1A_2 \cdot h_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot h_2 + \dots + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot h_n$, δηλ. παντελῶς ἀνεξάρτητον τοῦ ἐκτελεσθέντος τριγωνισμού.

Ἐστω τώρα ὅτι τὸ πολύγωνον ἀνελύθη εἰς σύστημα τριγῶνων $T_1, T_2, \dots, T_{\lambda}, \dots, T_p$, ὧν τὰ ἔσωτερικὰ εἶναι ἀνά δύο ξένα μεταξύ των, ἀλλὰ τὸ σύστημα T_1, T_2, \dots, T_p δὲν πληροῖ τὰς συνθήκας τοῦ τριγωνισμού. Τότε φέροντες βοηθητικὰ τμήματα λαμβάνομεν, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ ἀνωτέρω ἐδάφ. γ', ἕν νέον σύστημα τριγῶνων T'_1, T'_2, \dots, T'_m ἀποτελούντων τριγωνισμόν καὶ ἔχονταν ἄθροισμα ἔμβαδῶν ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἔμβαδῶν τῶν T_1, T_2, \dots, T_p . Ἐπομένως καὶ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν ἔμβαδῶν τῶν τριγῶνων, εἰς ἃ ἀνελύθη τὸ πολύγωνον, εἶναι τὸ ἴδιον.

95.—Τύποι τοῦ ἔμβαδου τριγῶνου. Ἐάν καλέσωμεν Ε τὸ ἔμβαδόν τοῦ τρ. ΑΒΓ, α, β, γ τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν του, τ τὴν ἡμιπερίμετρον, ρ τὴν ἀκτίνα τοῦ ἔγγεγραμμένου καὶ R τὴν τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου

του και τέλος ρ_α την ακτίνα του παρεγγεγραμμένου κύκλου του ἐντός τῆς γωνίας \widehat{A} , τότε ἰσχύουν διὰ τὸ ἔμβαδὸν E οἱ κάτωθι τύποι :

i) Τὸ ἔμβαδὸν συναρτήσῃ βάσεως και ὕψους

$$E = \frac{1}{2} a u_\alpha = \frac{1}{2} \beta v_\beta = \frac{1}{2} \gamma v_\gamma \quad (\text{βλ. § 92})$$

ii) Τὸ ἔμβαδὸν συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν. (Τύπος Ἑρῶνος τοῦ Ἀλεξανδρέως).

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $E = \frac{1}{2} a u_\alpha$ ἀντικατασταθῇ τὸ u_α συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν (§ 91, τύποι (2)) λαμβάνομεν

$$(1) \quad E = \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$

Ἀντὶ τοῦ (1) δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιοῦμεν τὸν

$$(2) \quad E = \frac{1}{4} \sqrt{(a+\beta+\gamma)(-a+\beta+\gamma)(a-\beta+\gamma)(a+\beta-\gamma)}.$$

iii) Τὸ ἔμβαδὸν συναρτήσῃ τῶν ρ καὶ τ .

Τὸ ἔγκεντρον O χωρίζει τὸ $\tau\rho$. $AB\Gamma$ εἰς τρία τρίγωνα $OB\Gamma$, $O\Gamma A$, OAB ἔχοντα βάσεις τὰς a , β , γ καὶ ὕψη ἴσα πρὸς ρ . Ἐπομένως ἡ σχέσις $E_{AB\Gamma} = E_{OB\Gamma} + E_{O\Gamma A} + E_{OAB}$ (βλ. § 93, (ii)) δίδει :

$$E = \frac{1}{2} a\rho + \frac{1}{2} \beta\rho + \frac{1}{2} \gamma\rho = \frac{a+\beta+\gamma}{2} \rho \quad \text{δηλ.}$$

$$E = \tau\rho.$$

iv) Τὸ ἔμβαδὸν συναρτήσῃ τῶν ρ_α καὶ $\tau - a$.

Ἐὰν O_1 τὸ παράκεντρον τὸ ἐντός τῆς γωνίας \widehat{A} , τότε (§93, iii) $E_{AB\Gamma} = E_{O_1AB} + E_{O_1A\Gamma} - E_{O_1B\Gamma}$ καὶ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα O_1AB , $O_1A\Gamma$ καὶ $O_1B\Gamma$ ἔχουν ὕψη ἐκ τοῦ O_1 ἴσα πρὸς ρ_α καὶ βάσεις γ , β , a ἀντιστοίχως, ἔχομεν :

$$E = \frac{1}{2} \gamma\rho_\alpha + \frac{1}{2} \beta\rho_\alpha - \frac{1}{2} a\rho_\alpha = \frac{\beta + \gamma - a}{2} \rho_\alpha \quad \text{δηλ.}$$

$$E = (\tau - a)\rho_\alpha.$$

Ὁμοίως εὐρίσκομεν : $E = (\tau - \beta)\rho_\beta = (\tau - \gamma)\rho_\gamma$.

v) Τὸ ἔμβαδὸν συναρτήσῃ τῶν a , β , γ , R .

Ἡ μετρικὴ σχέσις $\beta\gamma = 2R u_\alpha$ (§ 84) δίδει διὰ πολλ./σμοῦ ἐπὶ a : $a\beta\gamma = 2R a u_\alpha$. Ἀλλὰ $a u_\alpha = 2E$, συνεπῶς

$a\beta\gamma = 2R \cdot 2E$ ἢ $a\beta\gamma = 4RE$. Ὡστε :

$$E = \frac{a\beta\gamma}{4R}.$$

96. Ὑπολογισμὸς τῶν ρ , ρ_α , R συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Ἐκ τοῦ τύπου $E = \tau$ συνάγεται ὅτι

$$(1) \quad \rho = \frac{E}{\tau}.$$

Διὰ τοῦ (1) δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν, ἀντικαθιστωμένου τοῦ E διὰ τοῦ τύπου τοῦ Ἡρωνος.

— Ἐκ τοῦ τύπου $E = (\tau - \alpha)\rho_\alpha$ συνάγεται :

$$(2) \quad \rho_\alpha = \frac{E}{\tau - \alpha}.$$

Ἐκ τοῦ (2) ὑπολογίζεται ἡ ρ_α συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν.

— Ἐκ τοῦ τύπου $\alpha\beta\gamma = 4RE$ (§ 95, ν) συνάγεται :

$$(3) \quad R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E}.$$

Διὰ τοῦ (3) ὑπολογίζεται ἡ R συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν.

97. Σύγκρισις τῶν ἐμβαδῶν δύο τριγώνων.

α') (Θ) — Ἐὰν ἡ κορυφή τριγώνου μετακινηθῇ ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευράν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου δὲν βλάπτεται.

Ἦτοι, ἂν $AA' // B\Gamma \Rightarrow \text{Εμβ}AB\Gamma = \text{Εμβ}A'B\Gamma$.

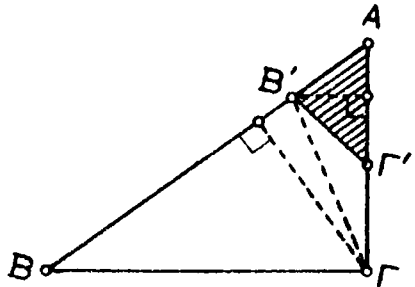
β') (Θ) — Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσας βάσεις, τὰ ἐμβαδὰ των εἶναι ἀνάλογα τῶν ὕψων των (τῶν ἀντιστοιχοῦντων εἰς τὰς ἴσας βάσεις). Ἐὰν ἔχουν ἴσα ὕψη, τὰ ἐμβαδὰ των εἶναι ἀνάλογα τῶν βάσεων.

(Ἄμεσος συνέπεια τοῦ τύπου $E = \frac{1}{2} \alpha\upsilon_\alpha$).

γ') (Θ) — Ἐὰν μία γωνία ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς μίαν γωνίαν ἑνὸς ἄλλου, τότε τὰ ἐμβαδὰ των εἶναι ὡς τὰ γινόμενα τῶν πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀπόδειξις. Δυνάμεθα διὰ κινήσεως νὰ φέρωμεν τὸ ἓν τρίγωνον ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ὥστε αἱ ἴσαι γωνίαι νὰ ἐφαρμόσουν. Τότε τὰ τρίγωνα λαμβάνουν τὴν θέσιν τοῦ σχ. 113, δηλ. τὸ ἓν εἶναι τὸ τρ. $AB'\Gamma'$ καὶ τὸ ἄλλο τὸ τρ. $AB\Gamma$.

Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν $AB'\Gamma'$ καὶ $AB\Gamma$ μεταξύ των, ἀρκεῖ νὰ τὰ συγκρίνωμεν πρὸς ἓν τρίτον. Φέρομεν τὴν $B'\Gamma$, ὅποτε τὰ ἐμβαδὰ τοῦ $AB'\Gamma'$ καὶ τοῦ βοηθητικοῦ τριγώνου



Σχ. 113

ΑΒ'Γ συγκρίνονται, διότι τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουν ἐκ τῆς κορυφῆς Β' τὸ ἴδιο ὕψος (ἔδ. β'). Ἐπίσης τὸ ἔμβαδὸν τοῦ βοηθητικοῦ ΑΒ'Γ καὶ τοῦ ΑΒΓ συγκρίνονται, διότι τὰ τρίγωνα ἔχουν ἐκ τῆς κορυφῆς Γ τὸ ἴδιον ὕψος. Ἐπομένως :

$$(1) \quad \frac{\text{ΕμβΑΒ'Γ}}{\text{ΕμβΑΒΓ}} = \frac{\text{ΑΓ'}}{\text{ΑΓ}} \quad \text{καὶ}$$

$$(2) \quad \frac{\text{ΕμβΑΒ'Γ}}{\text{ΕμβΑΒΓ}} = \frac{\text{ΑΒ'}}{\text{ΑΒ}}$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\frac{\text{ΕμβΑΒ'Γ}}{\text{ΕμβΑΒΓ}} = \frac{\text{ΑΒ'} \cdot \text{ΑΓ'}}{\text{ΑΒ} \cdot \text{ΑΓ}} \quad \delta. \epsilon. \delta.$$

δ') (Θ) — Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας παραπληρωματικάς, τὰ ἔμβαδά αὐτῶν ἔχουν λόγον, ὃν λόγον ἔχουν τὰ γινόμενα τῶν πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν τὰς παραπληρωματικάς γωνίας

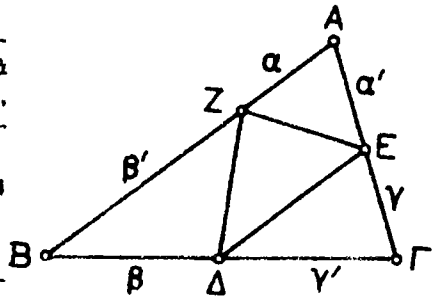
Ἄποδεικνύεται, ὅπως τὸ προηγούμενον.

ε') Αἱ κορυφαὶ τοῦ ἑνὸς κείνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ἄλλου.

Πρὸς σύγκρισιν τῶν ἔμβαδῶν τῶν τριγώνων ΔΕΖ καὶ ΑΒΓ τοῦ σχ. 114, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὰς ἀποστάσεις ΑΖ=α, ΑΕ=α', ΒΖ=β', ΒΔ=β, ΓΔ=γ', ΓΕ=γ ἢ τοὺς λόγους, ΑΖ : ΖΒ, ΒΔ : ΔΓ, ΓΕ : ΕΑ.

Ἀπὸ τὰ θεωρήματα τῆς § 93 ἢ τῆς § 94 συνάγεται εὐκόλα ὅτι ΕμβΑΒΓ = ΕμβΖΔΕ + ΕμβΑΖΕ + ΕμβΒΖΔ + ΕμβΓΔΕ.

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων εἶναι ἡ ἀκόλουθος :



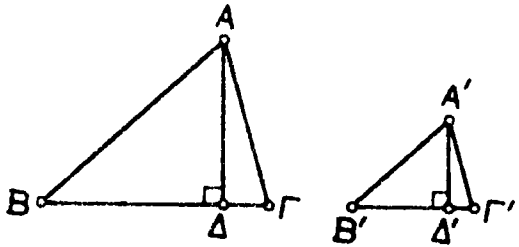
Σχ. 114

$$\begin{aligned} & \frac{\text{ΕμβΔΕΖ}}{\text{ΕμβΑΒΓ}} = \frac{\text{ΕμβΑΒΓ} - \text{ΕμβΑΖΕ} - \text{ΕμβΒΖΔ} - \text{ΕμβΓΔΕ}}{\text{ΕμβΑΒΓ}} \\ = & 1 - \frac{\text{ΕμβΑΖΕ}}{\text{ΕμβΑΒΓ}} - \frac{\text{ΕμβΒΖΔ}}{\text{ΕμβΑΒΓ}} - \frac{\text{ΕμβΓΔΕ}}{\text{ΕμβΑΒΓ}} = (\text{ἔδαφ. } \gamma') \\ = & 1 - \frac{\text{ΑΖ} \cdot \text{ΑΕ}}{\text{ΑΒ} \cdot \text{ΑΓ}} - \frac{\text{ΒΖ} \cdot \text{ΒΔ}}{\text{ΒΑ} \cdot \text{ΒΓ}} - \frac{\text{ΓΔ} \cdot \text{ΓΕ}}{\text{ΓΒ} \cdot \text{ΓΑ}} = \\ = & 1 - \frac{\alpha \alpha'}{(\alpha + \beta')(\alpha' + \gamma)} - \frac{\beta \beta'}{(\beta' + \alpha)(\beta + \gamma')} - \frac{\gamma \gamma'}{(\gamma' + \beta)(\gamma + \alpha)}. \end{aligned}$$

ς') Λόγος ἔμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων. Ἐστω τρ. ΑΒΓ ≈ τρ. Α'Β'Γ'

μέ $\widehat{B} = \widehat{B'}$ και $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$
 $= \frac{\Gamma A}{\Gamma'A'} = \lambda$ και ἔστωσαν $A\Delta$

και $A'\Delta'$ δύο ὁμόλογα ὕψη αὐ-
 τῶν. Ὑποτιθεμένης τῆς \widehat{B} ὁ-
 ξείας ἔχομεν ἐκ τῶν ὁμοίων
 τριγῶνων $AB\Delta$, $A'B'\Delta'$:



Σχ. 115

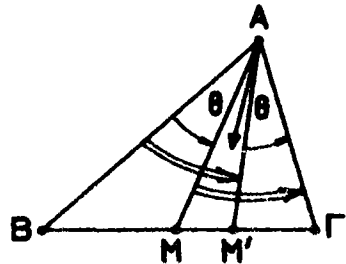
$\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'}$ ἀλλὰ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$ συνεπῶς $\boxed{\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}}$.

Ἐπομένως $\frac{E_{AB\Gamma}}{E_{A'B'\Gamma'}} = \frac{\frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta}{\frac{1}{2} B'\Gamma' \cdot A'\Delta'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \cdot \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \cdot \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$.

Ὡστε : $\frac{E_{AB\Gamma}}{E_{A'B'\Gamma'}} = \frac{B\Gamma^2}{B'\Gamma'^2} = \frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{A\Gamma^2}{A'\Gamma'^2} = \lambda^2$.

Τῶν ὁμοίων τριγῶνων τὰ ἐμβαδὰ εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων
 πλευρῶν. Ἡ «ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγῶνων ἰσοῦται πρὸς τὸ
 τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν».

ζ') Ἐφαρμογὴ εἰς τὰς ἰσογωνίους εὐθείας. (Θ)—Ἐάν ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ τριγῶνου τέμνεται
 εἰς M καὶ M' ὑπὸ δύο εὐθειῶν AM καὶ AM'
 συμμετρικῶν ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς \widehat{A} ,
 τότε τὸ γινόμενον τῶν λόγων : $\frac{MB}{M\Gamma}$ καὶ $\frac{M'B}{M'\Gamma}$
 εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς $\frac{AB^2}{A\Gamma^2}$ (Αἱ ἀνωτέρω
 εὐθεῖαι AM καὶ AM' λέγονται ἰσογῶνοι ὡς
 εἰρὸς τὴν γωνίαν \widehat{A}).



Σχ. 116

Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα
 ABM καὶ $AM'\Gamma$ ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην :

$\widehat{BAM} = \widehat{M'AG}$ καὶ εἶναι καὶ ἰσοῦση ἐκ τοῦ A . Ὀμοίως καὶ τὰ τρίγωνα ABM' καὶ $AM\Gamma$
 (σχ. 116). Συμφώνως πρὸς τὰ ἐδάφ. β' καὶ γ' θὰ ἰσχύουν :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\epsilon\mu\beta \cdot ABM}{\epsilon\mu\beta \cdot AM'\Gamma} &= \frac{AB \cdot AM}{AM' \cdot A\Gamma} = \frac{BM}{M'\Gamma} \\ \frac{\epsilon\mu\beta \cdot ABM'}{\epsilon\mu\beta \cdot AM\Gamma} &= \frac{AB \cdot AM'}{AM \cdot A\Gamma} = \frac{BM'}{M\Gamma} \end{aligned} \right\} (1)$$

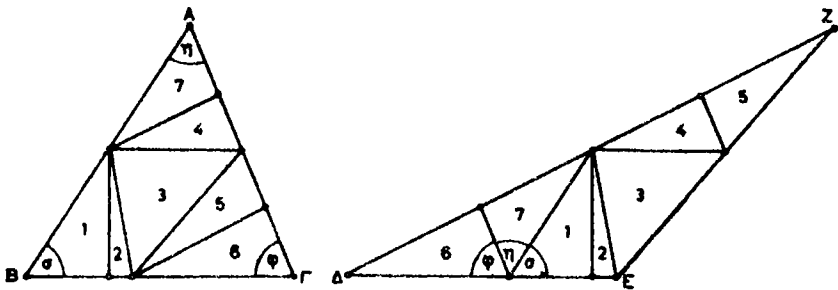
Διά πολ/σμοῦ κατὰ μέλη τῶν (1) λαμβάνομεν :

$$\frac{AB^2}{AG^2} = \frac{BM \cdot BM'}{M'G \cdot M'G} \quad \text{ἤτοι} \quad \boxed{\frac{MB}{M'G} \cdot \frac{M'B}{M'G} = \frac{AB^2}{AG^2}} \quad \delta \ \epsilon. \ \delta.$$

98. Ἴσοδύναμα τρίγωνα. α') Δύο τρίγωνα ἔχοντα ἴσα ἐμβαδὰ λέγονται ἰσοδύναμα. Ἐὰν δύο τρίγωνα σύγκεινται ἀπὸ ἴσον πλῆθος ἀντιστοίχως ἴσων τριγώνων, τότε ἔχουν ἴσα ἐμβαδὰ (§ 94, γ') καὶ ἐπομένως εἶναι ἰσοδύναμα. Ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει, ἤτοι ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσα ἐμβαδὰ, τότε ἀναλύονται εἰς ἴσον πλῆθος τριγώνων ἀντιστοίχως ἴσων.

Ἄν δύο τρίγωνα ABΓ καὶ ΔEZ εἶναι ἰσοδύναμα, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν : $E_{\Delta B\Gamma} = E_{\Delta EZ}$ ἢ $E_{\mu B\Delta B\Gamma} = E_{\mu B\Delta EZ}$.

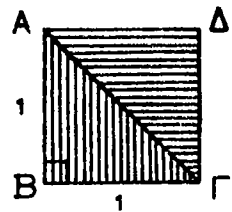
Τὸ σχ. 117 δεικνύει δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα (δηλ. βάσις × ὕψος τοῦ ἑνὸς = βάσις × ὕψος τοῦ ἄλλου), τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀναλυθῆ εἰς ἴσα τρίγωνα (τὰ φέροντα τοὺς ἰδίους ἀριθμοὺς).



Σχ. 117

β') Ἀφοῦ λοιπὸν ἀποδεικνύεται ὅτι δύο τρίγωνα ἔχοντα ἴσα ἐμβαδὰ εἶναι «κατὰ τεμάχια ἴσα» καὶ συνεπῶς κατέχουν ἴσην ἔκτασιν, ἔπεται ὅτι τὸ εἰς τὰ προηγούμενα ὁρισθὲν ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἢ μᾶλλον τὸ γινόμενον «βάσις × ὕψος» χαρακτηρίζει τὴν ἔκτασιν τῆς ἐπιφανείας, ἢν καταλαμβάνει τὸ τρίγωνον.

Ὅσον ἀφορᾷ τὸν παράγοντα $\frac{1}{2}$, τὸν ὁποῖον συνάπτομεν εἰς τὸ γινόμενον «βάσις × ὕψος», οὗτος δὲν εἶναι οὐσιώδης, ἀλλὰ τίθεται, διότι ἐν τῇ πράξει εἶναι ἐπιθυμητὸν νὰ ἔχωμεν μονάδα ἐπιφανειῶν τὸ μοναδιαῖον τετράγωνον, δηλ. τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν μονάδα τῶν μηκῶν. Ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ABΓ (σχ. 118) μὲ καθέτους πλευρὰς ἴσας πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν εἶναι τὸ ἡμισυ τῆς (αὐθαίρετης) ἐκλεγεῖσης μονάδος ἐπιφανειῶν



Σχ. 118

ABΓΔ, διὰ τοῦτο θέλομεν νὰ ἔχη ἐμβαδὸν $\frac{1}{2}$, δηλ. $\frac{1}{2} B\Gamma \times AB$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

431. Ἐκάστη διάμεσος τριγώνου χωρίζει τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα.

432. Ἐάν τὸ μέσον E τῆς διαμέσου AA' τοῦ τριγώνου $ABΓ$ ἔνωθῃ δι' εὐθείας μὲ τὴν κορυφὴν $Γ$ καὶ τὸ μέσον Z τῆς $EΓ$ μὲ τὴν κορυφὴν B καὶ τὸ μέσον H τῆς ZB μὲ τὸ E , τὸ τρίγωνον EZH ἔχει ὡς ἔμβαδὸν τὸ $1/8$ τοῦ ἔμβαδοῦ τοῦ τριγώνου $ABΓ$.

433. Τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα βάσεις τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς τραπεζίου καὶ κοινὴν κορυφὴν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων εἶναι ἰσοδύναμα.

434. Πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει ἔμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων, εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

435. Ἐάν αἱ πλευραὶ τριγώνου $ABΓ$ προεκταθοῦν πᾶσαι κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν περιστροφῆς καὶ ληφθοῦν ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν $BΓ$, $ΓA$, AB ἀντιστοίχως σημεῖα A' , B' , $Γ'$ τοιαῦτα, ὥστε $BA' = λ \cdot BΓ$, $ΓB' = μ \cdot ΓA$, $AΓ' = ν \cdot AB$, νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἔμβαδῶν τῶν τριγώνων $A'B'Γ'$ καὶ $ABΓ$.

436. Ἐάν προεκτείνωμεν πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς ἑκάστην διάμεσον τριγώνου μέχρι διπλασιασμοῦ, τίς ὁ λόγος τοῦ ἔμβαδοῦ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων πρὸς τὸ ἔμβαδὸν τοῦ ἀρχικοῦ;

437. Συναρτήσῃ τοῦ μήκους a τῆς πλευρᾶς ἰσοπλευροῦ τριγώνου νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος καὶ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

438. Ἐάν a , b δύο πλευραὶ τριγώνου, τότε, ἂν $a > b$, θὰ εἶναι καὶ $a + u_a \geq b + u_b$.

439. Τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον πλευράς ἴσας πρὸς τὰς διαμέσους ἐνὸς τριγώνου $ABΓ$ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὰ $3/4$ τοῦ τρ. $ABΓ$.

440. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου συναρτήσῃ τῶν τριῶν ὕψων του.

441. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου συναρτήσῃ τῶν τριῶν διαμέσων του.

442. Συναρτήσῃ τῆς ἀκτίνας R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον τῶν ἀκτίνων ὄλων τῶν περιφερειῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει τὴν ιδιότητα νὰ διέρχεται διὰ δύο κορυφῶν τοῦ τριγώνου καὶ νὰ ἐφάπτεται μιᾶς πλευρᾶς.

443. Ἐάν αἱ πλευραὶ a , b , γ τριγώνου $ABΓ$ εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ, νὰ δειχθῇ ὅτι $6Rr = a\gamma$.

444. Ἐάν παραστήσωμεν μὲ R , ρ , ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 τὰς ἀκτίνας τῶν περιγεγραμμένων κύκλων ἀντιστοίχως δοθέντος τριγώνου, τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος πλευράς τὰς διαμέσους τοῦ δοθέντος καὶ τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων βάσεις τὰς πλευράς τοῦ δοθέντος καὶ κοινὴν κορυφὴν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων αὐτοῦ, νὰ δειχθῇ ὅτι: $4R\rho^3 = 3\rho_1\rho_2\rho_3$.

445. Νὰ μετασχηματισθῇ τρίγωνον $ABΓ$ εἰς ἰσοδύναμον ἰσοσκελὲς ἔχον γωνίαν κορυφῆς ἴσην μὲ τὴν \hat{A} .

446. Τριγώνου $ABΓ$ ἡ βᾶσις $BΓ$ μένει σταθερά, τὸ δὲ τρίγωνον παραμένει ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς μεταβλητῆς πλευρᾶς AB κατασκευαζόμενον ἰσόπλευρον τρίγωνον. Τίς ὁ τόπος τῆς κορυφῆς A ;

(Ἵπὸδ. βλ. ἀσκ. 372).

447. Τριγώνου $ABΓ$ δίδονται τὰ μήκη a , b , γ τῶν πλευρῶν του. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ἔμβαδοῦ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τοῦ τρ. $ABΓ$ πρὸς τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τρ. $ABΓ$. Νὰ δειχθῇ ἀκόμη ὅτι ὁ λόγος οὗτος οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ $1/4$, ἰσοῦται δὲ μὲ $1/4$ μόνον, ὅταν τὸ τρ. $ABΓ$ εἶναι ἰσόπλευρον.

448. Εἰς τὰς κορυφὰς B , $Γ$ τριγώνου $ABΓ$ φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τεμνομένας εἰς τὸ A' , ἐκ δὲ τοῦ A' φέρομεν καθέτους $A'B'$ καὶ $A'Γ'$ ἐπὶ

τάς πλευράς AB, AG. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ διάμεσος AM τοῦ τρ. ABΓ εἶναι κάθετος τῆ B'Γ' καὶ νά εὐρεθῆ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν (A'B'Γ') : (ABΓ) συναρτήσει τῆς BΓ = a καὶ τῆς ἀκτίνοσ R.

449. Διὰ τῆς κορυφῆς A τριγώνου ABΓ φέρομεν δύο εὐθείας ἰσγωνίους ὡς πρὸς τὴν γωνίαν \widehat{A} καὶ τεμνοῦσας εἰς Δ καὶ Ε τὴν πλευράν BΓ. Νά δειχθῆ ὅτι : αἱ προβολαὶ τῶν Δ καὶ Ε ἐπὶ τὰς εὐθείας AB, AG εἶναι ὁμοκυκλικαί.

450. Εἰς τὸ ἀνωτέρω, νά δειχθῆ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν Δ καὶ Ε ἀπὸ τῆς εὐθ AB ἴσονται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τῆς εὐθ AG.

451. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἔχουν μήκη 20, 51, 65.

452. Νά δειχθῆ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ἀληθεύουν αἱ σχέσεις :

$$\frac{1}{\rho_{\alpha}} + \frac{1}{\rho_{\beta}} + \frac{1}{\rho_{\gamma}} = \frac{1}{\rho}$$

$$E = \sqrt{\rho_{\alpha}\rho_{\beta}\rho_{\gamma}}$$

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{\alpha}} = \frac{2}{\rho_{\alpha}}$$

453. Ἐστω τρ. ABΓ. i) Νά δειχθῆ ὑπολογιστικῶς ἡ σχέση :

$$\rho_{\alpha} + \rho_{\beta} + \rho_{\gamma} - \rho = 4R$$

ii) Χρησιμοποιοῦντες τὴν i) κατὰ τὴν ἀσκ. 148 δεῖξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν βελῶν τῶν τριῶν τόξων $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A}$, \widehat{AB} τοῦ περικύκλου (ἀντιστοιχῶν πρὸς τὰς ἐγγεγραμμένας \widehat{A} , \widehat{B} , $\widehat{\Gamma}$) ἴσονται μὲ $2R - \rho$.

454. Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας καὶ δύο παραπληρωματικὰς, τότε αἱ πλευραὶ αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὡς αἱ πλευραὶ αἱ ἀπέναντι τῶν παραπληρωματικῶν (βλ. θεωρ. § 97, γ' καὶ δ').

ii) Βάσει τοῦ προηγουμένου νά δειχθῆ τὸ θεώρημα τοῦ Newton : «Εἰς πᾶν κυρτὸν περιγράψιμον τετράπλευρον αἱ χορδαὶ τῶν ἐπαφῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν διέρχονται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου». (Ἐπὶ δὲ : Ἐστῶσαν E, Θ, Z, H τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν AB, BΓ, ΓΔ, ΔA. Τότε ἡ EZ διαιρεῖ τὴν διαγώνιον BD ἐσωτερικῶς εἰς λόγον EB/ZΔ καὶ ἡ HΘ διαιρεῖ τὴν αὐτὴν διαγώνιον εἰς τὸν ἴσον λόγον BΘ/ΔH· ὁθεν αἱ EZ καὶ HΘ τέμνονται ἐπὶ τῆς BD).

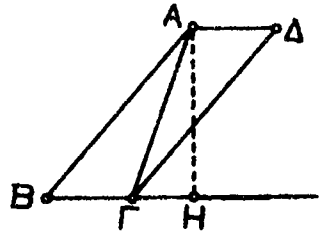
B' ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΡΤΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ — — ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

99. Ἐμβαδὸν κυρτοῦ πολυγώνου. Ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν § 94, δ', ἐὰν κυρτὸν πολύγωνον ἀναλυθῆ καθ' οἰονδήποτε τρόπον εἰς τρίγωνα, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπὶ μέρους τούτων τριγώνων εἶναι πάντοτε τὸ αὐτό, δηλαδὴ εἶναι παντελῶς ἀνεξάρτητον τοῦ τρόπου, καθ' ὃν γίνεται ὁ διαμερισμὸς τοῦ πολυγώνου. Τὸ σταθερὸν τοῦτο ἄθροισμα καλεῖται ἐμβαδὸν τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου.

100. Έμβαδόν παραλληλογράμμου. Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον, ΒΓ μία πλευρά του (βάσις) και ΑΗ τὸ ἐπὶ ταύτην ὕψος (σχ. 119).

Κατὰ τὸν γενικὸν ὀρισμὸν, εἶναι :

$$\begin{aligned} \text{Εμβ ΑΒΓΔ} &= \text{ΕμβΑΒΓ} + \text{Εμβ ΑΓΔ} = \\ &= 2\text{Εμβ ΑΒΓ} = 2 \cdot \frac{1}{2} \text{ΒΓ} \cdot \text{ΑΗ} = \text{ΒΓ} \cdot \text{ΑΗ}. \end{aligned}$$



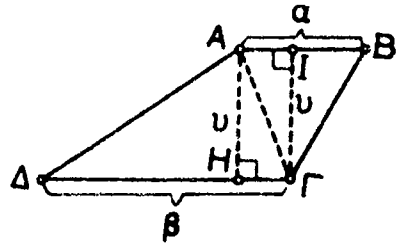
Σχ. 119

Ὅστε τὸ ἔμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος.

Πόρισμα. Τὸ ἔμβαδὸν παντὸς ὀρθογωνίου παρ/μου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο διαστάσεων του.

101. Έμβαδὸν τραπεζίου.

Έστω ΑΒΓΔ τραπέζιον (σχ. 120) ἔχον βάσεις ΑΒ = α, ΓΔ = β καὶ ὕψος υ = ΑΗ = ΓΙ. Κατὰ τὸν γενικὸν ὀρισμὸν εἶναι :



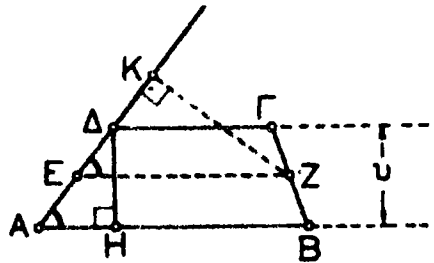
Σχ. 120

$$\text{Εμβ ΑΒΓΔ} = \text{Εμβ ΑΔΓ} +$$

$$+ \text{Εμβ ΑΓΒ} = \frac{1}{2} \beta \cdot \upsilon + \frac{1}{2} \alpha \cdot \upsilon = \boxed{\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \upsilon} \text{ . Έάν τώρα καλέσωμεν}$$

διάμεσον τοῦ τραπέζιου τὸ τμήμα ΕΖ τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν δύο μὴ παραλλήλων πλευρῶν (σχ. 121), ὁ ἀνωτέρω τύπος γίνεται : Εμβ ΑΒΓΔ =

$\boxed{\text{ΕΖ} \times \upsilon}$. Τέλος, ἂν ΖΚ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου Ζ τῆς ΓΒ ἀπὸ τῆς εὐθ ΑΔ, ἔχομεν ἐκ τῶν ὁμοίων



Σχ. 121

$$\text{τριγώνων ΔΑΗ καὶ ΕΖΚ : } \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΖΚ}}{\text{ΔΗ}} \Rightarrow$$

$$\text{ΕΖ} \times \upsilon = \text{ΑΔ} \times \text{ΖΚ} \text{ καὶ ἐπομένως } \text{Εμβ ΑΒΓΔ} = \boxed{\text{ΑΔ} \times \text{ΖΚ}} \text{ . Συνάγομεν}$$

λοιπὸν τρεῖς ἐκφράσεις τοῦ ἔμβαδοῦ τοῦ τραπέζιου :

I. Τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τραπέζιου ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος.

II. Τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τραπέζιου ἰσοῦται μὲ τὴν διάμεσον ἐπὶ τὸ ὕψος.

III. Τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τραπέζιου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς τῶν μὴ

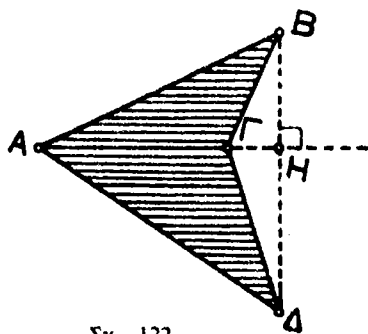
παραλλήλων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ μέσου τῆς ἄλλης ἀπὸ τὸν φορέα τῆς πρώτης.

102. (Θ)— Τὸ ἔμβαδὸν ἀπλοῦ τετραπλεύρου κυρτοῦ ἢ μὴ κυρτοῦ ἔχοντος καθέτους διαγωνίους ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον τῶν διαγωνίων του.

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ ἀπλοῦν, μὴ κυρτὸν τετράπλευρον $ΑΒΔΓ$, τὸ ὁποῖον χωρίζεται ὑπὸ τῆς διαγωνίου του $ΑΓ$ εἰς δύο τρίγωνα κείμενα ἐκατέρωθεν αὐτῆς. Ἡ εὐθεῖα $ΑΓ$, κάθετος ἐξ ὑποθέσεως ἐπὶ τὸ τμήμα $ΒΔ$, τέμνει τοῦτο εἰς σημεῖον $Η$ κείμενον μεταξύ τῶν $Β$ καὶ $Δ$, διότι τὰ $Β$ καὶ $Δ$ κείνται ἐκατέρωθεν τῆς εὐθ $ΑΓ$. Συνεπῶς,

$$ΒΗ + ΗΔ = ΒΔ.$$

Σχ. 122



Ἐκ τοῦ γενικοῦ ὀρισμοῦ ἔχομεν :

$$\begin{aligned} \text{Εμβα}ΒΓΔ &= \text{Εμβα}ΒΑΓ + \text{Εμβα}ΑΔΓ = \frac{1}{2} ΑΓ \times ΒΗ + \frac{1}{2} ΑΓ \times ΔΗ = \\ &= \frac{1}{2} ΑΓ \cdot \{ ΒΗ + ΔΗ \} = \frac{1}{2} ΑΓ \cdot ΒΔ \quad \delta. \epsilon. \delta. \end{aligned}$$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

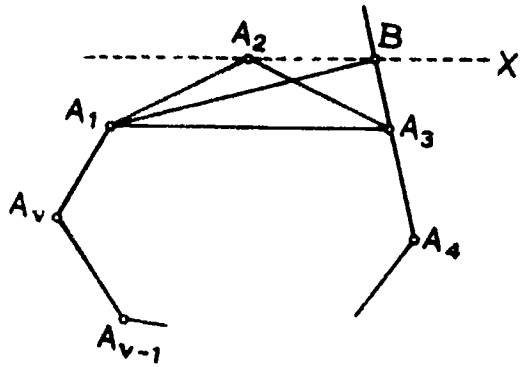
103. Ὅρισμός. — Δύο πολύγωνα λέγονται ἰσοδύναμα, ὅταν ἔχουν ἴσα ἔμβαδά.

104. Πρόβλημα. — Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν κυρτὸν πολύγωνον.

Λύσις. Ἐστω $Α_1Α_2Α_3\dotsΑ_n$ ἓν πολύγωνον. Θὰ ζητήσωμεν κατ' ἀρχὰς πολύγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν, ἀλλ' ἔχον μίαν πλευράν ὀλιγωτέραν.

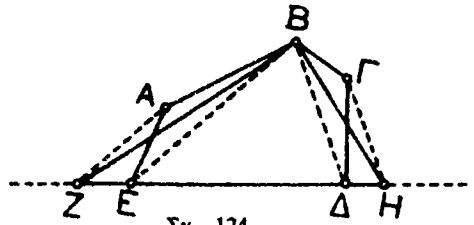
Ἐὰν ἀχθῆ ἡ διαγώνιος $Α_1Α_3$, χωρίζουσα τὸ δοθὲν πολύγωνον εἰς ἓν τρίγωνον $Α_1Α_2Α_3$ καὶ εἰς ἓν πολύγωνον $Α_1Α_3Α_4\dotsΑ_n$, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κορυφή $Α_3$ δύναται νὰ μετακινηθῆ ἐπὶ τῆς $Α_2Χ$ παρ/λου τῆ $Α_1Α_3$ χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγ. $Α_1Α_2Α_3$ (§ 97, α'), ἄρα οὔτε καὶ τοῦ ὅλου πολυγώνου (ἀφοῦ τὸ $Α_1Α_3Α_4\dotsΑ_n$ μένει ἀμετάβλητον). Ἐὰν λοιπὸν μεταφέρωμεν τὴν κορυφήν $Α_3$ εἰς τὸ σημεῖον $Β$, καθ' ὃ ἡ παράλληλος $Α_2Χ$ τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς $Α_4Α_3$, τὸ τρίγωνον $Α_1Α_2Α_3$ ἰσο-

δυναμει πρὸς τὸ τρ. A_1BA_3 καὶ τὸ πολύγωνον $A_1A_2A_3A_4\dots A_n$ ἰσοδυναμει πρὸς τὸ πολύγωνον $A_1BA_4\dots A_n$ (διότι, ἀπλῶς, τὸ τρίγωνον $A_1A_2A_3$ ἀντικατεστάθη ὑπὸ τοῦ ἰσοδύναμου τοῦ A_1BA_3). Οὕτω φθάνομεν εἰς πολύγωνον $A_1BA_4\dots A_n$ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $A_1A_2A_3A_4\dots A_n$, ἀλλ' ἔχον μίαν πλευρὰν ὀλιγωτέραν.



Σχ. 123

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὐρίσκομεν ἰσοδύναμον πολύγωνον πρὸς τὸ $A_1BA_4\dots A_n$ καὶ ἔχον μίαν ἀκόμη πλευρὰν ὀλιγωτέραν. Ἐπομένως, ὅσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν τὸ ἀρχικὸν πολύγωνον ἔχη, ἐλαττοῦντες διαδοχικῶς τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν του διὰ τῆς ὡς ἄνω κατασκευῆς φθάνομεν εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον. Τὸ σχ. 124 δεικνύει τὴν κατασκευὴν τριγώνου BZH ἰσοδύναμου πρὸς δοθὲν πεντάγωνον $ABΓΔΕ$.

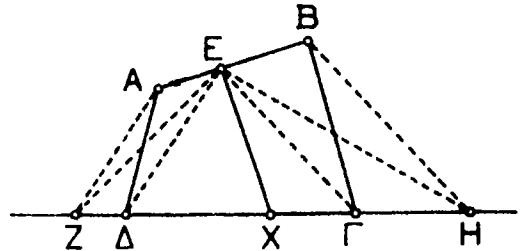


Σχ. 124

105. Ἐφαρμογή.— Νὰ διαيرهθῆ δοθὲν κυρτὸν τετράπλευρον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας διαρχομένης διὰ δεδομένου σημείου τῆς περιμέτρου του.

Λύσις. Ἐστω $ABΓΔ$ τὸ δοθὲν τετράπλευρον καὶ E τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB .

Ἐὰς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ζητούμενη εὐθεῖα EX , τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν $ΔΓ$ εἰς X , ὅποτε πρέπει τὰ τετράπλευρα EAX καὶ $EBΓX$ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἐὰς μετασχηματίσωμεν ταῦτα εἰς ἰσοδύναμα τρίγωνα. Φέρομεν πρὸς τοῦτο τὴν $AZ//EA$ καὶ $BH//EG$ (σχ. 125), ὅποτε (\cong δηλοῖ : ἰσοδύναμον),



Σχ. 125

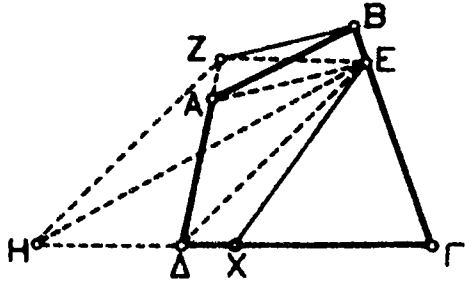
$$EAX \cong EZX \text{ καὶ } EBΓX \cong EHX.$$

Ἐπειδὴ $EAX \cong EBΓX \Rightarrow EZX \cong EHX$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἰσοδύναμα τρίγωνα EZX καὶ EHX ἔχουν τὸ αὐτὸ ἕκ τοῦ E ὕψος, διὰ τοῦτο θὰ ἔχουν καὶ ἴσας βάσεις, δηλ. $ZX = XH$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ σημεῖα Z καὶ H εἶναι γνωστά, τὸ ζητούμενον σημεῖον X εἶναι τὸ μέσον τοῦ γνωστοῦ τμήματος ZH .

Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν $ΕΔ$ καὶ κατόπιν $ΑΖ//ΕΔ$ (σχ. 125). Ὅμοίως, τὴν $ΕΓ$ καὶ τὴν $ΒΗ//ΕΓ$. Ἐάν τὸ μέσον $Χ$ τοῦ $ΖΗ$ ἀνήκῃ εἰς τὴν πλευρὰν $ΔΓ$, τότε ἡ $εὐθεῖα ΕΧ$ εἶναι ἡ ζητούμενη.

Ἄποδειξις εὐκόλος.

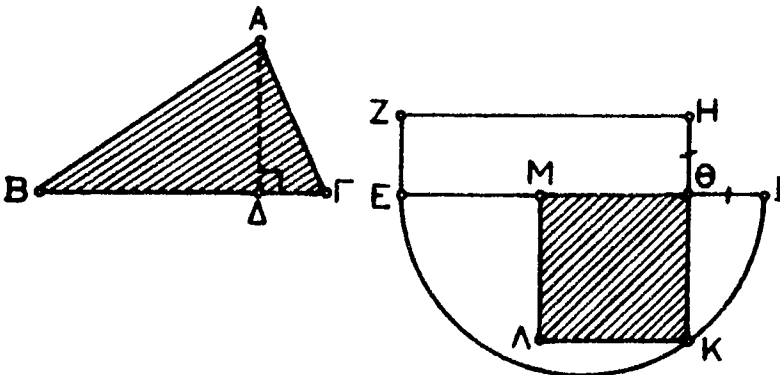
2α Περίπτωσις. Ἐάν κατὰ τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν συμβῆ τὸ μέσον τῆς $ΖΗ$ νὰ κέῃται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς $ΔΓ$, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ζητούμενη εὐθεῖα δὲν περατοῦται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $ΔΓ$, ἀλλ' ἐπὶ μιᾶς τῶν δύο ἄλλων. Συνεπῶς πρέπει νὰ γίνῃ νέα ἀνάλυσις μὲ νέαν προϋπόθεσιν, καθ' ἣν ἡ $ΕΧ$ δὲν διαιρεῖ τὸ $ΑΒΓΔ$ εἰς δύο τετράπλευρα, ἀλλ' εἰς ἓν τρίγωνον καὶ εἰς ἓν πεντάγωνον, ἰσοδύναμα, ὡς εἰς τὸ σχ. 126. Καὶ πάλιν ὁμοίως τὸ πεντάγωνον $ΒΑΔΧΕ$ μετασχηματίζεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον τετράπλευρον $ΕΖΔΧ$ ($ΒΖ//ΕΑ$) καὶ τοῦτο εἰς τὸ ἰσοδύναμον τρίγωνον $ΕΗΧ$, ὅπου $Η$ κατασκευάσιμον σημεῖον ($ΖΗ//ΕΔ$). Ἄρα πάλιν τὸ $Χ$ εἶναι τὸ μέσον τοῦ γνωστοῦ τμήματος $ΗΓ$.



Σχ. 126

106. (Θ)— Πᾶν κυρτὸν πολύγωνον τετραγωνίζεται. Δηλ. διὰ πεπερασμένου πλήθους γεωμετρικῶν κατασκευῶν φθάνομεν εἰς τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν πολύγωνον.

Ἄποδειξις. Τὸ δοθὲν πολύγωνον δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον $ΑΒΓ$ διὰ τῆς μεθόδου τῆς § 104. Τὸ τρίγωνον $ΑΒΓ$ μετα-



Σχ. 127

σχηματίζεται εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον παρ/μον $ΕΖΗΘ$ (σχ. 127) ἔχον βάσιν $ΕΘ=ΒΓ$ καὶ ὕψος $ΕΖ$, τὸ ἡμισυ τοῦ ὕψους $ΑΔ$ τοῦ τρ. $ΑΒΓ$. Τὸ ὀρθογώνιον $ΕΖΗΘ$ μετασχηματίζεται εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον $ΘΚΑΜ$ ἔχον πλευρὰν $ΘΚ$ μέσσην ἀνάλογον τῶν διαστάσεων $ΕΘ$ καὶ $ΘΗ$ ($=ΘΙ$)

τοῦ ὀρθογωνίου (§ 75, γ'). Ἐπειδὴ $\Theta K^2 = E\Theta \cdot \Theta I = E\Theta \cdot \Theta H$, ἔχομεν κατὰ σειράν: $E\mu\beta\Theta K A M = K\Theta^2 = E\Theta \cdot \Theta H = B\Gamma \cdot A\Delta/2 = E\mu\beta A B \Gamma = E\mu\beta$. τοῦ δοθέντος πολυγώνου.

Πόρισμα. Εἰς κάθε πολύγωνον ἀντιστοιχεῖ μονοσημάντως ἓν εὐθύγραμμον τμήμα K (ἀνεξάρτητον τῆς μονάδος μετρήσεως) τοιοῦτον, ὥστε $E = K^2$, ὅπου E τὸ ἔμβαδόν τοῦ πολυγώνου. Τὸ K εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδύναμου πρὸς τὸ πολύγωνον τετραγώνου.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

455. Νά δειχθῆ ὅτι τὸ ἔμβαδόν παντός περὶ κύκλον περιγεγραμμένου πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ πολυγώνου ἐπὶ τὴν ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

456. Τὸ τετράπλευρον τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου ἔχει ἔμβαδόν τὸ ἡμισυ τοῦ ἔμβαδου τοῦ ἀρχικοῦ.

457. Πᾶν κυρτὸν τετράπλευρον ἰσοδυναμεῖ πρὸς τρίγωνον ἔχον δύο πλευρὰς ἀντιστοιχῶς ἴσας πρὸς τὰς δύο διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου.

458. Ἐάν ἐκ τυχόντος σημείου E τῆς διαγωνίου $A\Gamma$ τοῦ παραλληλογράμμου $A B \Gamma A$ ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς, ἐκ τῶν σχηματιζομένων παρ/μῶν τὰ κείμενα πρὸς τὰς κορυφὰς B καὶ Δ εἶναι ἰσοδύναμα.

459. Ἐάν ἐκ τῶν κορυφῶν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ὀξυγωνίου τριγώνου ἀχθοῦν αἱ διάμετροι $A A'$, $B B'$, $\Gamma \Gamma'$, τὸ ἐξάγωνον $A \Gamma' B A' \Gamma B' A$ ἔχει ἔμβαδόν διπλάσιον τοῦ ἔμβαδου τοῦ τριγώνου.

460. Ἐάν ἐπὶ τῶν πλευρῶν $B\Gamma$ καὶ $\Gamma\Delta$ τοῦ ὀρθογωνίου $A B \Gamma \Delta$ ληφθοῦν ἀντιστοιχῶς τὰ σημεία E καὶ Z , νά δειχθῆ ἡ ἰσότης:

$$\text{ἐμβ. } (A B \Gamma \Delta) = 2\text{ἐμβ. } (A E Z) + B E \cdot \Delta Z.$$

461. Ἐάν ληφθοῦν ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου M τῆς πλευρᾶς $A\Gamma$ τοῦ τρ. $A B \Gamma$ τμήματα $M\Delta = M E$, ἀχθῆ δὲ ἡ ΔZ πα/λος τῆ $A B$ (τὸ Z ἐπὶ τῆς $B\Gamma$), ἡ εὐθ. $A Z$ θὰ τέμνη τὴν $B E$ εἰς σημεῖον H τοιοῦτον, ὥστε τὸ τρίγωνον $A B H$ νά εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράπλευρον $H Z \Gamma E$.

462. Νά διαιρεθῆ παρ/μον εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς του.

463. Νά διαιρεθῆ παρ/μον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας παρ/λου πρὸς δοθείσαν εὐθείαν.

464. Ἐάν δύο κυρτῶν τετραπλεύρων τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν συμπίπτουν, τὰ τετράπλευρα εἶναι ἰσοδύναμα. Ἐάν δύο κυρτῶν ἐξαγώνων τὰ μέσα τῶν πλευρῶν συμπίπτουν, τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα.

465. Δοθέντος τριγώνου μὴ ἰσοπλεύρου νά κατασκευασθῆ ἄλλο ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ, ἀλλὰ μὲ μικροτέραν περίμετρον. Ὅμοίως διὰ πολύγωνον.

466. Ἐάν διὰ τοῦ μέσου ἐκάστης τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου ἀχθῆ παρ/λος πρὸς τὴν ἄλλην καὶ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν παρ/λων τούτων ἐνωθῆ μὲ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, τότε τὸ τετράπλευρον διαιρεῖται εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα μέρη.

467. Νά δειχθῆ ὅτι διὰ τυχόν σημείου E τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος τοῦ συνδέοντος τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου $A B \Gamma \Delta$ ὀφίσταται ἡ σχέσις:

$$E\mu\beta E A B + E\mu\beta E \Gamma \Delta = E\mu\beta E B \Gamma + E\mu\beta E A \Delta.$$

468. Εἰς δοθέντα κύκλον (K , R) ἐγγράφομεν τυχόν ὀρθογώνιον παρ/μον καὶ εἰς τὰς

κορυφάς του φέρομεν έφαπτομένας του κύκλου. Νά δειχθῆ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων ὀριζομένου ῥόμβου εἶναι σταθερὸν.

469. Εἰς δοθέντα κύκλον νά ἐγγραφῆ ὀρθογώνιον παρ/μον, ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

470. Εἰς δοθέντα κύκλον νά ἐγγραφῆ τραπέζιον, οὗτινος δίδεται τὸ ἐμβαδὸν c^2 καὶ ἡ μία τῶν μὴ παρ/λων πλευρῶν.

471. Νά διαιρεθῆ τραπέζιον εἰς δύο μέρη, ὧν τὰ ἐμβαδὰ ἔχουν λόγον $\mu : \nu$ (μ, ν δοθέντα τμήματα), δι' εὐθείας παρ/λου πρὸς τὰς βάσεις του.

472. Νά διαιρεθῆ δοθὲν κυρτὸν τετράπλευρον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας παρ/λου πρὸς μίαν διαγώνιον.

473. Δοθέντος τρ. $AB\Gamma$ καὶ σημείου I ἐντὸς αὐτοῦ, νά εὑρεθῆ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε ἡ τεθλασμένη γραμμὴ AID νά διαιρῆ τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη, ὧν τὰ ἐμβαδὰ νά ἔχουν λόγον $\mu : \nu$ (μ, ν δοθέντα τμήματα).

474. Δοθέντος παρ/μου ἐνοῦμεν τὸ μέσον ἐκάστης πλευρᾶς μὲ τὰς δύο ἀπέναντι κορυφάς. Νά δειχθῆ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων σχηματιζόμενον ὀκτάγωνον ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἐν ἔκτον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου.

475. Εἰς κύκλον διαμέτρου d εἶναι ἐγγεγραμμένον κυρτὸν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ ἔχον $AB = AD$ καὶ $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Ἡ διαγώνιος $A\Gamma$ χωρίζεται ὑπὸ τῆς $B\Delta$ εἰς λόγον $1 : 2$. Νά δειχθῆ ὅτι τὸ $AB\Gamma\Delta$ εἶναι περιγράψιμον καὶ νά ὑπολογισθῆ, συναρτήσῃ τοῦ d , ἡ ἄκτις τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.

476. Νά ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν τρ. $AB\Gamma$, οὗτινος $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$ καὶ $\hat{A} = 30^\circ$ ἢ 45° ἢ 60° ἢ 120° .

477. Δίδεται τρ. $AB\Gamma$, οὗτινος $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, $B\Gamma = 5$ m. Κατασκευάζομεν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ἐπὶ μὲν τῆς ὑποτείνουσῆς του τετράγωνον $B\Gamma\Delta E$, ἐπὶ δὲ τῶν ἄλλων πλευρῶν ἰσόπλευρα τρίγωνα $A\Gamma H$ καὶ ABZ . Νά ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου $E\Delta HZ$.

478. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς μικροτέρας βάσεως $\Delta\Gamma$ τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ προσδιορίσατε σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε ἡ εὐθεῖα AM νά διαιρῆ τὸ τραπέζιον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

479. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA κυρτοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ λαμβάνομεν σημεῖα M , N , P , K τοιαῦτα, ὥστε : $AM/MB = BN/NG = GP/P\Delta = \Delta K/KA = \mu/\nu$. Νά ὑπολογισθῆ ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ $MNP K$ πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $AB\Gamma\Delta$.

480. Ἐάν εἰς τρ. $AB\Gamma$ εἶναι $B\Gamma = (AB + A\Gamma)/2$, τότε παντὸς σημείου M τῆς διχοτόμου AD τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου εἶναι σταθερὸν. (Τὸ M ἑσωτερικὸν τοῦ τρ. $AB\Gamma$).

481. Νά δειχθῆ ὅτι, ἂν δοθῆ τὸ παρ/μον μὲ κορυφάς τὰ περίκεντρα τῶν τεσσάρων τριγῶνων, εἰς α χωρίζεται κυρτὸν τετράπλευρον ὑπὸ τῶν διαγωνίων του, τότε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ὀρισμένον.

482. i) Τύπος τοῦ τραπέζιου. Ἐστάσαν AB καὶ $\Gamma\Delta$ αἱ βάσεις τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ καὶ EZ τὸ ἐντὸς τοῦ τραπέζιου μέρος εὐθείας παρ/λου πρὸς τὰς βάσεις καὶ διαιρούσης τὰς μὴ παρ/λους πλευρᾶς AD καὶ $B\Gamma$ εἰς λόγον $AE : EA = \mu : \nu$. Νά δειχθῆ ὅτι τότε ἰσχύει :

$$EZ = \frac{AB \cdot \nu + \Gamma\Delta \cdot \mu}{\mu + \nu}$$

ii) Διὰ τοῦ ἐγκέντρου τριγώνου $AB\Gamma$ ἀγεται εὐθεῖα (ϵ) ἀφήνουσα τὰς κορυφάς B καὶ Γ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς. Ἐάν x , y , z αἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν A , B , Γ ἀπὸ τῆς (ϵ) καὶ α , β , γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν $B\Gamma$, ΓA , AB τοῦ τριγώνου, νά δειχθῆ ὅτι $\beta y + \gamma z = \alpha x$.

iii) Εἰς τὸ ἀνωτέρω τρίγωνον φέρομεν ἐφαπτομένην τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου παρ/λον πρὸς τὴν (ϵ) καὶ ἀφήνουσαν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τὰ B καὶ Γ . Ἐάν α' , β' , γ' εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν A , B , Γ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης, νά δειχθῆ ὅτι $2E\mu\beta(AB\Gamma) = \beta\beta' + \gamma\gamma' - \alpha\alpha'$.

483. Ἐπί τῆς πλευρᾶς AB τετραγώνου ABΓΔ πλευρᾶς α λαμβάνομεν σημεῖον Z τοιοῦτον, ὥστε $AZ=2\alpha/3$ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς BΓ σημεῖον E τοιοῦτον, ὥστε $BE=2\alpha/3$. Ἄφοῦ δεῖχθῆ ὅτι αὐ εὐθεῖαι ΔZ καὶ AE τέμνονται καθέτως εἰς M, νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβ (ΔMEΓ) συναρτήσῃ τοῦ α.

484. Κυριῶς τετραπλεύρου ABΓΔ αὐ γωνίαι $\widehat{B}, \widehat{\Delta}$ εἶναι ὀρθαί, αὐ δὲ AB, BΓ ἴσαι. Νὰ δεῖχθῆ ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τοῦ ABΓΔ ἴσούται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἔμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου μὲ πλευρὰν ἴσην πρὸς BA.

485. Δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος AB ἔχοντος μέσον τὸ E, φέρομεν διὰ τῶν A καὶ B σταθερὰς ἡμιευθείας παρ/λους καὶ ὁμορρόπους καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν σημεῖα A', B' τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τραπέζιου AA'B'B νὰ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς σ^2 . Ποῖος ὁ γ.τ. τῆς προβολῆς τοῦ E ἐπὶ τὴν ευθ A'B';

486. Συναρτήσῃ τῶν ἀκτίων R, ρ δύο κύκλων νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ σχηματιζομένου ἀπὸ τὰς δύο κοινὰς ἐσωτερικὰς ἐφαπτομένας καὶ μιᾶς ἐξωτερικῆς, ὑποτιθεμένου ὅτι αὐ δύο ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

487. Νὰ δεῖχθῆ ὅτι τὸ ἔμβαδὸν παντὸς ὀξυγωνίου τριγώνου ἴσούται μὲ τὴν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου του κύκλου ἐπὶ τὴν ἡμιπεριμετρον, τ', τοῦ ὀρθικοῦ του τριγώνου.

488. Νὰ δεῖχθῆ ὅτι δι' ὅλα τὰ ἰσοπερίμετρα τρίγωνα ABΓ τὰ ἐγγεγραμμένα εἰς δοθέντα κύκλον, τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου $O_1O_2O_3$ τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ παράκεντρα ἑκάστου ἐκ τῶν τρ. ABΓ εἶναι σταθερὸν.

(Ἵκός. Βλ. προηγουμένην ἀσκησιν).

489. Δοθέντος τριγώνου ABΓ καὶ τριῶν σημείων M, N, P ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB, BΓ, ΓA τοιούτων, ὥστε $AM/AB=BN/BΓ=ΓP/ΓA=\lambda$ i) Εὑρετε τὸ ἔμβ (MNP) συναρτήσῃ τοῦ λ καὶ τοῦ ἔμβαδου E τοῦ τριγ. ABΓ. ii) Τὴν τιμὴν τοῦ λ, δι' ἣν τὸ ἔμβ MNP καθίσταται ἐλάχιστον. iii) Ἄν ἀχθοῦν ἐκ τῶν M καὶ N ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΓ καὶ AB, εὑρετε τὸν τόπον τῆς τομῆς τῶν, ὅταν τὸ λ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως 1.

ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

107. α) Ὅρισμός.— Δύο κυρτὰ πολύγωνα, $A_1A_2A_3\dots A_n$ καὶ $B_1B_2B_3\dots B_n$, λέγονται ὁμοία, ὅταν ὑπάρχῃ μία ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν ὁμοταξίων κορυφῶν τῶν: $A_1 \rightarrow B_1, A_2 \rightarrow B_2, \dots, A_n \rightarrow B_n$, κατὰ τὴν ὁποίαν αὐ μὲν πλευραὶ τοῦ πρώτου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς τοῦ δευτέρου, αὐ δὲ γωνίαι τοῦ πρώτου εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους γωνίας τοῦ δευτέρου.

(Ἦτοι, ὅταν $A_1A_2/B_1B_2 = A_2A_3/B_2B_3 = \dots = A_nA_1/B_nB_1 = \lambda$ καὶ $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1, \widehat{A}_2 = \widehat{B}_2, \dots, \widehat{A}_n = \widehat{B}_n$. Συντόμως: ἔχουν τὰς πλευρὰς τῶν ἀναλόγους καὶ τὰς γωνίας τῶν ἴσας).

Δύο οἰαιδήποτε ἀντίστοιχοι κορυφαί: A_ρ, B_ρ ($\rho = 1 \dots n$) ἢ πλευραὶ:

$A_\rho A_{\rho+1}, B_\rho B_{\rho+1}$ ($\rho = 1 \dots n-1$) ἢ γωνίαι: $\widehat{A}_\rho = \widehat{B}_\rho$ ($\rho = 1 \dots n$) λέγονται ὁμόλογοι. Ὁ δὲ σταθερὸς λόγος λ τυχούσης πλευρᾶς τοῦ πρώτου πολυγώνου πρὸς τὴν ὁμόλογον τοῦ δευτέρου λέγεται λόγος ὁμοιότητος τοῦ πρώτου ὡς πρὸς τὸ δεύτερον.

β) (Θ) — Ἐάν δύο κυρτὰ πολύγωνα εἶναι ὁμοία καὶ ἐκ μιᾶς κορυφῆς τοῦ ἐνὸς ἀχθοῦν πᾶσαι αὐ δυνατὰ διαγώνιοι αὐτοῦ, ἐκ δὲ τῆς ὁμόλογου κο-

ρυφής του άλλου άχθουδν έπίσης πάσαι αί δυναται διαγώνιοι, τότε τά δύο πολύγωνα χωρίζονται εις ίσον πλήθος τριγώνων, άντιστοιχώς όμοίων.

‘Απόδειξις. Έστωσαν τά όμοια κυρτά πολύγωνα $A_1A_2\dots A_n$ και $B_1B_2\dots B_n$

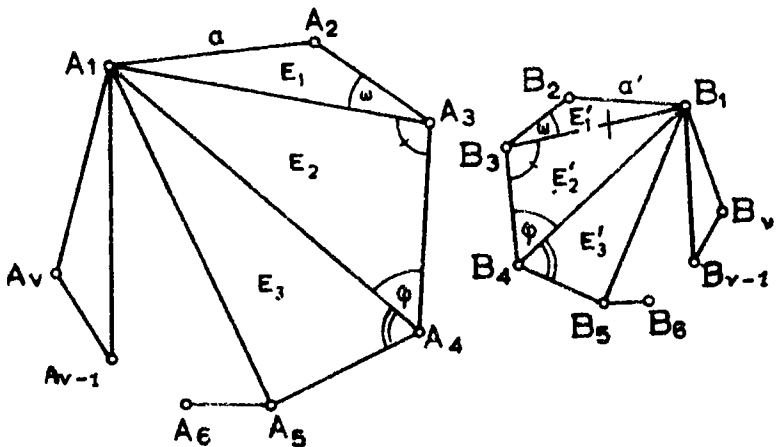
$$B_n \text{ έχοντα : } \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \dots = \frac{A_nA_1}{B_nB_1} \text{ και } \widehat{A_nA_1A_2} = \widehat{B_nB_1B_2},$$

$A_1\widehat{A_2A_3} = B_1\widehat{B_2B_3}, \dots, A_{n-1}\widehat{A_nA_1} = B_{n-1}\widehat{B_nB_1}$. Διά τών έκ του A_1 άγομένων διαγωνίων, χωρίζεται τό πρώτον εις τά $n-2$ τρίγωνα $A_1A_2A_3, A_1A_3A_4, \dots, A_1A_{n-1}A_n$ και διά τών έκ του B_1 διαγωνίων, χωρίζεται τό δεύτερον εις $n-2$ έπίσης τρίγωνα $B_1B_2B_3, B_1B_3B_4, \dots, B_1B_{n-1}B_n$. Βλέπομεν ότι τά δύο πρώτα τρίγωνα $A_1A_2A_3$ και $B_1B_2B_3$ είναι όμοια ώς έχοντα δύο πλευράς άναλόγους και τās όπ’ αυτών περιεχομένας γωνιάς ίσας. Έπομένως $A_2\widehat{A_3A_1} = B_2\widehat{B_3B_1}$ και έπειδή $A_2\widehat{A_3A_4} = B_2\widehat{B_3B_4} \Rightarrow A_1\widehat{A_3A_4} = B_1\widehat{B_3B_4}$ (σχ. 128).

Τά δεύτερα τρίγωνα : $A_1A_3A_4$ και $B_1B_3B_4$ έχουν λοιπόν μίαν γωνίαν ίσην, άλλ’ έχουν και τās περιεχούσας αυτήν πλευράς άναλόγους, διότι :

$$\frac{A_2A_4}{B_3B_4} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} \text{ (έξ ύποθέσεως) και } \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_1}{B_3B_1} \text{ (έκ τών προηγουμένων$$

$$\text{όμοίων τριγώνων), δηλ. } \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \frac{A_3A_1}{B_3B_1}. \text{ Έπομένως } \text{τρ.}A_1A_3A_4 \approx \text{τρ.}B_1B_3B_4.$$



Σχ. 128

Έκ τής όμοιότητος τών τριγώνων $A_1A_3A_4$ και $B_1B_3B_4$ προκύπτει κατά τόν ίδιον, ώς άνωτέρω, τρόπον ή όμοιότητις τών τριγώνων $A_1A_4A_5$ και $B_1B_4B_5$

καὶ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων προκύπτει ἡ ὁμοιότης τῶν ἐπομένων τῶν κ.ο.κ. μέχρι τῶν τελευταίων :

$$A_1 A_{v-1} A, \text{ καὶ } B_1 B_{v-1} B.$$

γ') (Θ) — Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων πλευρῶν τῶν (ἢ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος τῶν δύο πολυγώνων).

Δηλαδή, ἂν E εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου καὶ a μία πλευρὰ αὐτοῦ, E' εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὁμοίου του καὶ a' ἡ πρὸς τὴν a ὁμολόγος πλευρὰ τοῦ ὁμοίου του, τότε :

$$\frac{E}{E'} = \frac{a^2}{a'^2} = \lambda^2, \text{ ὅπου } \lambda = \frac{a}{a'} = \text{λόγος ὁμοιότητος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δευτέρον.}$$

Ἀπόδειξις. Τὰ δύο ὁμοία πολύγωνα χωρίζονται, ὡς εἶδομεν εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα ἀντιστοίχως ὁμοία (σχ. 128). Ἐὰν καλέσωμεν $E_1, E_2, E_3 \dots E_{v-2}$ κατὰ σειράν, τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται τὸ πρῶτον καὶ $E'_1, E'_2, \dots E'_{v-2}$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἀντιστοίχως ὁμοίων τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται τὸ δεύτερον (σχ. 128), τότε θὰ ἔχωμεν (§ 97) :

$$\frac{E_1}{E'_1} = \left(\frac{A_1 A_2}{B_1 B_2} \right)^2 = \lambda^2, \frac{E_2}{E'_2} = \left(\frac{A_3 A_4}{B_3 B_4} \right)^2 = \lambda^2, \dots \frac{E_{v-2}}{E'_{v-2}} = \left(\frac{A_v A_1}{B_v B_1} \right)^2 = \lambda^2,$$

ἐξ ὧν ἔπεται (κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἰσῶν κλασμάτων) :

$$\lambda^2 = \frac{E_1}{E'_1} = \frac{E_2}{E'_2} = \dots = \frac{E_{v-2}}{E'_{v-2}} = \frac{E_1 + E_2 + \dots + E_{v-2}}{E'_1 + E'_2 + \dots + E'_{v-2}} = \frac{E}{E'}$$

(διότι $E_1 + E_2 + \dots + E_{v-2} = E$ καὶ $E'_1 + E'_2 + \dots + E'_{v-2} = E'$). Ἀλλὰ $\lambda = \frac{a}{a'}$, συνεπῶς $\frac{E}{E'} = \frac{a^2}{a'^2} = \lambda^2$. δ.ἔ.δ.

δ') Γενικὴ θεωρία τῆς ὁμοιότητος τῶν σχημάτων δίδεται εἰς τοὺς Σημειακοὺς μετασχηματισμοὺς.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

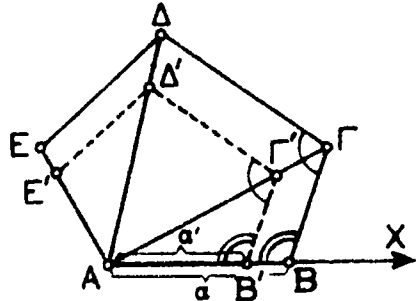
108. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὁμοιον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον δοθέντα λόγον ὁμοιότητος πρὸς τὸ δοθὲν ἢ ἔχον μίαν πλευρὰν δοθεῖσαν ὁμολόγον πρὸς μίαν ὀρισμένην πλευρὰν τοῦ δοθέντος.

Λύσις. Ἐστω $ΑΒΓΔΕ$ τὸ δοθὲν πολύγωνον καὶ $\lambda = \frac{\mu}{\nu}$ (μ, ν δοθέντα

τμήματα) ὁ δοθεὶς λόγος ὁμοιότητος. Ἄς φέρωμεν ἐκ τοῦ Α πάσας τὰς δυνατὰς διαγωνίους τοῦ δοθέντος καὶ ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς ἀκτίνος (Α, Β) (σχ. 129) σημεῖον Β' τοιοῦτον, ὥστε :

$$AB'/AB = \mu/\nu.$$

Φέρομεν τώρα ἐκ τοῦ Β' εὐθείαν //ΒΓ, τέμνουσαν τὴν εὐθ ΑΓ εἰς Γ', ἐκ τοῦ Γ' παράλληλον τῇ ΓΔ τέμνουσαν τὴν εὐθ ΑΔ εἰς Δ' καὶ ἐκ τοῦ Δ' εὐθείαν //ΔΕ τέμνουσαν τὴν εὐθ ΑΕ εἰς Ε'. Τὸ πολύγωνον ΑΒ'Γ'Δ'Ε' εἶναι ὁμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ, διότι ἔχει κατὰ σειρὰν τὰς πλευράς του ἀναλόγους πρὸς τὰς τοῦ



Σχ. 129

$$ΑΒΓΔΕ : \frac{ΑΒ'}{ΑΒ} = \frac{Β'Γ'}{ΒΓ} = \frac{ΑΓ'}{ΑΓ} = \frac{Γ'Δ'}{ΓΔ} = \frac{ΑΔ'}{ΑΔ} = \frac{Δ'Ε'}{ΔΕ} = \frac{ΑΕ'}{ΑΕ} = \frac{\mu}{\nu}$$

καὶ τὰς γωνίας του ἴσας πρὸς τὰς ἀντιστοίχους τοῦ ΑΒΓΔΕ (ὡς ἐχούσας τὰς πλευράς των παρ/λους καὶ ὁμορρόπους).

Καὶ πᾶν πολύγωνον ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ'Γ'Δ'Ε' εἶναι ὁμοιον πρὸς τὸ δοθὲν μὲ λόγον ὁμοιότητος $\lambda = \mu/\nu$.

—Ἄν δίδεται μία πλευρὰ α' τοῦ ζητουμένου, ὁμόλογος πρὸς τὴν ΑΒ = α τοῦ δοθέντος, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἀκτίνος (Α, Β) τμῆμα ΑΒ' = α' καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν ἴδιαν κατασκευὴν.

109. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὁμοιον πρὸς δοθὲν καὶ ἔχον δοθὲν ἔμβαδὸν ἴσον πρὸς c^2 .

Λύσις. Τὸ δοθὲν πολύγωνον ἔχει γνωστὸν ἔμβαδόν, k^2 , ὅπου k ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου του τετραγώνου, δυναμένη νὰ κατασκευασθῇ (§ 106, πόρισμα). Ἐστω a μία πλευρὰ τοῦ δοθέντος πολυγώνου καὶ ἔστω x ἡ πρὸς τὴν a ὁμόλογος πλευρὰ τοῦ ζητουμένου ὁμοίου πολυγώνου. Ἐπειδὴ τὰ ἔμβαδα τῶν δύο τούτων πολυγώνων εἶναι ἀντιστοίχως k^2 καὶ c^2 (γνωστά), θὰ ἔχωμεν (§ 107, γ) :

$$\frac{k^2}{c^2} = \frac{a^2}{x^2} \Rightarrow \frac{k}{c} = \frac{a}{x}.$$

Ἐπομένως ἡ πλευρὰ x κατασκευάζεται ὡς τετάρτη ἀνάλογος τῶν k , c , a . Γνωρίζοντες τώρα μίαν πλευρὰν x τοῦ ζητουμένου, ὁμόλογον πρὸς μίαν ὠρισμένην πλευρὰν a τοῦ δοθέντος, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ζητούμενον συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην κατασκευὴν τῆς § 108.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

490. Αί περιμετροί δύο όμοίων πολυγώνων έχουν λόγον, όν λόγον έχουν δύο όμοιοι πλευραί τών πολυγώνων.

491. Δοθέντων δύο όμοίων πολυγώνων νά κατασκευασθῆ τρίτον, όμοιον πρός τά δοθέντα καί ἔχον ἔμβαδόν ἴσον πρός τό ἄθροισμα ἢ τήν διαφοράν τών ἔμβαδών τών δύο δοθέντων.

492. Νά κατασκευασθῆ πολύγωνον όμοιον πρός δοθέν καί ἔχον ἔμβαδόν τά μ/ν τοῦ ἔμβαδοῦ τοῦ δοθέντος, ὅπου μ, ν δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα.

493. Ἐάν κυρτοῦ τετραπλεύρου αἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, νά δειχθῆ ὅτι πάντα τά ὀρθογώνια παρ/μα τά περιγεγραμμένα περι τό τετράπλευρον εἶναι όμοια μεταξύ των.

494. Νά διαιρεθῆ τραπέζιον εἰς δύο όμοια τραπέζια δι' εὐθείας παρ/λου πρός τάς βάσεις του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙV

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΝ ΚΥΚΛΩ — ΔΥΝΑΜΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟΝ — ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

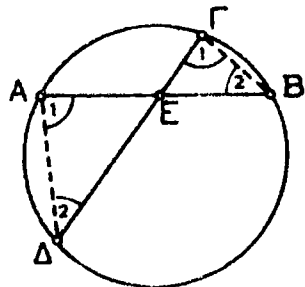
ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟΝ

110. α') Θεώρημα τῶν τεμνομένων χορδῶν καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ. (Θ)—Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου AB καὶ $\Gamma\Delta$ τέμνονται εἰς τὸ E , τότε ἰσχύει ἡ σχέσις: $EA \times EB = EG \times ED$ (ἤτοι τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς μιᾶς ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς ἄλλης).

Ἀντιστρόφως: Ἐὰν δύο τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$ τέμνονται εἰς E καὶ ἂν ἰσχύῃ ἡ ἰσότης $EA \times EB = EG \times ED$, τότε τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά.

Ἀπόδειξις. i) Ἀπὸ τὸ κυρτόν, ἐγγράψιμον, τετράπλευρον $A\Gamma B\Delta$ (σχ. 130) ἔχομεν ὅτι

$$\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1 \text{ καὶ } \widehat{\Delta}_2 = \widehat{B}_2 \Rightarrow \text{τρ. } EA\Delta \approx \text{τρ. } EB\Gamma \\ \Rightarrow \frac{EA}{EG} = \frac{ED}{EB} \Rightarrow EA \times EB = EG \times ED.$$



Σχ. 130

ii) Τὸ τετράπλευρον $A\Gamma B\Delta$ (σχ. 131) εἶναι κυρτόν, διότι αἱ διαγώνιοί του τέμνονται, τὰ δὲ τρίγωνα $EA\Gamma$ καὶ

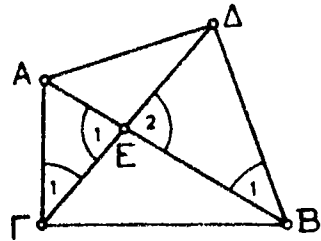
ΕΔΒ είναι όμοια ός έχοντα μίαν γωνίαν ίσην ($\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$) και τας περιεχούσας αυτήν πλευράς αναλόγους, δηλ.

$$\frac{EA}{EG} = \frac{ED}{EB} \quad (\text{λόγω τής ύποθέσεως :}$$

$$EA \times EB = EG \times ED). \text{ Έπειδή : } \frac{EA}{ED} =$$

$$\frac{EG}{EB}, \text{ έπεται ότι αί } EA \text{ και } ED \text{ είναι}$$

όμόλογοι πλευραί και συνεπώς αί άπέναντι αútων γωνίαι $\widehat{\Gamma}_1$ και \widehat{B}_1 ίσαι. Άρα τó κυρτόν τετράπλευρον ΑΔΒΓ είναι έγγράψιμον.



Σχ. 131

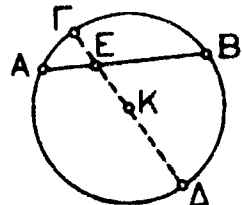
β) Πρόσισμα. — Έάν διά σημείου Ε κειμένου έντός κύκλου (Κ, R) άχθή τυχόσα χορδή ΑΒ, ίσχύει ή σχέσις :

$$EA \times EB = R^2 - EK^2$$

(δηλ. τó γινόμενον τών δύο τμημάτων χορδής διά τού Ε διερχομένης είναι σταθερόν και ίσον πρός $R^2 - EK^2$).

Διότι, άν άχθή και δευτέρα χορδή ΓΕΔΚ (σχ. 132), τó άνωτέρω θεώρημα δίδει :

$$\begin{aligned} &= EA \times EB = EG \times ED = \\ &= (K\Gamma - KE)(K\Delta + KE) = \\ &= (R - KE)(R + KE) = R^2 - KE^2 = \text{σταθερόν.} \end{aligned}$$



Σχ. 132

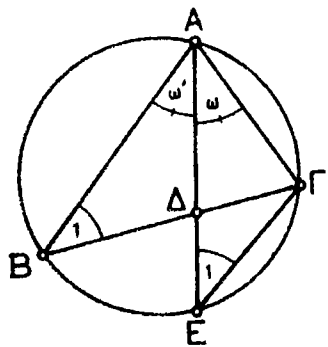
γ) Ύπολογισμός τής διχοτόμου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 133)

Άν ή έσωτερική διχοτόμος ΑΔ προεκτεινομένη τέμνη τήν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εις Ε, τότε τρ. ΑΕΓ \approx τρ. ΑΒΔ, διότι $\omega = \omega'$ και $\widehat{E}_1 = \widehat{B}_1$. Έκ τής όμοιότητος ταύτης έχομεν :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AG}{AD} \text{ ή } \frac{AD + DE}{AB} = \frac{AG}{AD} \Rightarrow$$

$AD^2 + AD \cdot DE = AB \cdot AG$. Άπό τó (Θ) τών τεμνομένων χορδών : $AD \cdot DE = BD \cdot DG$ και ή άνωτέρω σχέσις γίνεται :

$$\begin{aligned} AD^2 + BD \cdot DG &= AB \cdot AG \text{ ή} \\ AD^2 &= AB \cdot AG - BD \cdot DG \text{ (βλ. § 87)} \end{aligned}$$

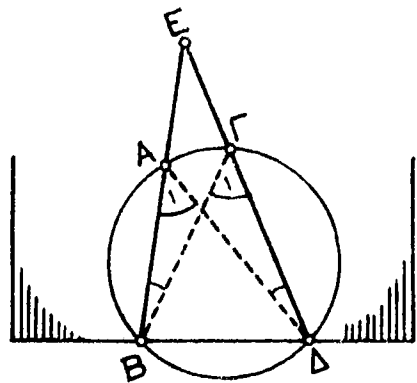


Σχ. 133

111. Θεώρημα τῶν τεμνουσῶν καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ. (Θ)—Ἐὰν ἐκ σημείου E κειμένου ἐκτὸς κύκλου ἀχθοῦν δύο ἡμιευθεῖαι, τέμνουσαι τὴν περιφέρειαν εἰς A καὶ B ἢ μία καὶ εἰς Γ καὶ Δ ἢ ἄλλη, τότε ἰσχύει ἡ σχέσηις : $EA \times EB = E\Gamma \times E\Delta$.

Ἀντιστρόφως : Ἐὰν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς γωνίας $\widehat{X\acute{E}\Psi}$ ὑπάρχουν δύο σημεῖα A καὶ B καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς δύο ἄλλα Γ καὶ Δ τοιαῦτα, ὥστε : $EA \times EB = E\Gamma \times E\Delta$, τότε τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά.

Ἀπόδειξις. i) Ἐὰν τὸ A κείνται μεταξὺ E καὶ B καὶ τὸ Γ μεταξὺ E καὶ Δ , τότε τὰ A καὶ Γ κείνται ὡς πρὸς τὴν χορδὴν $B\Delta$ εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον μὲ τὸ E καὶ ἐπομένως βλέπουν τὴν $B\Delta$ ὑπὸ ἴσας γωνίας $\widehat{A_1}, \widehat{\Gamma_1}$. Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι :

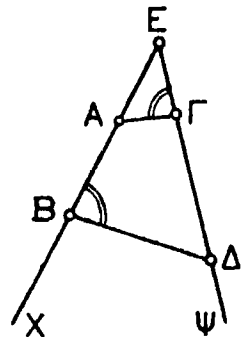


Σχ. 134

$$\text{τρ. } EA\Delta \approx \text{τρ. } E\Gamma B \Rightarrow \frac{EA}{E\Gamma} = \frac{E\Delta}{EB} \Rightarrow EA \times EB = E\Gamma \times E\Delta.$$

ii) (σχ. 135) : $EA \times EB = E\Gamma \times E\Delta \Rightarrow \frac{EA}{E\Delta} = \frac{E\Gamma}{EB}$ καὶ ἐπομένως $\text{τρ. } EA\Gamma \approx \text{τρ. } E\Delta B \Rightarrow \widehat{A\Gamma E} = \widehat{E\Delta B}$ (κείμενοι ἀπέναντι ὁμολόγων πλευρῶν).

Τὸ τετράπλευρον $A\Gamma\Delta B$ εἶναι κυρτόν, ἐφ' ὅσον τὸ A κείνται μεταξὺ E καὶ B καὶ τὸ Γ μεταξὺ E καὶ Δ καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία $\widehat{A\Gamma E}$ αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπέναντι ἐσωτερικὴν $\widehat{E\Delta B}$, εἶναι ἐγγράψιμον.



Σχ. 135

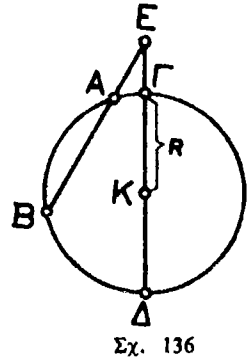
Πόρισμα. Ἐὰν διὰ σημείου E κειμένου ἐκτὸς κύκλου (K, R) ἀχθῆ τυχούσα εὐθεῖα τέμνουσα εἰς A καὶ B τὴν περιφέρειαν, τότε ἰσχύει ἡ σχέσηις :

$$EA \times EB = EK^2 - R^2$$

(δηλ. τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων EA, EB εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς $EK^2 - R^2$).

Διότι, ἂν ἀχθῆ καὶ ἑτέρα τέμνουσα ΕΓΚΔ (σχ. 136), θὰ ἔχωμεν :

$$EA \times EB = EG \times ED = \\ = (KE - R)(KE + R) = KE^2 - R^2.$$

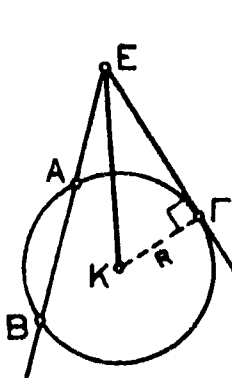


112. Θεώρημα τεμνούσης καὶ ἐφαπτομένης καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ. (Θ) — Ἐὰν διὰ σημείου E κείμενου ἐκτὸς κύκλου ἀχθοῦν δύο ἡμιευθεῖαι, ἐξ ὧν ἡ μία ἐφάπτεται τῆς περιφέρειας εἰς Γ, ἡ δὲ ἄλλη τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς A καὶ B, τότε ἰσχύει ἡ σχέσηις :

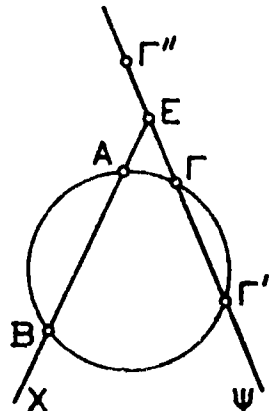
$$EG^2 = EA \cdot EB$$

Ἀντιστρόφως : Ἐὰν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς γωνίας $\widehat{XE\Psi}$ ὑπάρχουν δύο σημεῖα A καὶ B καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς ἓν σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε $EG^2 = EA \times EB$, τότε ἡ περιφέρεια (ABΓ) ἐφάπτεται τῆς εὐθείας ΕΓ εἰς τὸ Γ.

Ἀπόδειξις. i) Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τρ. ΕΚΓ (σχ. 137) ἔχομεν $EG^2 = EK^2 - R^2$. Ἀπὸ τὸ πόρισμα τῆς § 111 ἔχομεν $EA \times EB = EK^2 - R^2$. Ἐπομένως $EG^2 = EA \times EB$.



Σχ. 137



Σχ. 138

ii) Ἄς ὑποθέσωμεν :

$$EA \times EB = EG^2 \quad (\text{σχ. } 138)$$

καὶ ἄς θεωρήσωμεν τὴν περιφέρειαν (ABΓ). Τότε τὸ E εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (ABΓ), διότι κείται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς χορδῆς BA αὐτοῦ. Ἐὰν λοιπὸν ἡ περιφέρεια (ABΓ) δὲν ἐφήπτετο τῆς ΕΨ, θὰ ἐπα-

νέμενε τὴν εὐθ ΕΨ εἰς σημεῖον Γ' κείμενον ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΕΨ. Διότι, ἂν ἔεμενε τὴν εὐθ ΕΨ εἰς σημεῖον Γ'' τῆς προεκτάσεως τῆς ΕΨ, τότε ἡ ΓΓ'' θὰ ἦτο χορδὴ τοῦ κύκλου (ABΓ) καὶ τὸ E ὡς ἀνήκον εἰς τὴν χορδὴν ΓΓ'' θὰ ἦτο ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (ABΓ), ἐνῶ, ὡς εἶπομεν, τὸ E εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ (ABΓ). Ὡστε ἡ περιφέρεια (ABΓ), ἂν δὲν ἐφήπτετο

της ΕΨ, θά ἐπανάτμνε τὴν ἡμιευθείαν ΕΨ εἰς σημεῖον Γ' καὶ θά εἶχομεν :

$$EA \times EB = EG \times EG' \quad (\text{θεώρημα τῶν τεμνουσῶν})$$

$$\text{καὶ} \quad EA \times EB = EG^2 \quad (\text{ἐξ ὑποθέσεως}).$$

Ἐπομένως $EG \times EG' = EG^2 \Rightarrow EG = EG'$. Τοῦτο ὁμως εἶναι ἀτοκον, διότι ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΕΨ θά ὑπῆρχον δύο σημεῖα Γ, Γ' ἰσαπέχοντα τοῦ Ε. Ὡστε ἡ περιφέρεια (ΑΒΓ) δὲν ἔχει ἕτερον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς ευθ ΕΨ πλὴν τοῦ Γ, ἄρα ἡ ΕΨ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας (ΑΒΓ).

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα βοηθεῖ εἰς πολλὰς περιπτώσεις εἰς τὸ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἰθεὶά τις ΕΓ εἶναι ἐφαπτομένη ἐνὸς κύκλου (ΑΒΓ) (βλ. σχ. 137).

113. Ἀλγεβρική διατύπωσις τῶν μετρικῶν σχέσεων ἐν κύκλῳ. Τὰ τρία προηγούμενα θεωρήματα δύνανται νὰ διατυπωθοῦν συντόμως εἰς τὸ κάτωθι θεώρημα :

(Θ)—i) Ἐστώσαν δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) τεμνόμεναι εἰς τὸ Ε, δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τῆς (ε_1) καὶ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ ἐπὶ τῆς (ε_2). Τότε μία ἀναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη, ἵνα τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμοκυκλικά, εἶναι :

$$(1) \quad \overline{EA} \cdot \overline{EB} = \overline{EG} \cdot \overline{EA}.$$

ii) Ἐὰν τὸ Δ συμπίπτῃ μὲ τὸ Γ, τότε μία ἀναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη, ἵνα ἡ περιφέρεια (ΑΒΓ) ἐφάπτεται τῆς (ε_2), εἶναι :

$$(2) \quad \overline{EA} \cdot \overline{EB} = \overline{EG}^2.$$

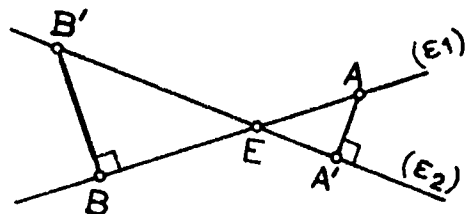
Πράγματι, ἂν τὰ γινόμενα $\overline{EA} \cdot \overline{EB}$ καὶ $\overline{EG} \cdot \overline{EA}$ εἶναι ἀμφοτέρω ἀρνητικά, τότε πρόκειται περὶ δύο τεμνομένων εἰς Ε τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἡ συνθήκη (1) ἐκφράζει τὸ (Θ) τῆς § 110.

Ἄν τὰ $\overline{EA} \cdot \overline{EB}$ καὶ $\overline{EG} \cdot \overline{EA}$ εἶναι ἀμφοτέρω θετικά, τότε πρόκειται περὶ δύο τεμνουσῶν καὶ ἡ (1) ἐκφράζει τὸ (Θ) τῆς § 111.

Τέλος ἡ (2) ἐκφράζει τὸ (Θ) τῆς § 112.

114. Μεταφορὰ ἐνὸς γινομένου διὰ καθέτων. Ἐστώσαν δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) τεμνόμεναι εἰς Ε καὶ ζεύγος σημείων Α καὶ Β τῆς (ε_1). Δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐπὶ τῆς (ε_2) ἕτερον ζεύγος σημείων Α', Β' φέροντες ἕκ τοῦ Α κάθετον ΑΑ' ἐπὶ τὴν (ε_2) καὶ εἰς τὸ Β κάθετον ΒΒ' ἐπὶ τὴν (ε_1) (σχ. 139) ἢ ἀντιθέτως (σχ. 140).

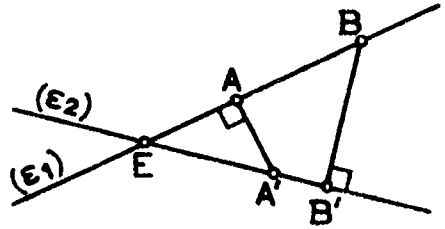
Τὸ ζεύγος τῶν σημείων Α', Β', τὸ ὅποιον οὕτω λαμβάνεται, ἔχει τὴν ἰδιότητα $\overline{EA'} \cdot \overline{EB'} = \overline{EA} \cdot \overline{EB}$, διότι τὰ Α, Α', Β, Β' εἶναι ὁμοκυκλικά.



Σχ. 139

Διά της μεταφοράς ταύτης τοῦ γινόμενου $\overline{EA} \cdot \overline{EB}$ εἰς ἴσον γινόμενον $\overline{EA'} \cdot \overline{EB'}$ ἐπὶ ἄλλης εὐθείας διευκολύνεται ἡ λύσις πολλῶν ζητημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα εἰσέρχεται ἕν σταθερὸν γινόμενον $\overline{EA} \cdot \overline{EB}$.

Γενικώτερον. Ἐάν γράψωμεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν A καὶ B, τέμνουσαν τὴν (e_2) εἰς A' καὶ B', μεταφέρωμεν καὶ πάλιν τὸ γινόμενον $\overline{EA} \cdot \overline{EB}$ εἰς τὸ ἴσον γινόμενον $\overline{EA'} \cdot \overline{EB'}$.



Σχ. 140

ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

115. α') Κατασκευαί. — Δίδονται δύο τμήματα α καὶ β καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθῆ τρίτον τμήμα x , τὸ ὁποῖον νὰ ἱκανοποιῆ τὴν ἐξίσωσιν

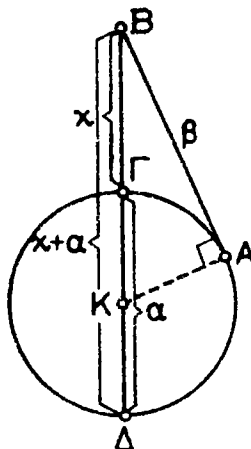
- i) $x(x + \alpha) = \beta^2$
- ἢ ii) $x(x - \alpha) = \beta^2$
- ἢ iii) $x(\alpha - x) = \beta^2$

Ἐννοεῖται ὅτι εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις τὰ γράμματα x , α , β παριστοῦν τὰ μέτρα τῶν τμημάτων x , α , β .

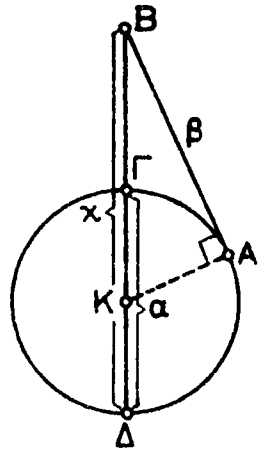
Λύσις. i) Μὲ διάμετρον τὴν γνωστὴν διαφορὰν α τῶν δύο ἀγνώστων παραγόντων x καὶ $x + \alpha$ γράφομεν κύκλον (K) καὶ εἰς τυχὸν σημεῖον A τῆς περιφέρειας φέρομεν ἑφαπτόμενον τμήμα $AB = \beta$. Διὰ τοῦ B φέρομεν τέμνουσαν $B\Gamma\Delta$ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου (σχ. 141), ὁπότε $B\Gamma \cdot B\Delta = BA^2$ (§ 111). Τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρος $B\Gamma$ τῆς τεμνοῦσης εἶναι τὸ ζητούμενον τμήμα. Διότι, ἂν τεθῆ $B\Gamma = x$, τότε $B\Delta = x + \alpha$ καὶ συνεπῶς πληροῦνται ὑπὸ τοῦ $x = B\Gamma$ ἡ ἐξίσωσις

$$x(x + \alpha) = \beta^2.$$

ii) Μὲ διάμετρον τὴν γνωστὴν διαφορὰν α τῶν δύο ἀγνώστων παραγόντων x καὶ $x - \alpha$ γράφομεν περιφέρειαν καὶ εἰς τυχὸν σημεῖον A αὐτῆς φέρομεν ἑφαπτόμενον τμήμα $AB = \beta$ (σχ. 142).



Σχ. 141

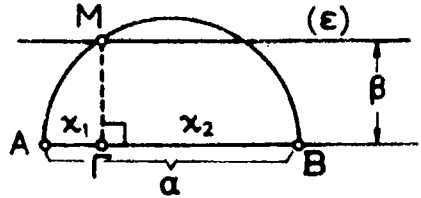


Σχ. 142

Διὰ τοῦ Β φέρομεν τέμνουσαν διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου, τὴν ΒΓΚΔ, ὁπότε πληροῦται ἡ σχέσις $ΒΔ \cdot ΒΓ = ΒΑ^2$, ἥτις διὰ $ΒΔ = x$ γίνεται $x(x-a) = \beta^2$. Τὸ ζητούμενον τμήμα x εἶναι τὸ ΒΔ.

iii) Οἱ δύο ἄγνωστοι παράγοντες x καὶ $a-x$ ἔχουν γνωστὸν ἄθροισμα a καὶ γνωστὸν γινόμενον β^2 . Ἡ ἐξίσωσις γράφεται $x^2 - ax + \beta^2 = 0$ καὶ ἔχει ἄθροισμα ριζῶν a καὶ γινόμενον ριζῶν β^2 .

Ἐὰν κατασκευάσωμεν δύο τμήματα x_1, x_2 ἔχοντα ἄθροισμα a καὶ γινόμενον β^2 , ταῦτα θὰ εἶναι αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως. Πρὸς τοῦτο γράφομεν ἡμικύκλιον διαμέτρου $ΑΒ = a$ (σχ. 143) καὶ φέρομεν εὐθεῖαν $(\epsilon) // ΑΒ$ καὶ εἰς ἀπόστασιν β ἀπὸ τῆς $ΑΒ$. Ἐὰν ἡ (ϵ) τέμνῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς $Μ$, φέρομεν ἐκ τοῦ $Μ$ κάθετον $ΜΓ$ ἐπὶ τὴν $ΑΒ$, ὁπότε τὰ δύο τμήματα $ΑΓ = x_1$ καὶ $ΓΒ = x_2$ εἶναι αἱ ζητούμεναι λύσεις, διότι $x_1 + x_2 = a$ καὶ $x_1 x_2 = \beta^2$ (ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $ΑΜΒ$).



Σχ. 143

Ἐὰν $\beta < \frac{a}{2}$, ἡ ἐξίσωσις $x(a-x) = \beta^2$ ἔχει δύο λύσεις.

Ἐὰν $\beta = \frac{a}{2}$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν (διπλῆν) λύσιν.

Ἐὰν $\beta > \frac{a}{2}$, ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει λύσιν.

β') Ὅλαι αἱ δευτεροβάθμιοι ἐξισώσεις με ἓν ἄγνωστον τμήμα, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζονται εἰς τὴν γεωμετρίαν, ἀνάγονται τελικῶς εἰς μίαν ἐκ τῶν τριῶν ἀνωτέρω μορφῶν. Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $ax^2 + \beta\gamma x - \delta^2\epsilon = 0$, ὅπου $a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ δεδομένα καὶ x ἄγνωστον τμήμα, γράφεται :

$x^2 + \frac{\beta\gamma}{a}x = \frac{\delta^2\epsilon}{a}$. Τμήμα $k = \frac{\beta\gamma}{a}$ δύναται νὰ κατασκευασθῇ (§ 75 ζ') καὶ τμήμα λ

τοιοῦτον, ὥστε $\lambda^2 = \frac{\delta^2\epsilon}{a}$ ἢ $\frac{\lambda^2}{\delta^2} = \frac{\epsilon}{a}$, δύναται ἐπίσης νὰ κατασκευασθῇ (§ 77), ὁπότε

ἡ ἐξίσωσις γράφεται $x^2 + kx = \lambda^2$ ἢ $x(x+k) = \lambda^2$ καὶ εἶναι τῆς ἀνωτέρω μορφῆς (i).

γ') Σημειωτέον ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^2 + ax + \beta = 0$, ὅπου a, β δεδομένα τμήματα καὶ x ζητούμενον, δὲν ἔχει λύσιν, διότι τὰ μέτρα τῶν τμημάτων εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τριῶν θετικῶν δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ἴσῳται με μηδέν.

(Ἀσκήσεις : 509 - 512)

ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

116. α') Κατασκευαί. Δοθέντων τῶν τμημάτων α καὶ β νὰ κατασκευασθῇ τμήμα x πληροῦν τὴν διτετράγωνον ἐξίσωσιν

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & x^4 + \alpha^2 x^2 - \beta^4 = 0 \\ \text{ἢ ii)} & x^4 - \alpha^2 x^2 - \beta^4 = 0 \\ \text{ἢ iii)} & x^4 - \alpha^2 x^2 + \beta^4 = 0 \end{array}$$

Λύσις. Φανταζόμεθα ἐν τμήμα y τοιοῦτον, ὥστε

$$(1) \quad x^2 = \alpha y.$$

Προφανῶς, ἐὰν κατασκευασθῇ τὸ y, τότε καὶ τὸ x κατασκευάζεται ὡς μέσον ἀνάλογον τῶν α καὶ y. Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ νέου ἀγνώστου y, ἢ $x^4 + \alpha^2 x^2 - \beta^4 = 0$ καθίσταται $\alpha^2 y^2 + \alpha^2 \cdot \alpha y = \beta^4$ ἢ $y^2 + \alpha y = \left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^2$. Κατασκευάζομεν τμήμα $\gamma = \frac{\beta^2}{\alpha}$ (§ 75, δ'), ὁπότε: $y^2 + \alpha y = \gamma^2$ ἢ $y(y + \alpha) = \gamma^2$ καὶ τὸ y κατασκευάζεται (§ 115, i).

Ἡ $x^4 - \alpha^2 x^2 - \beta^4 = 0$ ἀνάγεται διὰ τῆς ἰδίας ἀντικαταστάσεως: $x^2 = \alpha y$ εἰς τὴν $y^2 - \alpha y = \gamma^2$ ἢ $y(y - \alpha) = \gamma^2$ καὶ ἢ $x^4 - \alpha^2 x^2 + \beta^4 = 0$ ἀνάγεται εἰς τὴν $y(\alpha - y) = \gamma^2$.

β') Ὅλαι αὐ διτετράγωνοι ἐξισώσεις, αὐ ὁποῖαι παρουσιάζονται εἰς τὴν Γεωμετρίαν, ἀνάγονται εἰς μίαν τῶν τριῶν ἀνωτέρω μορφῶν.

Ἐστω π.χ. ἢ $\alpha x^4 + \beta \gamma^2 x^2 - \delta \epsilon \eta \zeta^2 = 0$. Αὕτη γράφεται $x^4 + \frac{\beta \gamma^2}{\alpha} x^2 - \frac{\delta \epsilon \eta \zeta^2}{\alpha} = 0$. Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τμήμα λ τοιοῦτον, ὥστε $\lambda^2 = \frac{\beta \gamma^2}{\alpha}$ ἢ $\frac{\lambda^2}{\gamma^2} = \frac{\beta}{\alpha}$ (§ 77), ὁπότε: $x^4 + \lambda^2 x^2 = \frac{\delta \epsilon \eta \zeta^2}{\alpha}$. Κατασκευάζομεν τμήμα ν = $\frac{\delta \epsilon}{\alpha}$ (§ 75, ζ'), ὁπότε $\frac{\delta \epsilon \eta}{\alpha} = \nu \eta$. Κατασκευάζομεν τμήμα ρ τοιοῦτον, ὥστε $\rho^2 = \nu \eta$ (μέσον ἀνάλογον τῶν ν, η), ὁπότε $\frac{\delta \epsilon \eta}{\alpha} = \rho^2$. Ἐχομεν τώρα $\frac{\delta \epsilon \eta \zeta^2}{\alpha} = \rho^2 \zeta^2 = (\rho \zeta)^2$. Κατασκευάζομεν τμήμα μ τοιοῦτον, ὥστε $\mu^2 = \rho \zeta$, ὁπότε $\frac{\delta \epsilon \eta \zeta^2}{\alpha} = \mu^4$ καὶ ἢ ἐξισῶσις καθίσταται $x^4 + \lambda^2 x^2 - \mu^4 = 0$, ἢτοι τῆς μορφῆς (i).

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΕΙΣ ΜΕΣΟΝ ΚΑΙ ΑΚΡΟΝ ΛΟΓΟΝ

117. α') Σύμφωνα μὲ τὴν αἰσθητικὴν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἢ «κομψοτέρα» διαιρέσις ἐνὸς τμήματος AB εἰς δύο διακεκριμένα μέρη ΑΓ καὶ

ΓΒ (σχ. 144) είναι εκείνη καθ' ἣν, ὄν λόγον ἔχει τὸ ὅλον τμήμα ΑΒ πρὸς τὸ μεγαλύτερον τεμάχιον αὐτοῦ, ΑΓ, νὰ ἔχη καὶ τὸ μεγαλύτερον τεμάχιον ΑΓ πρὸς τὸ μικρότερον, ΓΒ. Ὅταν τοῦτο συμβαίνει, λέγομεν ὅτι τὸ Γ διαιρεῖ τὸ ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. Ἡ τοιαύτη τομὴ ἑνὸς μήκουσ εἰς δύο μέρη ὀνομάσθη ὑπὸ τῶν μεταγενεστέρων «*χρυσὴ τομὴ*» καὶ χρησιμοποιεῖται καὶ σήμερον εἰς τὴν ἀρχιτεκτονικὴν.



Σχ. 144

Ἐπειδὴ $\frac{AB}{AG} = \frac{AG}{GB} \iff AG^2 = AB \times GB$, διὰ τοῦτο πρακτικῶς λέγομεν ὅτι τὸ Γ διαιρεῖ τὸ ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ὅταν τὸ χωρίζῃ εἰς δύο τμήματα τοιαῦτα, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλύτερου νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ὅλου τμήματος ἐπὶ τὸ μικρότερον.

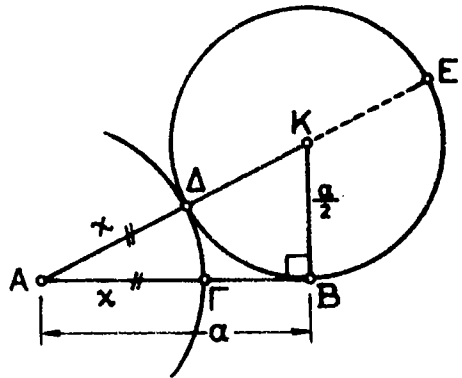
Ἐάν, λοιπόν, καλέσωμεν α τὸ τμήμα ΑΒ καὶ x τὸ μεγαλύτερον μέρος αὐτοῦ διαιρεθέντος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, τότε θὰ πληρωθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$x^2 = a(a-x) \iff x^2 + ax = a^2 \iff x(x+a) = a^2$$

Ὅστε τὸ x κατασκευάζεται γεωμετρικῶς συμφώνως πρὸς τὴν § 115, α'. Γράφομεν δηλ. κύκλον ἀκτί-

νος $\frac{a}{2}$, ἐφαπτόμενον τοῦ ΑΒ

εἰς Β, φέρομεν ἐκ τοῦ Α τέμνουσαν διὰ τοῦ κέντρου διερχομένην (σχ. 145) καὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρος ΑΔ τῆς τεμνούσης εἶναι ἴσον πρὸς x. Μεταφέρομεν τοῦτο ἐπὶ τοῦ ΑΒ εἰς τὴν θέσιν ΑΓ καὶ τὸ Γ διαιρεῖ τὸ ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.



Σχ. 145

β') Ἄν λύσωμεν Ἀλγεβρικῶς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν $x^2 + ax = a^2$, εὐρίσκομεν (ἀπορρίπτοντες τὴν ἀρνητικὴν ρίζαν) :

$$x = AG = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2} \Rightarrow a - x = GB = \frac{a(3-\sqrt{5})}{2}$$

Συνάγομεν ὅτι τὸ Γ, τὸ διαιροῦν τὸ ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, διαιρεῖ ἐσωτερικῶς τὸ ΑΒ εἰς ἀριθμητικὸν λόγον :

$$\frac{GA}{GB} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}$$

Κατὰ συνέπειαν, ἂν ἐν τμήμα AB εἶναι διηρημένον ὑπὸ τοῦ Γ' εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἐν ἄλλο τμήμα $A'B'$ διηρημένον ὑπὸ τοῦ Γ' εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν AG, GB εἶναι καὶ αὐτὸ διηρημένον εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

γ') Ἐπέκτασις. Ἐὰν γεωμετρικόν τι μέγεθος (A) δυνάμενον νὰ μετρηθῆ (ἐπιφάνεια ἢ στερεὸν κ.τ.λ.) καὶ ἔχον μέτρον A χωρισθῆ εἰς δύο μέρη ἔχοντα μέτρα x καὶ $A-x$, πληροῦται δὲ ἡ σχέσις $x^2 = A(A-x)$, λέγομεν ὅτι τὸ μέγεθος (A) διηρέθη εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον μὲ μεγαλύτερον μέρος τὸ x .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

495. Ἐὰν ἡ διάμεσος AD τριγ. $AB\Gamma$ προεκτεινομένη τέμνῃ εἰς E τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν, νὰ δειχθῆ ὅτι :

$$2AE \cdot AD = AB^2 + A\Gamma^2.$$

496. Ἐὰν ἀπὸ τυχόντος σημείου M περιφέρειας ἀχθοῦν αἱ χορδαὶ MPA καὶ $M\Sigma B$ διερχόμεναι διὰ δύο σταθερῶν σημείων P καὶ Σ συμμετρικῶν ὡς πρὸς τὸ κέντρον τῆς περιφέρειας, νὰ δειχθῆ ὅτι $\frac{MP}{PA} + \frac{M\Sigma}{\Sigma B}$ εἶναι σταθερόν.

497. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι καὶ ἓκ σταθεροῦ σημείου Σ τῆς μικροτέρας φέρομεν χορδὴν ΣA τῆς μικροτέρας καὶ χορδὴν $\Sigma B\Gamma$ τῆς μεγαλυτέρας, καθέτους ἐπ' ἀλλήλας. Νὰ δειχθῆ ὅτι, τῆς ΣA στρεφομένης περὶ τὸ Σ , ἕκαστον τῶν ἀθροισμάτων : α') $\Sigma A^2 + \Sigma B^2 + \Sigma \Gamma^2$ καὶ β') $B\Gamma^2 + \Gamma A^2 + AB^2$ παραμένει σταθερόν.

498. Ἐπ' εὐθείας δίδονται τρία σημεῖα A, B, Γ . Διὰ τῶν A καὶ B γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐνοῦμεν τὸ Γ μὲ τὸ ἐν σημεῖον E , καθ' ἃ ἡ εἰς τὸ μέσον τοῦ AB κάθετος τέμνει τὴν περιφέρειαν ταύτην. Τίς ὁ γ.τ. τοῦ σημείου τομῆς τῆς GE μετὰ τῆς διὰ τῶν A καὶ B διερχομένης μεταβλητῆς περιφέρειας;

499. Δίδονται τρία σημεῖα A, B, Γ ἐπ' εὐθείας. Διὰ τῶν A καὶ B γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἓκ τοῦ Γ ἄγομεν ἐφαπτομένης ΓM καὶ ΓN πρὸς ταύτην. Νὰ εὐρεθῆ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου τῆς χορδῆς τῶν ἐπαφῶν MN , ὅταν ἡ ἀκτίς τῆς διὰ τῶν A καὶ B διερχομένης περιφέρειας μεταβάλλεται.

500. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγ. $AB\Gamma$ ἓκ τῶν στοιχείων $\widehat{\alpha}$, A καὶ τοῦ γινομένου $\beta(\gamma + \beta) = k^2$ ($k =$ δοθὲν τμήμα).

501. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγ. $AB\Gamma$, οὐτινος δίδεται ἡ βᾶσις a , ἡ γωνία \widehat{A} καὶ τὸ γινόμενον $\gamma(\beta - \gamma) = k^2$ ($\beta > \gamma$).

502. Ἐὰν διὰ σταθεροῦ σημείου O ἀχθῆ χορδὴ AB κύκλου δεδομένου καὶ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς, τὸ ἀθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν ἀποστάσεων τοῦ O ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας ταύτας εἶναι σταθερόν, ὅταν ἡ BA στρέφεται περὶ τὸ O , ὅπου τὸ O ὑποτίθεται ἐντὸς τοῦ κύκλου.

503. Ἐὰν ἓκ δοθέντος σημείου O , κειμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου AB κύκλου, ἀχθῆ χορδὴ $\Gamma\Delta$, αἱ δὲ εὐθεῖαι $B\Gamma, B\Delta$ τέμνουν τὴν κατὰ τὸ A ἐφαπτομένην εἰς τὰ σημεῖα E καὶ Z , τὸ γινόμενον $AE \cdot AZ$ μένει σταθερόν, ὅταν ἡ $\Gamma\Delta$ στρέφεται περὶ τὸ O . Ἡ περιφέρεια δὲ (BEZ) διέρχεται καὶ δι' ἑτέρου σταθεροῦ σημείου, ὅταν ἡ $\Gamma\Delta$ στρέφεται περὶ τὸ O .

504. Νὰ γραφῆ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας.

505. Να γραφεί περιφέρεια διερχομένη διά δύο δοθέντων σημείων και ἀποτέμνουσα ἀποδοθείσης εὐθείας τμήμα δοθέντος μήκους.

506. Ἐπί δοθείσης εὐθείας νά εὐρεθῆ σημεῖον ἀπέχον ἰσάκτις ἀπό δεδομένου σημείου καί ἄλλης δεδομένης εὐθείας.

507. Δίδονται δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι (ϵ_1) καί (ϵ_2) καί σημεῖον Α ἐκτός αὐτῶν. Νά γραφῆ περιφέρεια διερχομένη διά τοῦ Α ἔχουσα τὸ κέντρον τῆς ἐπὶ τῆς (ϵ_1) καί ἀποτέμνουσα ἀπὸ τῆς (ϵ_2) τμήμα δεδομένου μήκους β.

508. Διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Α δύο περιφερειῶν ν' ἀχθῆ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς περιφερείας εἰς Β καί Γ οὕτως, ὥστε $\overline{AB} \cdot \overline{AG} = -K^2$ ($K =$ δοθὲν τμήμα).

509. Νά κατασκευασθῆ ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὐτινος ἡ μία κάθετος πλευρὰ νά ἰσῶται πρὸς δοθὲν τμήμα δ, ἡ δὲ ἄλλη νά εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτείνουσας καί τῆς δ.

510. Νά κατασκευασθοῦν γεωμετρικῶς τμήματα, τῶν ὁποίων τὰ μήκη εἰς cm νά εἶναι ρίζαι τῆς ἐξίσωσως $x^2 - 11x + 16 = 0$, χωρὶς νά λυθῆ ἀλγεβρικῶς αὕτη.

511. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι (α), (β), (γ), διερχόμεναι διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ καί τρία τμήματα λ, μ, ν. Νά γραφῆ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς (α) καί τέμνουσα τὴν (β) εἰς Α καί Β οὕτως, ὥστε $\overline{KA} \cdot \overline{KB} = \lambda\mu$ καί ἀποτέμνουσα ἀπὸ τῆς (γ) χορδὴν μήκους ν.

512. Ἐάν ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ προεκτεινομένη τέμνῃ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς Μ, νά δειχθῆ ὅτι :

$$MB^2 = MG^2 = MA \cdot MA.$$

Ἄντιστρόφως, ἂν εὐθεῖα ΑΔ τέμνῃ τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ τρ. ΑΒΓ εἰς Δ καί τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὸ Μ καί εἶναι $MB^2 = MA \cdot MA$, τότε ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς \widehat{A} .

513. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον ἐκ τῶν στοιχείων α, Α, δΑ (δΑ ἐσωτερικὴ διχοτόμος). (Ἔκδο. Νά ληφθῆ ὑπ' ὄψιν ἡ προηγουμένη ἄσκησης).

514. Νά κατασκευασθῆ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῆς διχοτόμου ΒΔ = δ καί τοῦ τμήματος ΓΔ = λ, τὸ ὅποιον ὀρίζει ἡ διχοτόμος ΒΔ τῆς ὀξείας γωνίας \widehat{B} ἐπὶ τῆς ἀπέναντι καθέτου πλευρᾶς.

515. Δοθέντος τοῦ μεγαλύτερου μέρους ἑνὸς τμήματος διαιρεθέντος εἰς μέσον καί ἄκρον λόγον νά κατασκευασθῆ τὸ τμήμα.

516. Ἐάν τὸ σημεῖον Γ διαιρῆ τὸ τμήμα ΑΒ εἰς μέσον καί ἄκρον λόγον, ληφθῆ δὲ ἐπὶ τοῦ μεγαλύτερου τμήματος ΑΓ τμήμα ΓΔ = ΓΒ, δεῖξτε ὅτι τὸ Δ διαιρεῖ τὸ ΑΓ εἰς μέσον καί ἄκρον λόγον.

517. Διὰ δοθέντος σημείου Α νά ἀχθῆ εὐθεῖα τέμνουσα δύο ἄλλας δεδομένας εἰς σημεία Β καί Γ οὕτως, ὥστε τὸ Β νά διαιρῆ τὸ τμήμα ΑΓ εἰς μέσον καί ἄκρον λόγον.

518. Διὰ δοθέντος σημείου Α κειμένου ἐκτός δοθείσης περιφερείας νά ἀχθῆ τέμνουσα ΑΒΓ τῆς περιφερείας τοιαύτη, ὥστε τὸ Β νά διαιρῆ τὸ τμήμα ΑΓ εἰς μέσον καί ἄκρον λόγον (δύο περιπτώσεις).

519. Νά δειχθῆ ὅτι μία ἀναγκαία καί ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τὰ μέτρα τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόσοδον, εἶναι τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος νά διαιρῆ αὐτὴν εἰς μέσον καί ἄκρον λόγον. Ὡς ἐφαρμογὴ νά κατασκευασθῆ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον δοθείσαν περίμετρον καί τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νά εὐρίσκωνται ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ.

520. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν δύο σημεία Δ καί Δ' συμμετρικὰ πρὸς σταθερὸν σημεῖον Σ τῆς ΒΓ. Ἄν αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καί ΑΔ' τέμνουν τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς Ε καί Ε', νά δειχθῆ ὅτι τὸ ἄθροισμα ΑΔ·ΑΕ + ΑΔ'·ΑΕ' εἶναι σταθερόν.

521. Νά κατασκευασθῆ τρ. $AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων a, \hat{A} καὶ τοῦ γινομένου $\overline{\Gamma\Delta} \times \overline{\Gamma\Lambda}$, ὅπου BA τὸ ἐπὶ τὴν $A\Gamma$ ὄψος.

522. Ἐπὶ τῆς διχοτόμου γωνίας \widehat{XOY} δίδεται σημεῖον A . Ζητεῖται νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς \widehat{XOY} καὶ τέμνουσα τὰς ἡμιευθείας OX, OY εἰς B καὶ Γ οὕτως, ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ τρ. $AB\Gamma$ νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμήμα 2τ .

523. Δίδονται τρεῖς ἡμιευθεῖαι AX, AY, AZ ἀρχόμεναι ἀπὸ τοῦ A , ἐξ ὧν ἡ AY κεί-
ται μεταξύ τῶν AX, AZ . Ζητεῖται νὰ ἀχθῆ διὰ δεδομένου σημείου Γ τῆς AY εὐθεῖα τέ-
μνουσα τὰς AX, AZ εἰς B καὶ Δ οὕτως, ὥστε :

$$\frac{A\Gamma^2}{B\Gamma \cdot \Gamma\Delta} = \frac{\mu}{\nu},$$

ἐνθα μ καὶ ν δεδομένα τμήματα. Ἀκολούθως, ἂν δοθῆ τυχὸν σημεῖον K τοῦ ἐπιπέδου, ζητεῖται νὰ ἀχθῆ διὰ τοῦ K εὐθεῖα τέμνουσα τὰς τρεῖς δεδομένας ἡμιευθείας εἰς B', Γ', Δ' , ὥστε νὰ πληροῦται ἡ ἴδια σχέσηις :

$$A\Gamma'^2/B'\Gamma' \cdot \Gamma'\Delta' = \mu/\nu.$$

524. Ἐστω H τὸ ὀρθόκεντρον τρ. $AB\Gamma$ καὶ $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ τὰ ὄψη αὐτοῦ. Δείξατε ὅτι

$$\overline{A'B} \cdot \overline{A'\Gamma} = \overline{A'H} \cdot \overline{A'A} \quad \text{καὶ} \\ \overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{H\Gamma} \cdot \overline{H\Gamma'}.$$

525. Νά διαιρεθῆ τρίγωνον εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον δι' εὐθείας παρ λου πρὸς μίαν πλευρὰν αὐτοῦ (δύο περιπτώσεις).

526. Διὰ δοθέντος σημείου Σ κειμένου ἐντὸς δοθείσης γωνίας \widehat{xOy} νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς \widehat{xOy} εἰς A καὶ B οὕτως, ὥστε τὸ τρ. OAB νὰ ἰσοδυναμῆ μεθ' ἑνὸς τετράγωνον.

527. Δίδεται κύκλος καὶ σταθερὰ διάμετρος AB αὐτοῦ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ.τ. τῶν σημείων M τοιούτων, ὥστε τὸ ἔμβადόν τοῦ τριγ. MAB νὰ ἰσοῦται μετ' τὸ τετράγωνον τοῦ ἑ-
φαπτομένου τμήματος τοῦ ἀγομένου ἐκ τοῦ M πρὸς τὸν κύκλον.

528. Διὰ τοῦ μέσου O τῆς πλευρὰς $B\Gamma$ ἰσοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα τέμνουσα τὴν πλευρὰν AB εἰς M καὶ τὴν πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ προέκτασιν τῆς $A\Gamma$ εἰς N οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι :

$$E\mu\beta OMB + E\mu\beta ON\Gamma = E\mu\beta AB\Gamma.$$

ΔΥΝΑΜΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟΝ — ΡΙΖΙΚΟΙ ΑΞΟΝΕΣ

118. α') (Θ) — Ἐὰν διὰ σταθεροῦ σημείου Σ ἀχθῆ τυχούσα εὐθεῖα τέ-
μνουσα τὴν περιφέρειαν σταθεροῦ κύκλου εἰς A καὶ B , τὸ γινόμενον $\overline{\Sigma A} \times \overline{\Sigma B}$
εἶναι εἰς πραγματικὸς ἀριθμὸς σταθερὸς καλούμενος δύναμις τοῦ Σ ὡς πρὸς
τὸν κύκλον. Τὸ πρόσημον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου χαρακτηρίζει τὴν θέσιν τοῦ
 Σ ὡς πρὸς τὸν κύκλον.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὸ Σ εἶναι σημεῖον ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου (K, R),
τότε γνωρίζομεν ὅτι (§ 111, πόρισμα) $\Sigma A \times \Sigma B = \Sigma K^2 - R^2$ (ἀκόμη καὶ ἂν
τὰ A καὶ B συμπίπτουν). Ἐπειδὴ ὁμοῦ τοῦ Σ κειμένου ἐκτὸς τοῦ κύκλου
τὰ $\overrightarrow{\Sigma A}$ καὶ $\overrightarrow{\Sigma B}$ εἶναι ὁμόρροπα, ἔχομεν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην
 $\Sigma A \times \Sigma B = \overline{\Sigma A} \times \overline{\Sigma B}$, ἐπομένως :

$$(1) \quad \overline{\Sigma A} \times \overline{\Sigma B} = \Sigma K^2 - R^2.$$

Ἐὰν τὸ Σ κείται ἐπὶ τῆς περιφέρειας, τότε ἓν ἐκ τῶν ΣA , ΣB εἶναι μηδὲν καὶ ἐπομένως $\overline{\Sigma A} \times \overline{\Sigma B} = 0 = R^2 - R^2 = \Sigma K^2 - R^2$ καὶ ἡ (1) πάλιν ἰσχύει.

Ἐὰν τὸ Σ κείται ἐντὸς τοῦ κύκλου, τότε γνωρίζομεν ὅτι (§ 110, πόρισμα) $\Sigma A \times \Sigma B = R^2 - \Sigma K^2$. Ἐπειδὴ ὁμως, τώρα, τὰ $\overrightarrow{\Sigma A}$ καὶ $\overrightarrow{\Sigma B}$ εἶναι ἀντίρροπα, διὰ τοῦτο $\overline{\Sigma A} \times \overline{\Sigma B} = -\Sigma A \times \Sigma B = - (R^2 - \Sigma K^2) = \Sigma K^2 - R^2$ καὶ ἡ (1) πάλιν ἰσχύει. Ἐπομένως εἰς πᾶσαν περίπτωσιν ἰσχύει ἡ σχέση

$$\boxed{\overline{\Sigma A} \times \overline{\Sigma B} = \Sigma K^2 - R^2} = \text{δύναμις τοῦ } \Sigma \text{ πρὸς τὸν } (K, R).$$

Τὸ σημεῖον τῆς «δυνάμεως τοῦ Σ », δηλ. τοῦ $\Sigma K^2 - R^2 = \overline{\Sigma A} \cdot \overline{\Sigma B}$ χαρακτηρίζει προφανῶς τὴν θέσιν τοῦ Σ ὡς πρὸς τὸν κύκλον:

Ἐὰν $\Sigma K^2 - R^2 > 0$, τότε τὸ Σ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου ($\Sigma K > R$).

Ἐὰν $\Sigma K^2 - R^2 = 0$, τότε τὸ Σ κείται ἐπὶ τῆς περιφέρειας ($\Sigma K = R$).

Ἐὰν $\Sigma K^2 - R^2 < 0$, τότε τὸ Σ κείται ἐντὸς τοῦ κύκλου ($\Sigma K < R$).

β) Συμβολισμός. Ἡ δύναμις τοῦ Σ ὡς πρὸς τὸν κύκλον (K, R) ἢ πρὸς τὴν περιφέρειαν (K, R) παρίσταται μὲ $\text{Δυν}\Sigma/(K, R)$ ἢ $\text{Δυν}\Sigma/(K)$.

γ) Πόρισμα. Ἐὰν σημεῖον κείται ἐκτὸς κύκλου, ἡ δύναμις αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν κύκλον ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἑφαπτομένου τμήματος τοῦ ἀγομένου ἐκ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον.

119. Θεώρημα τοῦ Euler καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ. α) (Θ)–

Ἐὰν εἶναι γνωσταὶ αἱ ἀκτίνες R καὶ ρ τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου τυχόντος τριγώνου, τότε καὶ ἡ ἀπόστασις δ μεταξὺ τῶν κέντρων τῶν δύο τούτων κύκλων εἶναι ὀρισμένη καὶ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$\delta^2 = R^2 - 2R\rho$$

Ἀπόδειξις. Ἐστω O τὸ ἑγκεντρον καὶ K τὸ περικέντρον τοῦ τρ. $AB\Gamma$ καὶ I τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῆς AB . Ἡ εὐθ AO διέρχεται διὰ τοῦ μέσου E τοῦ τόξου $B\Gamma$ (σχ. 146), εἶναι δέ:

$$(1) \quad EO = EG \text{ καὶ}$$

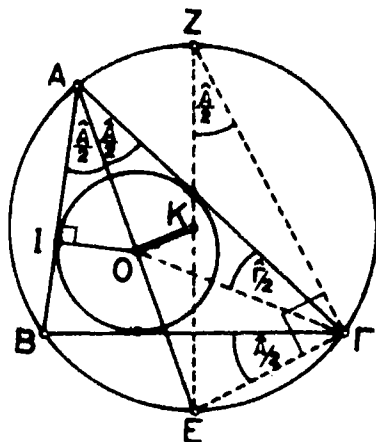
O ἑσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου.

$$\text{Διότι } \widehat{EO\Gamma} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2} \text{ καὶ } \widehat{O\Gamma E} =$$

$$= \widehat{O\Gamma B} + \widehat{B\Gamma E} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Ὅθεν τὸ τρ. $EO\Gamma$ εἶναι ἰσοσκελές, μὲ $EO = EG$.

Ἡ (1) εἶναι μία χαρακτηριστικὴ ιδιότης τοῦ ἐγκέντρου O .



Σχ. 146

Ἐάν, τώρα, φέρωμεν τὴν διάμετρον ΕΖ τοῦ περικύκλου, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΙΟ καὶ ΖΕΓ εἶναι ὁμοία καὶ ἑπομένως :

$$\frac{OA}{EZ} = \frac{OI}{EG} \quad \text{ἢ λόγῳ τῆς (1),} \quad \frac{OA}{2R} = \frac{\rho}{OE} \Rightarrow OA \cdot OE = 2R\rho \Rightarrow$$

$$|\Delta \nu \text{ O/(K)}| = 2R\rho \Rightarrow |OK^2 - R^2| = 2R\rho \Rightarrow R^2 - OK^2 = 2R\rho \Rightarrow OK^2 = R^2 - 2R\rho, \text{ ἥτις εἶναι ἡ ἀποδεικτέα σχέσηις.}$$

β) (Θ) — Ἐάν ἡ διάκεντρος ΟΚ δύο κύκλων (Ο, ρ) καὶ (Κ, R) μὲ $R > \rho$ πληροῖ τὴν σχέσιν: $OK^2 = R^2 - 2R\rho$, τότε ὑπάρχουν ἄπειρα τρίγωνα ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν (Κ, R) καὶ συγχρόνως περιγεγραμμένα περὶ τὸν (Ο, ρ).

Ἐν πρώτοις, $OK^2 = R^2 - 2R\rho \Rightarrow OK^2 < (R - \rho)^2 \Rightarrow OK < R - \rho$, ἥτοι ὁ (Ο, ρ) κεῖται ἐντὸς τοῦ (Κ, R). Ἀπὸ τυχόντος σημείου Α τοῦ (Κ, R) ἄς φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΒ, ΑΓ τοῦ (Ο, ρ) (σχ. 146). Ἡ εὐθ ΑΟ διχοτομεῖ τότε τὴν ΒΑΓ, ἀπὸ δὲ τὴν δοθεῖσαν σχέσιν $\Rightarrow OK^2 - R^2 = -2R\rho \Rightarrow |\Delta \nu \text{ O/(K)}| = 2R\rho \Rightarrow OA \cdot EO = 2R\rho$. Ἀπὸ τὰ ὁμοία τρίγωνα ΑΙΟ καὶ ΕΖΓ ἔπεται: $OA \cdot EG = EZ \cdot OI$, δηλ. $OA \cdot EG = 2R\rho$. Ἐπομένως $EO = EG$, ἥτις εἶναι, ὡς εἶδομεν προηγουμένως, χαρακτηριστικὴ ιδιότης τοῦ ἐγκέντρου Ο τοῦ τρ. ΑΒΓ. Δηλ. τὸ C εἶναι ἐγκέντρον τοῦ τρ. ΑΒΓ.

(Ἀσκήσεις: 589, 590, 591, 592).

ΡΙΖΙΚΟΣ ΑΞΩΝ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

120. Ὅρισμός.—Καλεῖται «ριζικός ἀξων» δύο κύκλων τὸ σύνολον τῶν σημείων, τὰ ὅποια ἔχουν ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους.

(Θ) — Ὁ ριζικός ἀξων δύο κύκλων εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστῶσαν (Κ, R) καὶ (Κ', R') οἱ δύο κύκλοι καὶ Μ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν τοιοῦτον, ὥστε

$$(1) \quad \Delta \nu \text{M/(K)} = \Delta \nu \text{M/(K')}.$$

Ἐπειδὴ $\Delta \nu \text{M/(K)} = MK^2 - R^2$ καὶ $\Delta \nu \text{M/(K')} = MK'^2 - R'^2$, ἔπεται ὅτι ἱκανὴ καὶ ἀναγκαῖα συνθήκη, ἵνα ἰσχύῃ ἡ (1), εἶναι

$$MK^2 - R^2 = MK'^2 - R'^2 \quad \text{ἢ}$$

(2)

$$\boxed{MK^2 - MK'^2 = R^2 - R'^2}$$

Ἀλλὰ τὸ σύνολον τῶν σημείων τῶν πληρῶν τὴν (2) εἶναι, ὡς γνωστὸν (§ 90, β'), εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων εἰς σημεῖον Π αὐτῆς τοιοῦτον, ὥστε

(3)

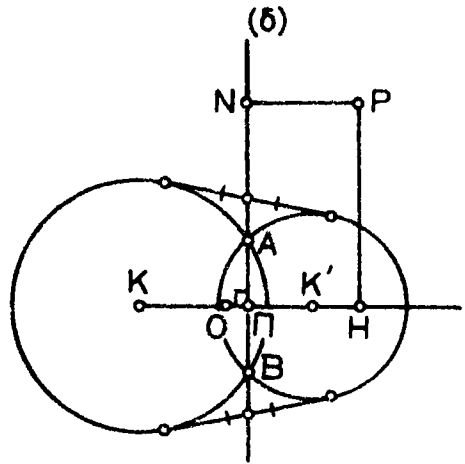
$$\boxed{2\overline{K\overline{K'}} \cdot \overline{O\overline{P}} = R^2 - R'^2}$$

ἐνθα Ο τὸ μέσον τῆς διακέντρου.

Ἡ (3) ὀρίζει τὴν θέσιν τοῦ «ποδός» Π τοῦ ριζικοῦ ἀξωνος ἐπὶ τῆς δια-

κέντρου. Ὁ ποδὸς Π τοῦ ριζικοῦ ἄξονος καὶ τὸ κέντρον τοῦ μικροτέρου κύκλου κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου Ο τῆς διακέντρου ΚΚ'. Διότι, ἂν $R > R'$, τότε ἐκ τῆς (3) ἔπεται $\overline{ΚΚ'} \cdot \overline{ΟΠ} > 0$, ἄρα $\overrightarrow{ΚΚ'}$ καὶ $\overrightarrow{ΟΠ}$ ὁμόρροπα.

121. Εἰδικαὶ περιπτώσεις. 1ον) Ἐὰν αἱ δύο περιφέρειαι (Κ) καὶ (Κ') τέμνονται ἔστω εἰς Α καὶ Β, τότε ἕκαστον τῶν σημείων τούτων ἔχει μηδενικὰς, ἄρα ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους καὶ συνεπῶς ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα, ἐπομένως, ριζικὸς ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 147).



Σχ. 147

2ον) Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι (Κ) καὶ (Κ') ἐφάπτονται ἀλλήλων, τότε τὸ σημεῖον Α ἐπαφῆς ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα, ὅστις, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον, συμπίπτει ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ μετὰ τὴν κοινὴν εἰς Α ἐφαπτομένην τῶν δύο κύκλων.

3ον) Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι εἶναι ὁμόκεντροι, δὲν ὑπάρχει ριζικὸς ἄξων. Διότι, ἂν εἰς τὸν τύπον $2\overline{ΚΚ'} \cdot \overline{ΟΠ} = R^2 - R'^2$ (§ 120) νοήσωμεν τὸ Κ' τείνον νὰ συμπέσῃ μετὰ τὸ Κ, ἡ ἀπόστασις $\overline{ΟΠ} = \frac{|R^2 - R'^2|}{2\overline{ΚΚ'}}$ τείνει εἰς ἄπειρον (ἐπειδὴ $\overline{ΚΚ'} \rightarrow 0$) καὶ ὁ ριζικὸς ἄξων ἀπομακρύνεται εἰς ἄπειρον. Κατὰ σύμβασιν λέγομεν ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξων δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν εἶναι ἡ εἰς ἄπειρον ἀπόστασις εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (§ 55).

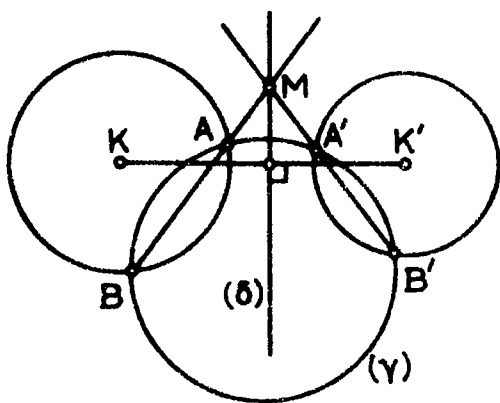
4ον) Ἀπὸ κάθε σημείου Ρ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος κείμενον ἐκτὸς τῶν δύο κύκλων ἄγονται ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα πρὸς τοὺς κύκλους. Διότι ἡ δύναμις τοῦ Ρ ὡς πρὸς ἕκαστον κύκλον ἴσονται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἐφαπτομένου τμήματος τοῦ ἀγομένου ἐκ τοῦ Ρ πρὸς τὸν κύκλον. Ἀντιστρόφως, ἂν ἐκ τοῦ Ρ ἄγονται ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα πρὸς τοὺς κύκλους, τὸ Ρ ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα αὐτῶν.

Κατὰ συνέπειαν, ἂν οἱ δύο κύκλοι ἔχουν κοινὰς ἐφαπτομένας, ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῶν διέρχεται διὰ τοῦ μέσου ἐκάστης τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων (σχ. 147).

122. Κατασκευὴ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος δύο κύκλων.

α') Ἐὰν διὰ σημείου Μ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος (δ) δύο περιφερειῶν (Κ) καὶ

(Κ') φέρωμεν μίαν τέμνουσαν MAB τῆς (Κ) καὶ ἑτέραν τέμνουσαν MA'B' τῆς (Κ') (σχ. 148), τότε $M \in (\delta) \Rightarrow \Delta \text{υν } M/(K) = \Delta \text{υν } M/(K') \Rightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MA'} \cdot \overline{MB'} \Rightarrow A, B, B', A'$ ὁμοκυκλικά (§ 113), ἤτοι διὰ τῶν A, B, B', A' διέρχεται περιφέρεια (γ).



Σχ. 148

β') **Ἀντιστρόφως:** Ἐστω περιφέρεια (γ) τέμνουσα τὴν (Κ) εἰς A καὶ B καὶ τὴν (Κ') εἰς A' καὶ B' (σχ. 148). Αἱ εὐθεῖαι AB καὶ A'B' τέμνονται ἐν γένει εἰς τὸ M. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MA'} \cdot \overline{MB'}$ (λόγῳ τῆς περιφερείας (γ)). Ἐπειδὴ ὁμοῦς $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \Delta \text{υν } M/(K)$ καὶ $\overline{MA'} \cdot \overline{MB'} = \Delta \text{υν } M/(K')$, ἔπεται ὅτι τὸ M ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς (Κ) καὶ (Κ'), ἄρα τὸ M ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἀξονα (δ). Ἐπομένως ριζικὸς ἀξων εἶναι ἡ διὰ τοῦ M ἀγομένη $\perp KK'$.

γ') **Γενικὴ κατασκευὴ τοῦ ριζικοῦ ἀξονος.** — Γράφομεν περιφέρειαν (γ) τέμνουσαν τὴν (Κ) εἰς A καὶ B καὶ τὴν (Κ') εἰς A' καὶ B' (σχ. 148). Ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς M τῶν εὐθειῶν AB καὶ A'B' φέρομεν τὴν κάθετον (δ) ἐπὶ τὴν διάκεντρον. Ἡ (δ) εἶναι ὁ ριζικὸς ἀξων τῶν (Κ) καὶ (Κ').

δ') Εἰς τὰς εἰδικὰς περιπτώσεις τῆς § 121 ἡ κατασκευὴ τοῦ ριζικοῦ ἀξονος δύναται νὰ γίνῃ ἀκόμη εὐκολώτερον.

123. Τύπος τῆς διαφορᾶς τῶν δυνάμεων σημείου ὡς πρὸς δύο κύκλους. Ἐστω P σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου δύο κύκλων (Κ, R), (Κ', R') προβλλόμενον εἰς N ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἀξονος τῶν δύο κύκλων καὶ εἰς H ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν κέντρων KK' (σχ. 147). Ἐστω δὲ O τὸ μέσον τοῦ KK'. Ἐχομεν :

$$\Delta \text{υν } P/(K) = PK^2 - R^2, \quad \Delta \text{υν } P/(K') = PK'^2 - R'^2 \quad \text{καὶ ἐξ αὐτῶν :}$$

$$\Delta \text{υν } P/(K) - \Delta \text{υν } P/(K') = PK^2 - R^2 - (PK'^2 - R'^2) = PK^2 - PK'^2 - (R^2 - R'^2).$$

Εἶναι ὁμοῦς : $PK^2 - PK'^2 = 2\overline{KK'} \cdot \overline{OH}$ (2ον θεώρ. τῆς διαμέσου § 83) καὶ $R^2 - R'^2 = 2\overline{KK'} \cdot \overline{O\Pi}$ (ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ὀριζοντος τὸν πόδα Π τοῦ ριζικοῦ ἀξονος § 120). Ἐπομένως

$$\Delta \text{υν } P/(K) - \Delta \text{υν } P/(K') = 2\overline{KK'} \cdot \overline{OH} - 2\overline{KK'} \cdot \overline{O\Pi} = 2\overline{KK'}(\overline{OH} - \overline{O\Pi}) = 2\overline{KK'}(\overline{PO} + \overline{OH})$$

(σχέσις τοῦ Chasles) $2\overline{KK'} \cdot \overline{PH} = 2\overline{KK'} \cdot \overline{NP}$. Ἐξ οὗ ὁ «τόπος τῆς διαφορᾶς τῶν δυνάμεων»

$$\Delta \text{υν } P/(K) - \Delta \text{υν } P/(K') = 2\overline{KK'} \cdot \overline{NP}$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου δύναται νὰ διατυπωθῆ τὸ κάτωθι θεώρημα.

(Θ)—Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς τῶν δυνάμεων ἐνὸς σημείου ὡς πρὸς δύο κύκλους ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τῆς διακέντρου ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου ἀπὸ τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν δύο κύκλων.

(Ἀσκήσεις: 534, 536, 539).

124. Ριζικὸν κέντρον τριῶν κύκλων. Ἐστωσαν τρεῖς ὁμοεπίπεδοι κύκλοι (K_1), (K_2), (K_3) (σχ. 149). Ἐστω (δ_2) ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν (K_1) καὶ (K_2), (δ_1) ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν (K_2) καὶ (K_3), (δ_3) ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν (K_3) καὶ (K_1).

Ἐάν οἱ (δ_3) καὶ (δ_1) τέμνονται εἰς τι σημεῖον I, τότε :

$I \in (\delta_3) \Rightarrow \Delta \text{υν} I / (K_1) =$
 $= \Delta \text{υν} I / (K_2)$ καὶ

$I \in (\delta_1) \Rightarrow \Delta \text{υν} I / (K_2) =$
 $= \Delta \text{υν} I / (K_3)$ ὁπότε :

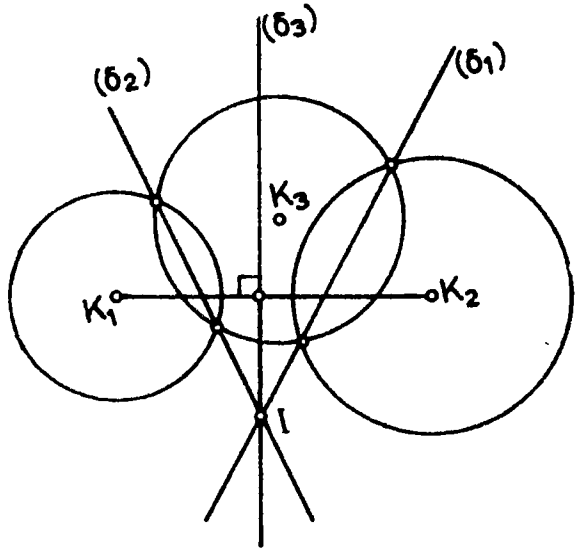
$\Delta \text{υν} I / (K_1) = \Delta \text{υν} I / (K_3)$, δηλ.

τὸ I ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν (K_1) καὶ (K_3),

δηλ. εἰς τὸν (δ_2). Βλέπομεν ὅτι οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονες τῶν τριῶν κύκλων λαμβανομένων ἀνά δύο συντρέχουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον I. Τὸ I λέγεται **ριζικὸν κέντρον τῶν τριῶν κύκλων** καὶ εἶναι σημεῖον ἔχον ἴσας δυνάμεις καὶ ὡς πρὸς τοὺς τρεῖς κύκλους (καὶ ἐπομένως ἔχον τὴν ἴδιαν σχετικὴν θέσιν ὡς πρὸς τοὺς τρεῖς κύκλους). Εἰς ἤν περίπτωσιν τὸ ριζικὸν κέντρον εἶναι *ἐξωτερικόν* καὶ τῶν τριῶν κύκλων, τότε εἶναι ἐκεῖνο τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, ἀπὸ τοῦ ὁποῖον ἄγονται ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα καὶ πρὸς τοὺς τρεῖς κύκλους.

Διερεῦνησις. Ἴνα οἱ (δ_2) καὶ (δ_1) τέμνονται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ τρία κέντρα K_1 , K_2 , K_3 νὰ μὴ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Τότε θὰ ὑπάρχη ἓν ὠρισμένον ριζικὸν κέντρον.

Ἐάν τὰ τρία κέντρα K_1 , K_2 , K_3 κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τότε δύο τινὰ δύνανται νὰ συμβαίνουν : 1ον) Οἱ (δ_1) καὶ (δ_2) δὲν ταυτίζονται, ὁπότε εἶναι παράλληλοι καὶ δὲν ὑπάρχει ριζικὸν κέντρον. Δυνάμεθα τότε, συμβατικῶς, νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ ριζικὸν κέντρον εἶναι τὸ εἰς ἄπειρον σημεῖον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν διεύθυνσιν τοῦ (δ_1).



Σχ. 149

2ον) Οί (δ_1) και (δ_2) ταυτίζονται εις μίαν εὐθεϊαν (δ), ὁπότε πᾶν σημεῖον τῆς (δ) ἔχει ἴσας δυνάμεις και ὡς πρὸς τοὺς τρεῖς κύκλους. Τὸ ριζικὸν κέντρον εἶναι, τότε, ἀπροσδιόριστον ἐπὶ τῆς (δ).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

529. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ δύναμις τοῦ κέντρου βάρους τριγώνου ὡς πρὸς τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν ἰσοῦται πρὸς τὸ $-\frac{1}{9}$ τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

530. Ἐάν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι και ἐγγράψιμον και περιγράψιμον εις κύκλον, ἡ δύναμις τοῦ σημείου τομῆς δύο ἀπέναντι πλευρῶν του προεκτεινομένων ὡς πρὸς τὴν περιγεγραμμένην περὶ αὐτὸ περιφέρειαν ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης εις αὐτὸ περιφέρειας.

531. Ἐστῶσαν Α', Β', Γ' τὰ συμμετρικὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς. Νά ὑπολογισθῆ τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων τῶν Α', Β', Γ' ὡς πρὸς τὴν περιγεγραμμένην περὶ τὸ τρίγωνον περιφέρειαν, συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

532. Δύο περιφέρειαι (Κ, R), (Κ', R') τέμνονται εις Α και Β. Νά εὐρεθῆ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει :

$$\Delta \text{υν}Μ/(Κ, R) + \Delta \text{υν}Μ/(Κ', R') = 0$$

533. Εὐθεῖα παρ/λος τῇ βάσει ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὰς πλευράς ΑΒ και ΑΓ εις Δ και Ε. Νά δειχθῆ ὅτι τὸ ὕψος ΑΗ τοῦ τρ. ΑΒΓ κείται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἀξονοῦ τῶν περιφερειῶν μὲ διαμέτρους ΒΕ και ΓΔ.

534. Τρεῖς περιφέρειαι ἔχουν κοινὴν χορδὴν. Νά δειχθῆ ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐφαπτομένων τμημάτων τῶν ἀγομένων ἀπὸ τυχόν σημείου τῆς μιᾶς πρὸς τὰς δύο ἄλλας (ἔν πρὸς ἐκάστην) εἶναι σταθερός.

535. Δίδεται περιφέρεια (Ο, R) και σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς. Διὰ τοῦ Α διέρχεται μεταβλητὴ περιφέρεια (γ) τέμνουσα τὴν (Ο, R) εις Μ και Ν. Τόπος τῆς τομῆς τῆς εὐθΜΝ και τῆς εις τὸ Α ἐφαπτομένης τῆς (γ).

536. Δίδεται περιφέρεια (Ο, R) και σταθερὸν σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου τῆς. Μεταβλητὴ περιφέρεια (γ) ἔχει τὸ κέντρον τῆς ἐπὶ τῆς (Ο, R) και διέρχεται διὰ τοῦ Α. Νά δειχθῆ ὅτι ὁ ριζικὸς ἀξων τῶν δύο περιφερειῶν (Ο, R) και (γ) ἐφάπτεται μιᾶς σταθερᾶς περιφέρειας.

537. Ποῖον τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν περιφερειῶν τῶν γραφομένων μὲ διαμέτρους τὰς τρεῖς πλευράς ἑνὸς τριγώνου;

538. Νά δειχθῆ ὅτι τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ ἔγκεντρον τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τρ. ΑΒΓ. («μεσοτριγώνου»).

539. Ἐάν (Ο, ρ) και (Κ, R) εἶναι ὁ ἐγγεγραμμένος και ὁ περιγεγραμμένος εις τρ. ΑΒΓ κύκλος, νά δειχθῆ ὅτι $\Delta \text{υν}Ο/(Κ, R) = -2R\rho$.

(Πρὸς τοῦτο ὡς χρησιμοποιηθῆ ὁ τύπος τῆς διαφορᾶς τῶν δυνάμεων (§ 123) ὡς ἐξῆς. Ἐστὼ ὅτι ἡ διχοτόμος ΑΟ τοῦ τρ. ΑΒΓ τέμνει τὴν (Κ, R) εις Α₁. Ἡ περιφέρεια (ΒΟΓ) ἔχει κέντρον τὸ Α₁. Ἄς ληφθῆ ἡ διαφορὰ δυνάμεων τοῦ Ο ὡς πρὸς τοὺς κύκλους (Κ, R) και (ΒΟΓ)).

540. Συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν α, β, γ τριγώνου ΑΒΓ, νά ὑπολογισθῆ τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων τῶν κορυφῶν τοῦ τρ. ΑΒΓ ὡς πρὸς τὸν κύκλον τῶν 9 σημείων τοῦ τριγώνου.

541. Ἀπὸ τὸν κόδα τοῦ ὕψους ΑΑ' τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς

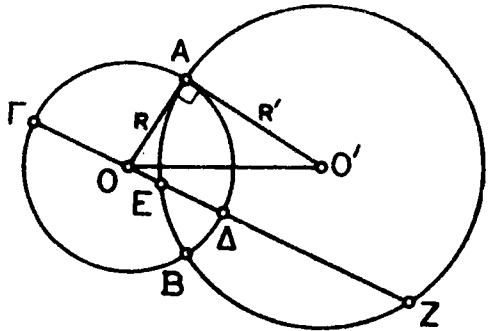
πλευράς AB , $ΑΓ$, αίτινες τέμνουν εις B_1 τὴν εὐθ AB καὶ εις Γ_1 τὴν $ΑΓ$, καθὼς καὶ καθετοὺς ἐπὶ τὰς ἰδίας πλευράς τεμνούσας εις B_2 τὴν AB καὶ Γ_2 τὴν $ΑΓ$. Νὰ δεიχθῆ ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι $B\Gamma$, $B_1\Gamma_1$, $B_2\Gamma_2$ συντρέχουν εις ἓν σημεῖον.

ΚΥΚΛΟΙ ΤΕΜΝΟΜΕΝΟΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΣ — ΨΕΥΔΟΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΣ

125. Ὁρθογωνιότης δύο κύκλων. α') Ἐστωσαν δύο περιφέρειαι (O, R) καὶ (O', R') τεμνόμεναι ὀρθογωνίως εις A καὶ B . Τότε αἱ ἀκτῖνες τῶν OA καὶ $O'A'$ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ τὸ τρίγωνον $ΟΑΟ'$ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐπομένως, κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, θὰ εἶναι :

$$(1) \quad (OO')^2 = R^2 + R'^2.$$

Ἀντιστρόφως, ἂν ἰσχύῃ ἡ (1), τότε ὑπάρχει ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΟΑΟ'$ μὲ καθετοὺς πλευράς $OA=R$, $O'A=R'$ καὶ οἱ κύκλοι (O, R) καὶ (O', R') τέμνονται ὀρθογωνίως. Ἐξ αὐτῶν ἔπεται τὸ :



Σχ. 150

ΘΕΩΡΗΜΑ I : Μία ἀναγκαῖα καὶ ἰκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο περιφέρειαι τέμνονται ὀρθογωνίως, εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς διακέντρου τῶν νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτῖνων τῶν.

β') Ἐφ' ὅσον οἱ κύκλοι (O, R) καὶ (O', R') τοῦ σχ. 150 τέμνονται ὀρθογωνίως, ἡ ἀκτίς $OA=R$ τοῦ ἑνὸς ἐφάπτεται εἰς A τοῦ ἄλλου καὶ συνεπῶς ἔχομεν (§ 118, γ') ὅτι :

$$(2) \quad \Delta_{\text{υν}O/O'} = R^2.$$

Ἀντιστρόφως ἡ (2) συνεπάγεται ὅτι τὸ ἐκ τοῦ O ἀγόμενον ἐφαπτόμενον τμήμα πρὸς τὸν (O', R') ἰσοῦται πρὸς R , ὁπότε οἱ κύκλοι τέμνονται ὀρθογωνίως. Ἐπομένως ἰσχύει τὸ

ΘΕΩΡΗΜΑ II : Μία ἀναγκαῖα καὶ ἰκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο περιφέρειαι τέμνονται ὀρθογωνίως, εἶναι ἡ δύναμις τοῦ κέντρου τῆς μῆς ὡς πρὸς τὴν ἄλλην νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἰδίας ἀπτεῖς ἀκτῖνος.

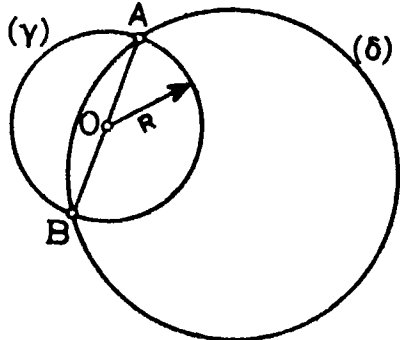
γ') Ἐάν φέρωμεν διάμετρον $\Gamma\Delta$ τῆς (O, R) , ἡ δὲ εὐθ $\Gamma\Delta$ τέμνη τὴν (O', R') εἰς E καὶ Z (σχ. 150), τότε ἡ σχέσηις (2) ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν $\overline{OE} \cdot \overline{OZ} = R^2$ ἢ τὴν $\overline{OE} \cdot \overline{OZ} = O\Gamma^2 = O\Delta^2$, ἥτις πάλιν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὅτι τὰ E καὶ Z διαιροῦν ἄρμονικῶς τὸ $\Gamma\Delta$ (§ 63, α'), δηλ. $(E, Z, \Gamma, \Delta) = -1$. Ἐπομένως ἰσχύει τὸ

ΘΕΩΡΗΜΑ III: Μία άναγκαία και ικανή συνθήκη, ίνα δύο περιφέρειαι τέμνονται όρθογωνίως, είναι μία διάμετρος της μίας περιφέρειας νά χωρίζεται άρμονικώς υπό της άλλης περιφέρειας.

Πόρισμα. Πάσα περιφέρεια διερχομένη διά δύο σημείων Α και Β τέμνει όρθογωνίως πάσαν άπολλώνιον περιφέρειαν άναφερομένην εις τὰ Α και Β.

126. Περιφέρεια τεμνομένη ψευδοορθογωνίως υπό έτέρας περιφέρειας. Όρισμός.—

Λέγομεν ότι ή περιφέρεια (γ) τέμνεται ψευδοορθογωνίως υπό της περιφέρειας (δ) (σχ. 151), όταν ή (δ) τέμνη την (γ) εις δύο εκ διαμέτρου αντίθετα σημεία.



Διά νά συμβαίνη τοϋτο, πρέπει και άρκει ό ριζικός άξων των (γ) και (δ) νά είναι διάμετρος της (γ), ήτοι τό κέντρον Ο της (γ) νά έχη ίσας δυνάμεις ως πρός τās δύο περιφέρειας. Άλλά

$$\text{δυν}O/(γ) = \overline{OA} \cdot \overline{OB} = -R^2$$

Σχ. 151

συνεπώς και $\text{δυν}O/(δ) = -R^2$: 'Ισχύει λοιπόν ή πρότασις :

(Θ)— Μία άναγκαία και ικανή συνθήκη, ίνα περιφέρεια (γ) τέμνεται ψευδοορθογωνίως υπό της περιφέρειας (δ), είναι ή δύναμις του κέντρου της (γ) ως πρός την (δ) νά ίσούται με τό αντίθετον του τετραγώνου της ίδιας αΐτης ακτίνας.

Πόρισμα. 'Ινα ή (O', R') τέμνη ψευδοορθογωνίως (διχοτομή) την (O, R), πρέπει και άρκει : $(O'O)^2 = R'^2 - R^2$.

Παρατήρησις. 'Η σχέσις της όρθογωνιότητος είναι συμμετρική σχέσις μέσα εις τό σύνολον των κύκλων του επιπέδου, δηλ. άν ή περιφέρεια (γ) τέμνεται όρθογωνίως υπό της (γ'), τότε και ή (γ') τέμνεται όρθογωνίως υπό της (γ).

'Η σχέσις της ψευδοορθογωνιότητος δέν είναι συμμετρική, διότι ή διάμετρος AB της (γ) (σχ. 151) είναι άπλώς χορδή της (δ) και όχι διάμετρος. 'Ως εκ τούτου ή έκφρασις : ή (γ) τέμνεται ψευδοορθογωνίως υπό της (δ).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

542. Νά δειχθί ότι ό τόπος των κέντρων των περιφερειών των τεμνουσών ψευδοορθογωνίως δύο δεδομένας περιφέρειας είναι τό συμμετρικόν του ριζικού άξονος των δοθεισών ως πρός τό μέσον της διακέντρου αυτών.

543. Τίς ό γ.τ. των κέντρων των περιφερειών των τεμνουσών όρθογωνίως δοθείσαν περιφέρειαν και ψευδοορθογωνίως έτέραν δοθείσαν περιφέρειαν;

544. Νά κατασκευασθί περιφέρεια i) τέμνουσα όρθογωνίως τρεις δοθείσας περιφέρειας ή ii) τέμνουσα ψευδοορθογωνίως ταύτας.

545. Νά γραφή περιφέρεια τοιαύτη, ὥστε τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα τὰ ἀγόμενα πρὸς αὐτὴν ἀπὸ τρία δεδομένα σημεῖα νὰ ἔχουν μῆκη δοθέντα.

546. Νά γραφή περιφέρεια i) διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ὀρθογωνίως τέμνουσα δοθείσαν περιφέρειαν ἢ ii) διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου καὶ ὀρθογωνίως τέμνουσα δύο δεδομένας περιφέρειας.

547. Δοθείσων δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν (O, R) , (O, R') καὶ τρίτης περιφέρειας (c) νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν τεμνουσῶν ὀρθογωνίως τὴν (O, R') καὶ τῶν ὁποίων ὁ ριζικὸς ἀξων μετὰ τῆς (c) νὰ ἐφάπτεται τῆς ὁμοκέντρου (O, R) . (βλ. § 123).

548. i) Δοθέντων δύο κύκλων (K, R) , (Λ, ρ) νὰ δεიχθῇ ὅτι ὅλαι αἱ περιφέρειαι αἱ τέμνουσαι ψευδοὐρθογωνίως ἀμφοτέρους τοὺς δοθέντας διέρχονται διὰ δύο σταθερῶν σημείων τῆς εὐθΚΛ.

ii) Ἐάν οἱ κύκλοι (K, R) καὶ (Λ, ρ) κείνται ἐκτὸς ἀλλήλων, τότε πᾶσα περιφέρεια τέμνουσα ὀρθογωνίως ἀμφοτέρους τέμνει καὶ τὴν διάκεντρον ΚΛ' καὶ μάλιστα εἰς δύο σταθερὰ σημεῖα.

549. Δίδεται περιφέρεια (K, R) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐξωτερικὰ αὐτῆς, ἐξ ὧν τὸ Β κείται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἐπαφῶν τῶν ἐφαπτομένων τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ Α πρὸς τὴν (K, R) . Νά δειχθῇ ὅτι

i) Ὁ μὲ διάμετρον ΑΒ κύκλος τέμνει ὀρθογωνίως τὸν (K, R) . ii) Οἱ κύκλοι μὲ κέντρα Α καὶ Β, ὀρθογωνίως τέμνοντες τὸν (K, R) , τέμνονται καὶ μετὰζῦ τῶν ὀρθογωνίως.

ΔΕΣΜΑΙ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ

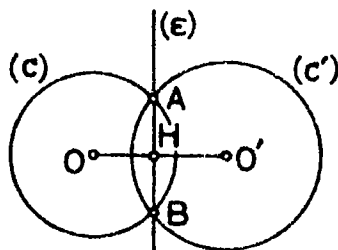
127. Ὅρισμοὶ καὶ θεωρήματα. α') Κατ' ἀρχὴν, καλεῖται **δέσμη περιφερειῶν** τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ μίαν περιφέρειαν (c) καὶ ἀπὸ ὄλας τὰς περιφέρειας (c') , αἱ ὁποῖαι ἔχουν μετὰ τῆς (c) ἓνα καὶ τὸν αὐτὸν ριζικὸν ἀξωνα (ϵ) .

Θὰ δεῖξωμεν τώρα ὅτι, δοθείσης μιᾶς περιφέρειας (c) καὶ μιᾶς εὐθείας (ϵ) , ὑπάρχουν πάντοτε περιφέρειαι ἔχουσαι μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἀξωνα τὴν εὐθεῖαν (ϵ) .

Παρατήρησις. Ἐάν ὑπάρχουν τοιαῦται περιφέρειαι, τὰ κέντρα τῶν εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ κέντρου O τῆς (c) ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ϵ) (ἀφοῦ ὁ ριζικὸς ἀξων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον).

β') Διακρίνομεν **τρεῖς περιπτώσεις**, ἀναλόγως τῆς σχετικῆς θέσεως τῆς εὐθείας (ϵ) μετὰ τῆς περιφέρειας (c) καὶ θὰ διαπιστώσωμεν ὅτι ὑπάρχουν τρία διαφορετικὰ εἶδη δεσμῶν περιφερειῶν.

I. Αἱ (c) καὶ (ϵ) τέμνονται εἰς Α καὶ Β. Τότε, ἂν περιφέρεια (c') ἔχη μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἀξωνα τὴν (ϵ) , θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην $\Delta\text{υν} A/(c) = \Delta\text{υν} A/(c') = 0$ καὶ $\Delta\text{υν} B/(c) = \Delta\text{υν} B/(c') = 0$. Ἀφοῦ δὲ τὰ ση-



Σχ. 152

μετά A και B έχουν μηδενικάς δυνάμεις ως προς την (c') , διὰ τοῦτο ἡ (c') διέρχεται διὰ τῶν A και B .

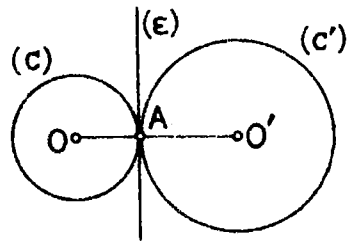
Ἄντιστρόφως, ἂν περιφέρεια (c') διέρχεται διὰ τῶν A και B , τότε ἔχει μετὰ τῆς (c) , ὡς ριζικὸν ἄξονα, τὴν εὐθ AB , δηλ. τὴν $(ε)$. Ἐξ αὐτῶν ἔπεται τὸ

Θεώρημα. — Ἐστω περιφέρεια (c) και εὐθεῖα $(ε)$ τεμνόμεναι εἰς A και B . Τότε ἡ περιφέρεια (c) και αἱ περιφέρειαι (c') , αἱ ὁποῖαι ἔχουν μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθειαν $(ε)$, ἀποτελοῦν τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν τῶν διερχομένων διὰ τῶν A και B .

Ἄρισμός. Λέγομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι τοῦ ἀνωτέρω συνόλου ἀποτελοῦν δέσμη μὲ βασικά σημεῖα A και B .

Τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῆς ἀνωτέρω δέσμης, δηλ. τῶν διερχομένων διὰ τῶν A και B , εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ AB .

II. Αἱ (c) και $(ε)$ ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον A . Τότε, ἂν περιφέρεια (c') ἔχη μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν $(ε)$, θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην $\text{Δυν}A/(c) = \text{Δυν}A/(c') = 0$, ἐπομένως ἡ (c') διέρχεται διὰ τοῦ A . Ἐχει και τὸ κέντρον τῆς ἐπὶ τῆς εὐθ OA (ἐδ. α', παρατήρ.), ἄρα ἡ (c') ἐφάπτεται τῆς $(ε)$ εἰς A .



Σχ. 153

Ἄντιστρόφως, ἂν περιφέρεια (c') ἐφάπτεται τῆς $(ε)$ εἰς A , ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῆς και τῆς (c) εἶναι ἡ εἰς A κάθετος ἐπὶ τὴν OA , δηλ. ἡ $(ε)$. Ἐκ τούτων ἔπεται τὸ :

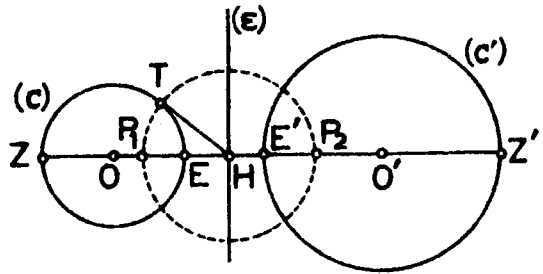
Θεώρημα. — Ἐστω περιφέρεια (c) και εὐθεῖα $(ε)$ ἐφαπτόμεναι εἰς τὸ σημεῖον A . Τότε ἡ περιφέρεια (c) και αἱ περιφέρειαι (c') , αἱ ὁποῖαι ἔχουν μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθειαν $(ε)$, ἀποτελοῦν τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῆς $(ε)$ εἰς τὸ A .

Λέγομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι τοῦ συνόλου τούτου ἀποτελοῦν δέσμη ἐφαπτομένων περιφερειῶν.

Τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῆς ἀνωτέρω δέσμης εἶναι ὀλόκληρος ἡ εὐθεῖα OA , ἂν δεχθῶμεν ὅτι τὸ σημεῖον A εἶναι περιφέρεια μηδενικῆς ἀκτίνας (σημεῖον - κύκλος) περιλαμβανομένη εἰς τὴν δέσμη.

III. Αἱ (c) και $(ε)$ οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν. Τότε ἡ προβολὴ H τοῦ κέντρου O τῆς (c) ἐπὶ τὴν $(ε)$ εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τῆς (c) και ἐπομένως ἀγεται ἐκ τοῦ H ἐφαπτόμενον τμήμα HT πρὸς τὴν περιφέρειαν (c) (σχ. 154). Ἄς λάβωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας OH τὰ σημεῖα P_1, P_2 τοιαῦτα, ὥστε : $HP_1 = HP_2 = HT \Rightarrow$

(1) $HP_1^2 = HP_2^2 = HT^2$
 και ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὑ-
 πάρχει περιφέρεια (c') ἔχου-
 σα μετὰ τῆς (c) ριζικὸν ἄ-
 ξονα τὴν (ε). Τὸ κέντρον
 O' τῆς (c') θὰ κεῖται τότε
 ἐπὶ τῆς εὐθ OH και μία διά-
 μετρος E'Z' τῆς (c') θὰ κεῖ-
 ται ἐπὶ τῆς εὐθ OH. Ἐπειδὴ
 τὸ H δέον νὰ ἔχη ἴσας δυ-
 νάμεις ὡς πρὸς τὰς (c) και (c'), θὰ εἶναι : $HT^2 = \overline{HE'} \cdot \overline{HZ'}$ ἢ λόγῳ τῆς (1)



Σχ. 154

(2) $HP_1^2 = HP_2^2 = \overline{HE'} \cdot \overline{HZ'}$.

Ἡ (2) δεικνύει ὅτι ἡ τετράς P₁, P₂, E', Z' εἶναι ἄρμονικὴ (§ 63).

Ἀντιστροφή. Ἐστώσαν δύο σημεῖα E', Z' συζυγῆ ἄρμονικὰ ὡς πρὸς τὰ P₁, P₂ και ἔστω (c') περιφέρεια διαμέτρου E'Z' και κέντρου O'. Τότε θὰ ἔχωμεν $HP_1^2 = HP_2^2 = \overline{HE'} \cdot \overline{HZ'}$ ἢ λόγῳ τῶν (1) : $HT^2 = \overline{HE'} \cdot \overline{HZ'}$, δηλ. ΔυνH/(c) = ΔυνH/(c'). Ἄρα τὸ H ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν (c) και (c'), ὅστις ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν OO' ταυτίζεται μετὰ τὴν εὐθεῖαν (ε).

—Ἐὰν τὰ σημεῖα P₁, P₂ τὰ θεωρήσωμεν ὡς σημεῖα - κύκλους, ἢ σχέσις $HT^2 = HP_1^2$ δύναται νὰ γραφῆ ΔυνH/(c) = ΔυνH/(P₁), ἄρα ὁ ριζικός ἄξων τῶν (P₁) και (c) εἶναι ἢ εἰς H κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθ OP₁, δηλ. ἢ (ε). Τὸ σημεῖον - κύκλος P₁ ἀναποκρίνεται εἰς τὴν ἀπαίτησιν τοῦ προβλήματος. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει και μετὰ τὸ P₂.

Ἐκ τούτων ἔπεται τό :

Θεώρημα. — Ἐστω περιφέρεια (c) και εὐθεῖα (ε) ἐξωτερικὴ τῆς (c) και ἔστω H ἡ προβολὴ τοῦ κέντρου O τῆς (c) ἐπὶ τὴν (ε). Τότε ἡ περιφέρεια (c) και πᾶσαι αἱ περιφέρειαι (c'), αἱ ὅποσαι ἔχουν μετὰ τῆς (c) ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν (ε), ἀποτελοῦν τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν μετὰ διαμέτρους E'Z' τοιαύτας, ὥστε τὰ E' και Z' νὰ εἶναι συζυγῆ ἄρμονικὰ τῶν σταθερῶν σημείων P₁, P₂ τῶν κειμένων ἐπὶ τῆς εὐθείας OH και ὀριζομένων ὑπὸ τῆς σχέσεως : $HP_1^2 = HP_2^2 = \Delta \text{υν } H/(c)$.

Ὅρισμός. Λέγομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι τοῦ ἀνωτέρω συνόλου ἀποτελοῦν δέσμη μετὰ ὀριακὰ σημεῖα P₁, P₂ (ἢ μετὰ σημεῖα Poncelet, τὰ P₁, P₂).

γ) Σύνολον τῶν κέντρων μιᾶς δέσμης μετὰ ὀριακὰ σημεῖα. Ἐπειδὴ ἡ τετράς P₁, P₂, E', Z' εἶναι ἄρμονικὴ (σχ. 154), ἔχομεν $\overline{O'P_1} \cdot \overline{O'P_2} = \overline{O'E'}^2 = \overline{O'Z'}^2$. Ἄρα τὸ $\overline{O'P_1} \cdot \overline{O'P_2}$ εἶναι θετικὸν και τὰ διανύσματα $\vec{O'P_1}, \vec{O'P_2}$ ὁμόρροπα. Ἐπομένως τὸ κέντρον O' τυχούσης περιφερείας τῆς δέσμης εὐρίσκεται εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ τμήματος P₁P₂. Συνάγομεν λοιπὸν ὅτι

Τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν μιᾶς δέσμης μὲ ὀριακὰ σημεῖα P_1, P_2 εἶναι τὸ ἔκτος τοῦ τμήματος P_1P_2 μέρος τῆς εὐθείας.

Συμπέρασμα. Μία περιφέρεια καὶ μία εὐθεῖα ὀρίζουν, πάντοτε, μίαν δέσμη περιφερειῶν. Ἐχομεν δὲ τρία εἶδη δεσμῶν περιφερειῶν.

128. Ἰδιότητες τῶν περιφερειῶν μιᾶς δέσμης. α') (Θ) — Ὁ ριζικὸς ἄξων δύο οἰωνδήποτε περιφερειῶν μιᾶς δέσμης ὀριζομένης ὑπὸ μιᾶς περιφερείας (c) καὶ μιᾶς εὐθείας (ε) εἶναι ἡ εὐθεῖα (ε).

Ἐστω δέσμη περιφερειῶν ὀριζομένη ὑπὸ μιᾶς περιφερείας (c) καὶ μιᾶς εὐθείας (ε) καὶ ἔστωσαν (c') καὶ (c'') δύο τυχοῦσαι περιφέρειαι τῆς δέσμης ταύτης. Πᾶν σημεῖον M τῆς (ε) ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς (c) καὶ (c') καὶ ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς (c) καὶ (c''). Ἄρα ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς (c') καὶ (c'').

β') (Θ) — Δύο μὴ ὁμόκεντροι περιφέρειαι ὀρίζουν μίαν δέσμη.

Ἐστωσαν (c) καὶ (c') δύο μὴ ὁμόκεντροι περιφέρειαι. Αὗται ἔχουν ἓνα ριζικὸν ἄξωνα (ε). Ἡ περιφέρεια (c) καὶ ἡ (ε) ὀρίζουν μίαν δέσμη περιφερειῶν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει καὶ ἡ (c').

γ') (Θ) — Ἴνα σύνολον περιφερειῶν ἀποτελεῖ δέσμη, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ κέντρα των νὰ κείνται ἐπ' εὐθείας τινὸς (δ) καὶ νὰ ὑπάρχη σημεῖον M ἔχον ἴσας δυνάμεις πρὸς ὅλας τὰς περιφερείας ταύτας.

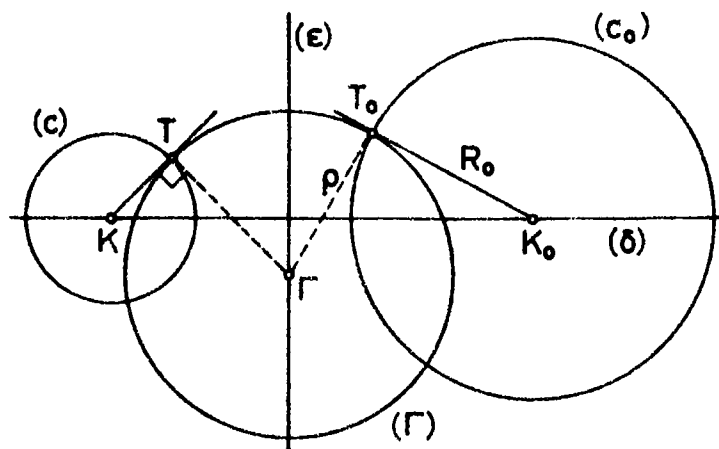
Διότι δύο ἐκ τῶν περιφερειῶν τούτων ἔχουν ριζικὸν ἄξωνα τὴν ἐκ τοῦ M κάθετον ἐπὶ τὴν (δ). Ἐπομένως ὀρίζουν μίαν δέσμη. Εἰς τὴν δέσμη αὐτὴν προφανῶς ἀνήκουν καὶ πᾶσαι αἱ ἄλλαι περιφέρειαι τῆς ἀνωτέρω οἰκογενείας.

129. Ὀρθογώνιοι δέσμαι περιφερειῶν. α') Ἄς θεωρήσωμεν δέσμη περιφερειῶν F, μὲ εὐθεῖαν κέντρων τὴν (δ) καὶ ριζικὸν ἄξωνα τὴν (ε), καθὼς καὶ δύο περιφερείας (c) καὶ (c₀) τῆς δέσμης ταύτης F, κέντρων K καὶ K₀ (σχ. 155). Ἐστω Γ σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος κείμενον ἔκτος τῶν περιφερειῶν (c) καὶ (c₀). Ἐκ τοῦ Γ ἄγονται ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα ΓΤ καὶ ΓΤ₀ πρὸς τὰς (c) καὶ (c₀).

Ἐὰν λοιπὸν ἡ (c₀) μένη σταθερὰ καὶ ἡ (c) μεταβάλλεται, διατρέχουσα ὅλας τὰς περιφερείας τῆς δέσμης F, τὸ ἐφαπτόμενον τμήμα ΓΤ διατηρεῖ σταθερὸν μήκος (=ΓΤ₀) καὶ ἐπομένως τὸ T κεῖται πάντοτε ἐπὶ σταθερᾶς περιφερείας (Γ, ΓΤ₀) τεμνούσης ὀρθογωνίως ὅλας τὰς περιφερείας τῆς δέσμης.

Ἀντιστρόφως ἔστω (Γ, ρ) περιφέρεια τέμνουσα ὀρθογωνίως δύο περιφερείας (c) καὶ (c₀) τῆς δέσμης. Τότε $\Delta\text{υν}\Gamma/(c) = \Delta\text{υν}\Gamma/(c_0) = \rho^2$, ἤτοι τὸ Γ ἀνήκει εἰς τὸν ριζικὸν ἄξωνα (ε) τῆς δέσμης καὶ εἶναι καὶ ἐξωτερικὸν ὄλων τῶν περιφερειῶν τῆς δέσμης (διότι ἔχει ὡς πρὸς ὅλας τὴν ἰδίαν, θε-

τικήν, δύναμιν ρ^2). Βλέπομεν ὅτι «ὑπάρχουν ἄπειροι περιφέρειαι (Γ) ὀρθογώνιοι πρὸς ὅλας τὰς περιφερείας τῆς δέσμης F , τὸ δὲ σύνολον τῶν κέντρων



Σχ. 155

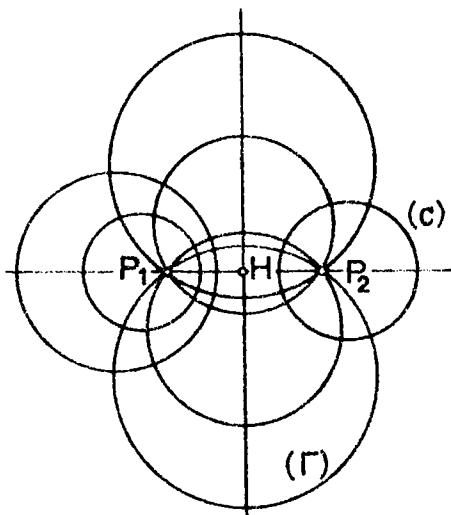
τῶν (Γ) εἶναι τὸ μέρος τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῆς F , τὸ κείμενον ἐκτὸς τῶν περιφερειῶν τῆς F ».

Ἄς καλέσωμεν Φ τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν τούτων (Γ), τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Μία σταθερὰ περιφέρεια (c_0) τῆς δέσμης F , κέντρου K_0 καὶ ἀκτίνοσ R_0 (σχ. 155), τέμνει ὀρθογωνίως ὅλας τὰς περιφερείας (Γ), ἄρα $\Delta\text{υν}K_0/(\Gamma) = R_0^2$. Δηλ. ὑπάρχει σημεῖον K_0 ἔχον τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς ὅλας τὰς περιφερείας (Γ) τοῦ συνόλου Φ . Καὶ ἐπειδὴ τὰ κέντρα τῶν (Γ) κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας (ϵ), διὰ τοῦτο αἱ (Γ) ἀποτελοῦν δέσμη μὲ ριζικὸν ἄξονα τὴν ἐκ τοῦ K_0 κάθετον ἐπὶ τὴν (ϵ) (§ 128, γ'). Ἡ δέσμη αὐτὴ Φ λέγεται ὀρθογώνιος (ἢ συζυγῆς) πρὸς τὴν F καὶ ἔχει εὐθεῖαν κέντρων τὸν ριζικὸν ἄξονα (ϵ) τῆς F καὶ ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν κέντρων KK_0 τῆς F .

Κάθε περιφέρεια τῆς μιᾶς δέσμης τέμνει ὀρθογωνίως πάσας τὰς περιφερείας τῆς ἄλλης δέσμης.

β') Τὰ εἶδη τῶν δύο ὀρθογωνίων δεσμῶν. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δέσμη F εἶναι μὲ ὀριακὰ σημεῖα P_1, P_2 .

Ἄν νοήσωμεν περιφέρειαν (γ) διαμέτρου P_1P_2 , αὕτη τέμνει

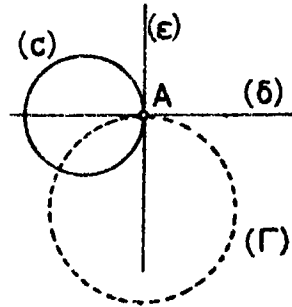


Σχ. 156

ὀρθογωνίως ὄλους τοὺς κύκλους (c) τῆς δέσμης F (ὡς ἐκ τοῦ ὀρισμοῦ τῶν P₁, P₂), ἄρα ἡ (γ) ἀνήκει εἰς τὴν ὀρθογωνίον δέσμη Φ. Τὸ P₁ κείμενον ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῆς δέσμης Φ ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς ὄλας τὰς περιφερείας (Γ) τῆς Φ, ἄρα ΔυνP₁/(Γ) = ΔυνP₁/(γ) = 0. Ἦτοι τὸ P₁ (καὶ ὁμοίως καὶ τὸ P₂) ἀνήκει εἰς τὴν (Γ). Ἡ δέσμη Φ δέχεται τὰ σημεῖα P₁, P₂ ὡς βασικά σημεῖα.

Ἀντιστρόφως, ἂν θεωρήσωμεν ὡς ἀρχικὴν δέσμη τὴν Φ μὲ βασικά σημεῖα P₁, P₂, ἡ ὀρθογωνίός της, δηλ. ἡ F, ἔχει τὰ P₁, P₂ ὡς σημεῖα Poncelet.

— Ἐὰν ἡ F εἶναι δέσμη περιφερειῶν ἐφαπτομένων τῆς (ε) εἰς A μὲ εὐθεῖαν κέντρων τὴν (δ), κάθετον ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὸ A, τότε ἡ ὀρθογωνίος δέσμη Φ θὰ ἔχη εὐθεῖαν κέντρων τὴν (ε) (τὸν ριζικὸν ἄξονα τῆς F). Ἐπειδὴ δὲ πᾶσα περιφέρεια (Γ) τῆς Φ τέμνει ὀρθογωνίως πᾶσαν περιφέρειαν (c) τῆς F, διὰ τοῦτο κατ' ἀνάγκην ἡ (Γ) ἐφάπτεται τῆς (δ) (σχ. 157). Ὡστε ἡ Φ εἶναι ἐπίσης δέσμη ἐφαπτομένων περιφερειῶν.



Σχ. 157

γ' Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται τὸ θεώρημα :

«Ἐκ δύο ὀρθογωνίων δεσμῶν περιφερειῶν, ἂν ἡ μία ἔχη βασικά σημεῖα A, B, ἡ ἄλλη ἔχει ὀριακὰ σημεῖα τὰ A καὶ B καὶ τανάπαλιν. Ἄν ἡ μία εἶναι δέσμη ἐφαπτομένων περιφερειῶν, ἡ ὀρθογωνίός της εἶναι πάλιν δέσμη ἐφαπτομένων περιφερειῶν».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

550. Ἐὰν ὑπάρχουν δύο σημεῖα A, B ἔχοντα ἕκαστον ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς ὄλας τὰς περιφερείας (c₁), (c₂)... (c_n)..., τότε αἱ περιφερείαι αὗται ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν δέσμη.

551. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια ἀνήκουσα εἰς δοθεῖσαν δέσμη καὶ διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου M.

552. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια ἀνήκουσα εἰς δοθεῖσαν δέσμη καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας (δ).

553. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἀνήκουσα εἰς δοθεῖσαν δέσμη καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας (γ).

554. Τρεῖς περιφερείαι (O₁, R₁), (O₂, R₂), (O₃, R₃) ἔχουν τὰ κέντρα τῶν ἐπ' εὐθείας. Νὰ εὐρεθῇ ἰκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη μεταξύ τῶν ἀκτῶν καὶ τῶν ἀποστάσεων τῶν κέντρων, ἵνα αἱ τρεῖς περιφερείαι ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν δέσμη.

555. Τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν τῶν τεμνουσῶν ψευδοὀρθογωνίως δύο δοθείσας περιφερείας ἀποτελεῖ δέσμη. Σχεδιάσατε μετ' ἀκριβείας τὴν δέσμη ταύτην.

556. Τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν ἐκάστη, τῶν ὁποίων τέμνει ὀρθογωνίως μίαν δοθεῖσαν περιφέρειαν καὶ ψευδοὀρθογωνίως μίαν ἄλλην, ἀποτελεῖ δέσμη. Σχεδιάσατε μετ' ἀκριβείας τὴν δέσμη ταύτην.

557. Τὸ σύνολον τῶν ἀπολλωνίων περιφερειῶν τῶν ἀναφερομένων εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B ἀποτελεῖ δέσμη μὲ ὀριακὰ σημεῖα A καὶ B. Ποία ἡ ὀρθογώνιος δέσμη;

558. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων : $B\Gamma = a$, $u_a = h$, $\delta_A = \delta$ ($\delta > h$).

559. Νὰ δευχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς δύο δεδομένας περιφέρειας εἶναι σταθερὸς, εἶναι περιφέρεια ἀνήκουσα εἰς τὴν δέσμη, τὴν ὁποίαν αἱ δύο περιφέρειαι ὀρίζουν.

560. Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια ἀνήκουσα εἰς δοθείσαν δέσμη καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως δοθείσαν περιφέρειαν.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ

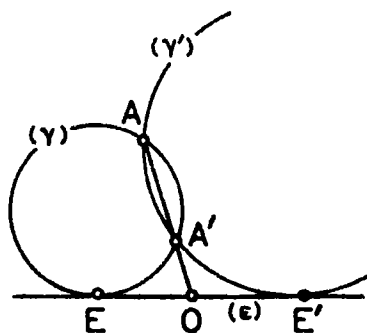
130. Πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου : «Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τριῶν δοθεισῶν περιφερειῶν».

Ἀναφέρομεν τὸ πρόβλημα τοῦτο πληροφορικῶς χωρὶς νὰ προβῶμεν εἰς τὴν λύσιν του, ἢ ὁποία πράγματι ἐπιτυγχάνεται γεωμετρικῶς, ἀλλὰ μὲ τὴν βοήθειαν θεωρημάτων ἐκ τῆς ὁμοιοθεσίας καὶ τῆς ἀντιστροφῆς.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα δίδει γένεσιν εἰς ἑννέα ἄλλα προβλήματα, ὅταν μία ἢ περισσότεραι ἐκ τῶν περιφερειῶν ἀντικατασταθοῦν μὲ σημεῖα (ἄκτις μηδενικὴ) ἢ μὲ εὐθείας (ἄκτις ἄπειρος). Θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ ἐνδιαφερούσας τινὰς εἰδικὰς περιπτώσεις τοῦ γενικοῦ προβλήματος τοῦ Ἀπολλωνίου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ I.—Νὰ γραφῇ περιφέρεια (γ) διερχομένη διὰ δύο δεδομένων σημείων A καὶ A' καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας (ϵ)

1ον) Τὰ A καὶ A' κεῖνται ἐπὶ ἡμιεὐθείας ἀρχομένης ἀπὸ σημείου O τῆς (ϵ) (σχ. 158). Τότε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς E τῆς ζητουμένης περιφέρειας (γ) μετὰ τῆς (ϵ) ὀρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως $\overline{OE}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$. Τὴν σχέσιν ταύτην πληροῦν δύο σημεῖα E, E' τῆς (ϵ) ἀπέχοντα τοῦ O ἀπόστασιν, μέσην ἀνάλογον τῶν OA, OA' καὶ ἐπομένως κατασκευάσιμα. Ἐκάστη τῶν περιφερειῶν (A, A', E) καὶ (A, A', E') ἐφάπτεται τῆς εὐθείας (ϵ) (§ 112). Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.



Σχ. 158

2ον) Ἐὰν ἓν ἐκ τῶν A καὶ A' κεῖται ἐπὶ τῆς (ϵ), π.χ. τὸ A', τότε τὸ κέν-

τρον τῆς (γ) κείται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ Α'Α και ἐπὶ τῆς εἰς Α' καθέτου ἐπὶ τὴν (ε) και τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν.

3ον $AA' \parallel (\epsilon)$. Τότε ἡ (γ) εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τῆς χορδῆς ΑΑ', τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ε κείται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου και ὀρίζεται μονοσημάντως. Τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν.

4ον Τὰ Α και Α' ἑκατέρωθεν τῆς (ε).

Τότε πᾶσα περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν Α και Α' τέμνει τὴν (ε), πάντοτε εἰς δύο διακεκριμένα σημεῖα. Τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ II. Νὰ γραφῆ περιφέρεια (γ) διερχομένη διὰ σημείου Α και ἐφαπτομένη δύο εὐθειῶν (ε₁) και (ε₂).

Τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον, διότι ἡ ζητούμενη (γ) θὰ διέρχεται και διὰ τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ Α ὡς πρὸς μίαν τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν, ἄς σχηματίζουσιν αἱ (ε₁) και (ε₂). Ἐπομένως εἶναι γνωστὰ δύο σημεῖα, δι' ὧν διέρχεται ἡ (γ).

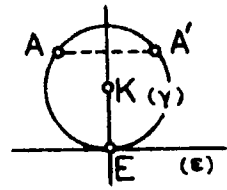
ΠΡΟΒΛΗΜΑ III. Νὰ κατασκευασθῆ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων Α και Β και ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας (c).

1ον Ἐάν τὸ Α κείται ἐπὶ τῆς (c), τότε ἡ ζητούμενη ἐφάπτεται τῆς (c) εἰς Α και διέρχεται διὰ τοῦ Β. Τὸ κέντρον της ὀρίζεται μονοσημάντως (τομὴ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ και τοῦ φορέως τῆς ἀκτίνος ΚΑ τῆς (c)) και τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν

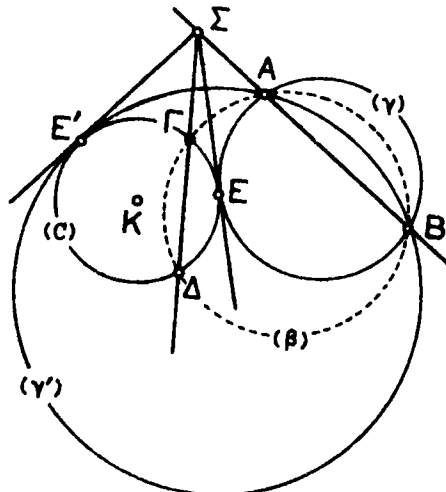
2ον Τὸ ἓν ἐκ τῶν σημείων Α και Β κείται ἐντὸς τοῦ κύκλου (c) και τὸ ἄλλο ἐκτός. Τότε προφανῶς τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, δηλ. 0 λύσεις.

3ον Τὰ Α και Β κείνται ἀμφότερα ἐκτός ἢ ἀμφότερα ἐντὸς τοῦ κύκλου (c). Τότε, ἔστω (γ) ἡ ζητούμενη περιφέρεια.

Φέρομεν βοηθητικὴν περιφέρειαν (β) διερχομένην διὰ τῶν Α και Β και τέμνουσαν τὴν (c) εἰς Γ και Δ (σχ. 160). Ἐστω Σ ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν ΑΒ και ΓΔ. Ἐάν ἡ ζητούμενη (γ) ἐφάπτεται τῆς (c) εἰς Ε, τότε ἡ εἰς Ε κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν (γ) και (c) ὡς ριζικὸς ἀξὼν τῶν (γ) και (c) θὰ διέρχεται διὰ τῆς τομῆς Σ τῶν δύο ἄλλων ριζικῶν ἀξόνων. Ὡστε εὐρίσκομεν



Σχ. 159



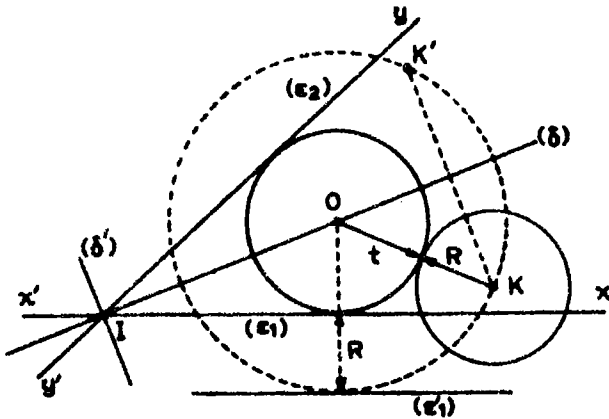
Σχ. 160

τὸ Ε φέροντες ἐκ τοῦ γνωστοῦ σημείου Σ ἐφαπτομένην πρὸς τὴν δοθεῖσαν περιφέρεια (c). Ἐπειδὴ τὸ Σ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (c), δταν τὰ Α καὶ Β κεῖνται ἀμφοτέρα ἐκτὸς ἢ ἀμφοτέρα ἐντὸς τοῦ (c), διὰ τοῦτο ἔχομεν ἐκ τοῦ Σ δύο ἐφαπτομένας ΣΕ, ΣΕ'. Ἀμφοτέραι αἱ περιφέρειαι (ABE) καὶ (ABE') ἐφάπτονται τῆς (c), διότι $ΣΕ^2 = ΣΓ \cdot ΣΔ = ΣΑ \cdot ΣΒ$ καὶ $ΣΕ'^2 = ΣΑ \cdot ΣΒ$ (§ 112).

Ἄν $ΓΔ // AB$, τὸ Σ εἶναι τὸ εἰς ἄπειρον σημεῖον τῆς ευθ AB καὶ τότε φέρομεν ἐφαπτομένης τῆς (c) παρ/λους πρὸς τὴν AB καὶ προσδιορίζομεν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Ε καὶ Ε'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ IV. Νὰ γραφῆ περιφέρεια ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ δοθείσης περιφερείας.

Ἡ κεντρικὴ ἰδέα τῆς λύσεως. Ἐστω (O, t) μία τῶν ζητουμένων περιφερείων ἐφαπτομένη τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν (ϵ_1) καὶ (ϵ_2) καὶ τῆς δοθεί-



Σχ. 160(a)

σης περιφερείας (K, R) ἐξωτερικῶς (σχ. 160(a)). Τότε ἡ περιφέρεια (O, t + R) θὰ διέρχεται διὰ τοῦ K, ἀλλὰ καὶ διὰ τοῦ συμμετρικοῦ K' τοῦ K ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον (δ), ἐφ' ἧς κεῖται τὸ κέντρον O τῆς περιφερείας (O, t + R). Ἐπὶ πλέον, ἡ περιφέρεια (O, t + R) ἐφάπτεται γνωστῆς εὐθείας (ϵ_1') παρ/λου πρὸς τὴν (ϵ_1) καὶ ἀπεχούσης ἀπόστασιν R ἀπὸ ταύτης. Ἐπομένως ἡ «ἠὺξημένη» περιφέρεια (O, t + R) διέρχεται διὰ δύο γνωστῶν σημείων K καὶ K' καὶ ἐφάπτεται γνωστῆς εὐθείας (ϵ_1') καὶ οὕτω δύναται νὰ κατασκευασθῆ (Πρόβλημα I). Ἐκ τῆς κατασκευασθείσης περιφερείας (O, t + R) μεταβαίνομεν εἰς τὴν ζητουμένην (O, t) ἐλαττοῦντες τὴν ἀκτίνα τῆς (O, t + R) κατὰ R.

Ἐὰν πάλιν ἡ ζητουμένη περιφέρεια (O, t) ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τῆς (K, R) καὶ περιέχει αὐτὴν (τοῦτο δὲν δύναται νὰ συμβῆ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. 160 a), τότε ἡ περιφέρεια (O, t - R) διέρχεται διὰ δύο γνωστῶν ση-

μειών (K και τοῦ συμμετρικοῦ του ὡς πρὸς τὴν (δ)) καὶ ἐφάπτεται γνωστῆς εὐθείας $//(\epsilon_1)$ καὶ ἀπεχούσης R ἀπὸ ταύτης. Κατασκευασθείσης τῆς «ἠ-λαττωμένης» (O, t—R) κατασκευάζεται καὶ ἡ (O, t) δι' αὐξήσεως τῆς ἀκτί-
νος τῆς (O, t—R) κατὰ R.

Τέλος, ἂν ἡ ζητούμενη περιφέρεια (O, t) περιέχεται ἐντὸς τῆς (K, R) καὶ ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς αὐτῆς, τότε ἡ περιφέρεια (O, R—t) διέρχεται διὰ τοῦ K καὶ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, ὡς ἐλέχθη προηγουμένως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

561. Δίδονται τρεῖς περιφέρειαι (K), (Λ), (O) ἐκτὸς ἀλλήλων ἀνά δύο καὶ ἐκ τῶν ὁποίων αἱ (K) καὶ (Λ) εἶναι ἴσαι.

Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη :

i) Ἐσωτερικῶς καὶ τῶν τριῶν δοθεισῶν.

ii) Ἐσωτερικῶς τῶν δύο ἴσων καὶ ἐξωτερικῶς τῆς τρίτης.

(Ἔπὸδ. i). Ἐὰν R ἡ ἀκτίς ἐκάστης τῶν (K), (Λ), τότε, ἂν ἡ ἀκτίς τῆς ζητούμενης ἐλαττωθῇ κατὰ R, θὰ προκύψῃ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο γνωστῶν σημείων K, Λ καὶ ἐφαπτομένη τρίτης, γνωστῆς περιφερείας).

562. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ABΓ, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ κορυφαὶ B καὶ Γ, μία εὐθεῖα (ε), ἐφ' ἧς κεῖται ἡ τρίτη κορυφή A καὶ

i) Τὸ ἄθροισμα k τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, AB, AΓ.

ii) Ἡ διαφορὰ δ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

(Ἔπὸδ. i) Ἄν ἡ AB προεκταθῇ πρὸς τὸ μέρος τοῦ A κατὰ $AD = AΓ$, τότε BΔ = k καὶ τὸ A εἶναι κέντρον περιφερείας διερχομένης διὰ τοῦ Γ, διὰ τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ Γ ὡς πρὸς τὴν (ε) καὶ ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας (B, k)).

563. Νὰ κατασκευασθῇ τρ. ABΓ, οὗτινος δίδονται : αἱ κορυφαὶ B καὶ Γ, τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέσων $m_B + m_Γ = l$ καὶ ἓν ὄψος.

564. Δίδεται κύκλος (K) καὶ ἐξωτερικὴ αὐτοῦ εὐθεῖα xy. Προβάλλομεν τὸ κέντρον K ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν xy, ἔστω εἰς A, καὶ ἐπὶ τοῦ AK λαμβανομένῃ τμημα AE ἴσον πρὸς τὸ ἐκ τοῦ A ἀγόμενον ἐφαπτόμενον τμημα τῆς περιφερείας.

i) Νὰ δεიχθῇ ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ἐφαπτομένου τμήματος τοῦ ἀγόμενου ἀπὸ τυχόντος σημείου M τῆς εὐθείας xy πρὸς τὴν περιφέρειαν (K) ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόστασιν ME.

ii) Ἐστω ὅτι δίδεται εὐθεῖα xy καὶ δύο κύκλοι (K), (Λ) μὴ τέμνοντες τὴν xy. Νὰ εὑρεθῇ, βάσει τοῦ ἀνωτέρω, σημεῖον M τῆς xy τοιοῦτον, ὥστε τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα τὰ ἀγόμενα ἐκ τοῦ M πρὸς τοὺς δύο κύκλους νὰ ἔχουν ἄθροισμα τὸ ἐλάχιστον δυνατόν ἢ ἴσον πρὸς δοθὲν τμήμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΝΕΛΑΟΥ — ΣΕΝΑ — ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΜΕΝΕΛΑΟΥ

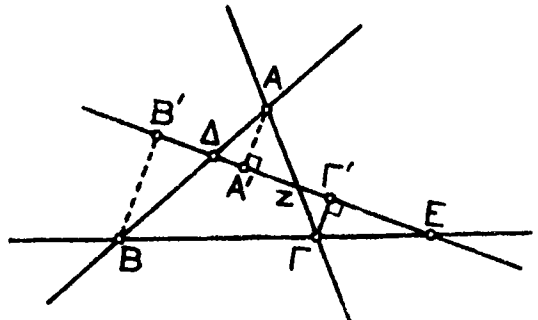
131. Θεώρημα τοῦ Μενελάου — Ἀναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη, ἵνα τρία σημεῖα Δ, Ε, Ζ κείμενα ἐπὶ τῶν φορέων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι συνευθειακά, εἶναι :

$$\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{E B}}{\overline{E \Gamma}} \cdot \frac{\overline{Z \Gamma}}{\overline{Z A}} = +1.$$

(Δηλαδή νὰ χωρίζουν τὰ διανύσματα \vec{AB} , \vec{BG} , \vec{GA} εἰς ἀλγεβρικούς λόγους ἔχοντας γινόμενον +1).

Ἡ εὐθεῖα δὲ ΔΕΖ, δι' οὐδεμιᾶς κορυφῆς τοῦ τρ. ΑΒΓ διερχομένη, λέγεται *διατέμνουσα* αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰς ὑπολογίσωμεν πρῶτον τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητικῶν λόγων, εἰς τοὺς ὁποίους ἡ διατέμνουσα ΔΖΕ (σχ. 161 καὶ 162) τέμνει τὰ \vec{AB} , \vec{BG} , \vec{GA} . Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὰς ἀποστάσεις ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' τῶν κορυφῶν ἀπὸ τῆς δια-



Σχ. 161

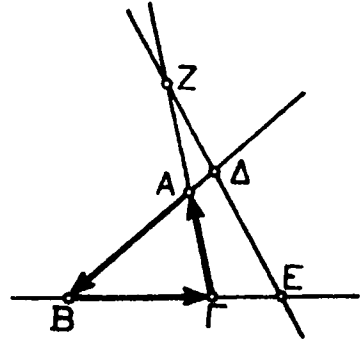
τεμνούσης και εκ των σχηματιζομένων όμοίων τριγώνων (τρ. ΑΔΑ' ≈ τρ. ΒΔΒ' κ.τ.λ.) λαμβάνομεν :

$$(1) \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{AA'}{BB'}, \frac{EB}{E\Gamma} = \frac{BB'}{\Gamma\Gamma'}, \frac{Z\Gamma}{ZA} = \frac{\Gamma\Gamma'}{AA'}$$

Διά πολλαπλασιασμού τών (1) κατά μέλη λαμβάνομεν :

$$(2) \frac{\Delta A}{\Delta B} \cdot \frac{EB}{E\Gamma} \cdot \frac{Z\Gamma}{ZA} = 1.$$

Έξ άλλου γνωρίζομεν ότι ή διατέμνουσα :



Σχ. 162

ή τέμνει δύο πλευράς και τήν προέκτασιν τής τρίτης
ή τέμνει τās προεκτάσεις και τών τριών πλευρών του τριγώνου.

Είς τήν πρώτην περίπτωσην, αν Δ, Z είναι έσωτερικά σημεία τών πλευρών και E έξωτερικόν, θά είναι :

$$(3) \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} = -\frac{\Delta A}{\Delta B}, \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}} = \frac{EB}{E\Gamma}, \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}} = -\frac{Z\Gamma}{ZA}.$$

Πολ/ντες τās (3) κατά μέλη και λαμβάνοντες ύπ' όψιν τήν (2) εύρίσκομεν :

$$\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}} \cdot \frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{ZA}} = + 1.$$

Είς τήν δευτέραν περίπτωσην θά έχωμεν (σχ. 162) :

$$(4) \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} = \frac{\Delta A}{\Delta B}, \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}} = \frac{EB}{E\Gamma}, \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}} = \frac{Z\Gamma}{ZA},$$

όποτε πάλιν διά πολ/σμού κατά μέλη λαμβάνομεν, βάσει τής (2) :

$$(5) \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}} \cdot \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}} = + 1.$$

Είς τήν ειδικήν περίπτωσην, καθ' ήν ή εϋθ ΔZ είναι παρ/λος πρὸς τήν ΒΓ, δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν τό E ὡς τό εἰς ἄπειρον σημείον τής εϋθ ΒΓ

(§ 65), ὁπότε ὁ λόγος $\frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}} = 1$, οἱ δὲ λόγοι $\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}}$ και $\frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{ZA}}$ είναι αντί-

στροφοι (θεωρ. Θαλοῦ) και ή σχέσις (5) πάλιν ἰσχύει (ὅπου τό κατ' ἔκδοχὴν σημείον E πληροῖ συμβατικῶς : $\frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}} = 1$).

Ἄντιστρόφως : Ἐστω ὅτι ἡ (5) πληροῦται ὑπὸ τριῶν σημείων Δ, Ε, Ζ κειμένων ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως. Θὰ δεῖξωμεν ὅτι τὰ Δ, Ε, Ζ κείνται ἐπ' εὐθείας. Πρὸς τοῦτο θὰ δεῖξωμεν ὅτι ἡ εὐθ ΔΕ τέμνει τὴν εὐθ ΑΓ εἰς σημεῖον Ζ' συμπίπτον μὲ τὸ Ζ.

Ἐστω λοιπὸν Ζ' τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΔΕ καὶ ΑΓ (τὸ Ζ' δύναται νὰ εἶναι καὶ εἰς τὸ ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθ ΑΓ). Κατὰ τὸ προηγουμένον θὰ ἔχωμεν :

$$(6) \quad \frac{\overline{\overline{\Delta A}}}{\overline{\overline{\Delta B}}} \cdot \frac{\overline{\overline{EB}}}{\overline{\overline{E\Gamma}}} \cdot \frac{\overline{\overline{Z'\Gamma}}}{\overline{\overline{Z'A}}} = +1 \text{ ἐνφ' ἐξ ὑποθέσεως}$$

$$(7) \quad \frac{\overline{\overline{\Delta A}}}{\overline{\overline{\Delta B}}} \cdot \frac{\overline{\overline{EB}}}{\overline{\overline{E\Gamma}}} \cdot \frac{\overline{\overline{Z\Gamma}}}{\overline{\overline{Z'A}}} = +1.$$

$$\text{Ἐκ τῶν (6) καὶ (7) συνάγεται : } \frac{\overline{\overline{Z'\Gamma}}}{\overline{\overline{Z'A}}} = \frac{\overline{\overline{Z\Gamma}}}{\overline{\overline{Z'A}}} \Rightarrow Z' \equiv Z, \text{ διότι τὰ}$$

Z καὶ Ζ' διαιροῦν τὸ \vec{GA} εἰς τὸν ἴδιον ἀλγεβρικὸν λόγον (§ 61).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

565. Ἐάν τρία σημεῖα Δ, Ε, Ζ ἐπὶ τῶν φορέων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου κείνται ἐπ' εὐθείας, τότε καὶ τὰ συμμετρικά των, Δ', Ε', Ζ' ὡς πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ κείνται, πάλιν, ἐπ' εὐθείας.

566. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ μέσα τῶν τριῶν τμημάτων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ὀρίζεται ἀπὸ τοὺς πόδας τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῶν ἀγομένων ἀπὸ μίας κορυφῆς τριγώνου, κείνται ἐπ' εὐθείας. (Υποδ. βλ. § 64).

567. Εἰς πᾶν τρίγωνον οἱ πόδες τῶν τριῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων κείνται ἐπ' εὐθείας. Ἐπίσης οἱ πόδες δύο ἐσωτερικῶν διχοτόμων καὶ τῆς τρίτης ἐξωτερικῆς κείνται ἐπ' εὐθείας.

568. Διὰ τοῦ ἐνὸς κοινοῦ σημείου Ρ δύο τεμνομένων περιφερειῶν (Ο) καὶ (Ο') ἀγονται δύο τέμνουσαι τῶν περιφερειῶν κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, ἐξ ὧν ἡ μία τέμνει τὰς (Ο), (Ο') καὶ τὴν διάκεντρον εἰς Γ, Α, Δ, ἡ δὲ ἄλλη τὰς ἴσας γραμμάς εἰς Γ', Α', Δ'. Νὰ δειχθῇ

$$\text{ὅτι } \frac{\overline{\overline{\Delta A}}}{\overline{\overline{\Delta \Gamma}}} = \frac{\overline{\overline{\Delta' A'}}}{\overline{\overline{\Delta' \Gamma'}}}.$$

569. **Θεώρημα τοῦ Pascal.** i) Ἄς θεωρήσωμεν τυχόν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ ἔγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἄς ἀριθμώσωμεν τοὺς φορεῖς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ μὲ 1, 2, 3, 4, 5, 6. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ τομαὶ Κ, Λ, Μ τῶν (1, 4), (2, 5), (3, 6) κείνται ἐπ' εὐθείας.

(Υποδ. Αἱ εὐθεῖαι 1, 3, 5 σχηματίζουν τρίγωνον $O_1O_2O_3$ ἐπὶ δὲ τῶν εὐθειῶν O_1O_2 ,

$$O_2O_3, O_3O_1 \text{ κείνται τὰ } K, \Lambda, M. \text{ Ἄρκει νὰ δειχθῇ ἡ σχέσηις : } \frac{\overline{KO_1}}{\overline{KO_2}} \cdot \frac{\overline{\Lambda O_2}}{\overline{\Lambda O_3}} \cdot \frac{\overline{MO_3}}{\overline{MO_1}} =$$

+1. Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὸ (Θ) τοῦ Μενελάου εἰς τὸ $\text{τρ. } O_1O_2O_3$ μὲ διατεμνοῦσας ΚΕΔ, ΛΒΓ, ΜΖΑ, πολ/μεν κατὰ μέλη καὶ χρησιμοποιοῦμεν τὸ θεώρημα τῶν τεμνοσῶν (§ 113).

ii) Ὑποθέτοντες ὅτι αἱ κορυφαὶ Α καὶ Β τείνουσιν νὰ συμπέσουν, συναγάγετε ἐν θεώρημα διὰ πεντάγωνον ἔγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

iii) Συναγάγετε επίσης ιδιότητα διά τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ τέλος ιδιότητα διά τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

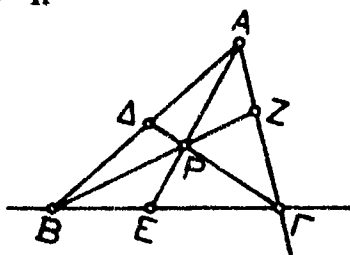
570. Ἐπί τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγ. ΑΒΓ λαμβάνομεν σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε ΔΒ/ΔΓ = λ καὶ ἐπί τῆς ΑΓ σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε ΕΑ/ΕΓ = μ. Τὰ τμήματα ΑΔ καὶ ΒΕ ἀλληλοτέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ λόγοι ΟΑ/ΟΔ καὶ ΟΒ/ΟΕ συναρτήσει τῶν λ, μ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ Ceva

132. Θεώρημα τοῦ Ceva.—Ἐστώσαν τρία σημεῖα Δ, Ε, Ζ ἐπὶ τῶν φορέων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἑνὸς τριγώνου ἀντιστοίχως. Τότε μία ἀναγκαῖα καὶ ἰκανὴ συνθήκη, ἵνα αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΓΔ, ΒΖ, ΑΕ (σχ. 163) διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἶναι :

$$\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}} \cdot \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{Z A}} = -1.$$

Ἀπόδειξις. Ἐστω πρῶτον ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΕ, ΒΖ, ΓΔ συντρέχουν εἰς τὸ Ρ. Τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου ἐφαρμοζόμενον εἰς τὸ τρίγ. ΑΒΕ μὲ διατέμνουσαν ΔΡΓ' καὶ εἰς τὸ τρίγ. ΑΕΓ μὲ διατέμνουσαν ΒΡΖ δίδει ἀντιστοίχως :



Σχ. 163

$$(1) \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{\Gamma B}}{\overline{\Gamma E}} \cdot \frac{\overline{PE}}{\overline{PA}} = +1 \text{ καὶ}$$

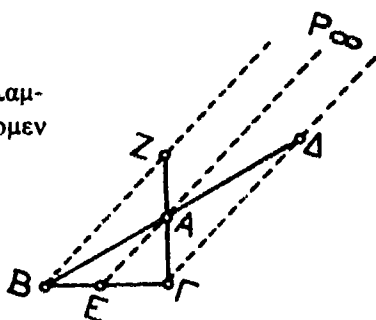
$$(2) \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{Z A}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PE}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{B\Gamma}} = +1.$$

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\overline{\Gamma B} = -\overline{B\Gamma}$ εὐρίσκομεν

$$\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{Z A}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{\Gamma E}} = -1 \text{ καὶ ἐπειδὴ}$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{\Gamma E}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}}, \text{ ἔχομεν τελικῶς}$$

$$(3) \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{E\Gamma}} \cdot \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{Z A}} = -1.$$



Σχ. 164

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ Ρ εἶναι κατ' ἐκδοχὴν (εἰς ἄπειρον) σημεῖον, δηλ. αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΕ, ΒΖ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι, αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) ἰσχύουν, ὡς εἶδομεν εἰς τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου

(μὲ $\frac{\overline{PE}}{\overline{PA}} = +1, \frac{\overline{PA}}{\overline{PE}} = +1$), ἄρα καὶ ἡ (3) ἰσχύει.

Ἀντιστρόφως, ἂν πληροῦται ἡ (3), αἱ δὲ ΓΔ καὶ ΒΖ τέμνονται, ἔστω εἰς Ρ, ἀποδεικνύομεν (ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα) ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΡ τέμνει τὴν εὐθ ΒΓ εἰς σημεῖον Ε', ταυτιζόμενον μὲ τὸ Ε. Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι αἱ εὐθ ΑΕ, ΓΔ, ΒΖ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (κειμένου εἰς πεπερασμένην ἢ ἀπειρον ἀπόστασιν).

Παρατήρησις. Ἐάν τρία σημεῖα Δ, Ε, Ζ κείμενα ἐπὶ τῶν φορέων τῶν πλευρῶν τρ. ΑΒΓ πληροῦν τὴν συνθήκην Cένα, τότε τὰ συζυγῆ ἄρμονικὰ τῶν ὡς πρὸς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς πληροῦν τὴν συνθήκην Μενελαίου.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

571. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, ἃν ἐκάστη ἐνώνει μίαν κορυφὴν τριγώνου μὲ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

572. Δίδεται τρ. ΑΒΓ καὶ τρία τμήματα ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' συντρέχοντα εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅπου, Α' ∈ ΒΓ, Β' ∈ ΓΑ, Γ' ∈ ΑΒ.

Νὰ δεიχθῆ ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι : τὰ μέσα τῶν ΑΑ' καὶ ΒΓ, τὰ μέσα τῶν ΒΒ' καὶ ΑΓ καὶ τὰ μέσα τῶν ΓΓ' καὶ ΑΒ συντρέχουν ἐπίσης εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

573. Περιφέρεια τέμνει τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἑνὸς τρ. ΑΒΓ ἀντιστοίχως εἰς Δ καὶ Δ', Ε καὶ Ε', Ζ καὶ Ζ'. Δείξατε ὅτι, ἂν αἱ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον, τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ΑΔ', ΒΕ', ΓΖ'.

(*Υπόδ. Βλέπε § 132 καὶ § 113).

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

133. α') Ἴον θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου.—Εἰς πᾶν (κυρτὸν) ἐγγράψιμον τετράπλευρον, τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐστω ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον, κυρτὸν τετράπλευρον (σχ. 165). Θὰ δείξωμεν ὅτι :

$$ΑΓ \times ΒΔ = ΑΒ \times ΓΔ + ΒΓ \times ΑΔ \quad (\text{Ἴον θεώρ. Πτολεμαίου}).$$

Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἀκτίνα ΑΧ τῆς γωνίας ΒĀΔ τοιαύτην, ὥστε ΒĀΧ = = ΓĀΔ καὶ ἔστω Ε τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΑΧ μετὰ τῆς διαγωνίου ΒΔ. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων :

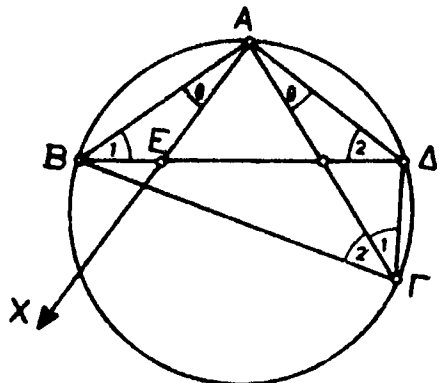
$$ΒĀΕ = ΓĀΔ \quad \text{καὶ} \quad \widehat{Β_1} = \widehat{Γ_1} \Rightarrow$$

$$\text{τρ. ΑΒΕ} \approx \text{τρ. ΑΓΔ} \Rightarrow \frac{ΒΕ}{ΓΔ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} \Rightarrow$$

$$(1) \quad ΒΕ = \frac{ΑΒ \times ΓΔ}{ΑΓ}.$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων :

$$ΒĀΓ = ΕĀΔ \quad \text{καὶ} \quad \widehat{Γ_2} = \widehat{Δ_2} \Rightarrow$$



Σχ. 165

$$\text{τρ.ΑΒΓ} \approx \text{τρ.ΕΑΔ} \Rightarrow \frac{ΕΔ}{ΒΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΓ} \Rightarrow$$

$$(2) \quad ΕΔ = \frac{ΒΓ \times ΑΔ}{ΑΓ}.$$

Διά προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

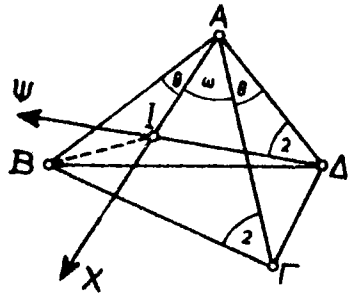
$$ΒΕ + ΕΔ = \frac{ΑΒ \times ΓΔ + ΒΓ \times ΑΔ}{ΑΓ} \quad \text{καὶ ἐπειδὴ } ΒΕ + ΕΔ = ΒΔ, \text{ λαμβάνομεν}$$

$$\text{τελικῶς :} \quad ΑΓ \times ΒΔ = ΑΒ \times ΓΔ + ΒΓ \times ΑΔ.$$

β') Τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἰσχύει : Ἐὰν εἰς κυρτὸν τετράπλευρον τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, τότε τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον.

Ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἔστω μεγαλύτερα (ἢ μὴ μικρότερα) τῶν ἄλλων, ἢ $\widehat{ΑΔΓ}$. Ἄς φέρωμεν ἀκτίνα ΔΨ αὐτῆς τοιαύτην, ὥστε $\widehat{ΑΔΨ} = \widehat{ΓΔ}$ (= $\widehat{ΑΓΒ}$). Ἐπίσης, ἄς φέρωμεν ἀκτίνα ΑΧ τῆς $\widehat{ΒΑΔ}$ τοιαύτην, ὥστε $\widehat{ΒΑΧ} = \widehat{ΓΑΔ}$.

Αἱ ἀκτίνες ΑΧ καὶ ΔΨ τέμνονται, διότι $\widehat{ΧΑΔ} + \widehat{ΨΔΑ} = \widehat{ΒΑΓ} + \widehat{ΓΒΑ} < 2$ ὀρθ. Ἐστω I τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἀκτίνων ΑΧ καὶ ΔΨ.



Σχ. 166

$$\text{Ἐπειδὴ } \text{τρ.ΙΑΔ} \approx \text{τρ.ΒΑΓ} \Rightarrow \frac{ΙΔ}{ΒΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΓ} \Rightarrow (1) \quad ΙΔ \times ΑΓ = ΒΓ \times ΑΔ. \text{ Ἐκ τῶν ἰδίων}$$

τριγῶνων ἔπεται : $\frac{ΑΙ}{ΑΒ} = \frac{ΑΔ}{ΑΓ}$, τὸ ὅποιον μαζὶ μετὴν $\widehat{ΒΑΙ} = \widehat{ΓΑΔ}$ συνεπάγεται ὅτι $\text{τρ.ΒΑΙ} \approx \text{τρ.ΓΑΔ}$ (δύο πλευρὰς ἀναλόγους καὶ τὰς περιεχομένας γωνίας ἰσας). Ἐπομένως :

$$\frac{ΒΙ}{ΓΔ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} \Rightarrow (2) \quad ΒΙ \times ΑΓ = ΑΒ \times ΓΔ.$$

Διά προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$ΑΓ \cdot (ΙΔ + ΒΙ) = ΒΓ \times ΑΔ + ΑΒ \times ΓΔ$, τὸ ὅποιον, λόγῳ τῆς ὑποθέσεως, δίδει $ΙΔ + ΒΙ = ΒΔ$. Ἄρα τὸ I κεῖται ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΒΔ καὶ ἐπειδὴ $\widehat{ΑΔΙ} = \widehat{ΑΓΒ}$, θὰ εἶναι $\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΑΓΒ} \Rightarrow Α, Β, Γ, Δ$ ὁμοκυκλικά.

134. 2ον Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου α') Αἱ διαγώνιοι κυρτοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ ἄθροισματα τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν τῶν συντρεχουσῶν εἰς τὰ ἄκρα των, δηλαδή, ἂν $ΑΒΓΔ$ ἐγγράψιμον μετὰ $ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ, ΔΑ = δ$, τότε ἰσχύει

$$\frac{ΑΓ}{ΒΔ} = \frac{αδ + βγ}{αβ + γδ}$$

Ἀπόδειξις. Τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΒΔ, ΔΓΒ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκτίνα R περιγεγραμμένου κύκλου. Ἐάν εἰς τὴν προφανῆ ἰσότητα τῶν ἐμβαδῶν (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) = (ΑΒΔ) + (ΔΓΒ) χρησιμοποιήσωμεν τὸν τύπον : ἐμβαδὸν τριγώνου = γινόμενον τῶν τριῶν πλευρῶν διὰ 4R (§ 95, V), λαμβάνομεν :

$$\frac{\alpha\beta \cdot \text{ΑΓ}}{4R} + \frac{\gamma\delta \cdot \text{ΑΓ}}{4R} = \frac{\alpha\delta \cdot \text{ΒΔ}}{4R} + \frac{\beta\gamma \cdot \text{ΒΔ}}{4R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha\beta + \gamma\delta) \cdot \text{ΑΓ} = (\alpha\delta + \beta\gamma) \cdot \text{ΒΔ} \Rightarrow \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\alpha\beta + \gamma\delta}.$$

β') Τὸ ἀντίστροφον τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου ἰσχύει : Ἐάν εἰς κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ μὲ ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ, ΔΑ = δ ἰσότης ἢ ἰσότης :

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\alpha\beta + \gamma\delta},$$

τότε τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον.

Παραθέτομεν ἐνημερωτικῶς μίαν ἀπόδειξιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος. Θὰ χωρίσωμεν τὴν ἀπόδειξιν εἰς δύο μέρη.

α') (Θ). Δοθέντος κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ μὲ πλευρὰς ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ, ΔΑ = δ ὑπάρχει ἕτερον κυρτὸν τετράπλευρον Α'Β'Γ'Δ' μὲ τὰς ἰδίας κατὰ σειράν πλευρὰς α, β, γ, δ, ἀλλὰ ἐγγράψιμον (σχ. 167).

Ἐστω δ ἡ μικρότερα ἢ ὄχι μεγαλύτερα τῶν τριῶν ἄλλων πλευρῶν δηλ. :

$$(1) \quad \delta \leq \alpha, \quad \delta \leq \beta, \quad \delta \leq \gamma$$

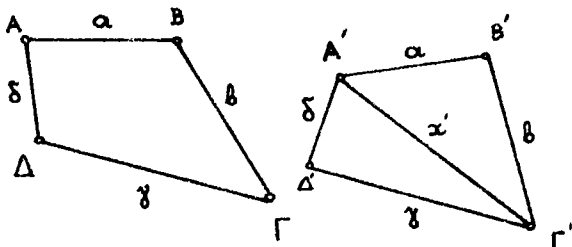
Ἐπιθέσωμεν ὅτι τὸ Α'Β'Γ'Δ' ὑπάρχει καὶ εἶναι κατασκευασμένον καὶ ὡς καλέσωμεν x' τὴν διαγώνιον Α'Γ' αὐτοῦ. Τότε

$$x' \cdot \text{Β'Δ}' = \alpha\gamma + \beta\delta$$

$$\frac{x'}{\text{Β'Δ}'} = \frac{\beta\gamma + \alpha\delta}{\alpha\beta + \gamma\delta},$$

ὁπότε διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$(2) \quad x'^2 = \frac{\alpha\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma\delta + \alpha^2\gamma\delta + \alpha\beta\delta^2}{\alpha\beta + \gamma\delta},$$



Σχ. 167

ἢ ἢς κατασκευάζεται τὸ x'.

Θὰ δεῖξωμεν ὅτι μὲ πλευρὰς x', α, β κατασκευάζεται τὸ τρ. Α'Β'Γ'. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ :

$$x' < \alpha + \beta \quad \text{καὶ} \quad x' > |\alpha - \beta|. \quad \text{Ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας} \quad x' < \alpha + \beta \Leftrightarrow x'^2 < (\alpha + \beta)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma\delta + \alpha^2\gamma\delta + \alpha\beta\delta^2}{\alpha\beta + \gamma\delta} < \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma^2 + \delta^2\alpha\beta < \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2 +$$

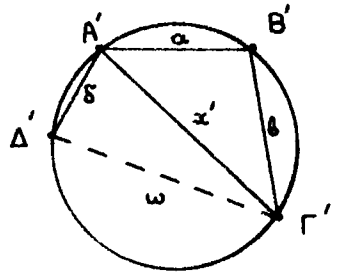
$$+ 2\alpha\beta\gamma\delta \Leftrightarrow (\text{διὰ διαιρέσεως μὲ } \alpha\beta\gamma\delta) \quad \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\delta}{\gamma} < \frac{\alpha^2}{\gamma\delta} + \frac{\beta^2}{\gamma\delta} + \frac{2\alpha\beta}{\gamma\delta} + 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\gamma - \delta)^2}{\gamma\delta} < \frac{(\alpha + \beta)^2}{\gamma\delta} \Leftrightarrow |\gamma - \delta| < \alpha + \beta. \quad \text{Τοῦτο ὁμοίως εἶναι ἀληθές, διότι ἀπὸ τὸ$$

ΑΒΓΔ ἔχομεν $|\gamma - \delta| < \text{ΑΓ} < \alpha + \beta.$

Όμοίως δεικνύεται ότι $x' > |a - \beta|$, δηλ. $x'^2 > (a - \beta)^2$. Ὄστε τὸ τρ. $A'B'Γ'$ ὑπάρχει καὶ κατασκευάζεται. Περιγράφωμεν κατόπιν κύκλον ($A'B'Γ'$) καὶ ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{A'Γ'}$ τοῦ μὴ περιέχοντος τὸ B' λαμβάνομεν χορδὴν $A'D' = \delta$. Τοῦτο εἶναι δυνατόν, διότι ἰσχύει ἡ ἀνίσότης $\delta < x'$. Πράγματι, αὕτη ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν $\delta^2(a\beta + \gamma\delta) < a\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma\delta + a^2\gamma\delta + a\beta\delta^2$ (λόγῳ τῆς (2)), ἥτις γράφεται $\delta^2 < a^2 + \beta^2 + \frac{a\beta\gamma}{\delta}$ καὶ ἀληθεύει λόγῳ τῶν (1).

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τρίγωνον $A'B'Γ'$ μὲ πλευρὰς a, β καὶ x' ὀρισθεῖσαν ἐκ τῆς (2). Τοῦτο εἶναι, ὡς εἶδομεν, δυνατόν. Περιγράφωμεν κύκλον περὶ τὸ τρ. $A'B'Γ'$ καὶ ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{A'Γ'}$ τοῦ μὴ περιέχοντος τὸ B' λαμβάνομεν χορδὴν $A'D' = \delta$. Τοῦτο, ὅπως εἶδομεν, εἶναι δυνατόν. Τὸ ἐγγράψιμον τετράπλευρον $A'B'Γ'D'$ (σχ. 168) εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 168

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τετάρτη πλευρὰ ω ἰσοῦται μὲ γ . Ἐχομέν τὰς σχέσεις $\{x' \cdot B'D' = a\omega + \delta\beta$ καὶ $x'/B'D' = (a\delta + \beta\omega)/(a\beta + \omega\delta)\}$, ἐξ ὧν

$$(3) \quad x'^2 = \frac{a\beta\omega^2 + \beta^2\omega\delta + a^2\omega\delta + a\beta\delta^2}{a\beta + \delta\omega}$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὴν δευτεροβάθμιον ὡς πρὸς ω ἐξίσωσιν :

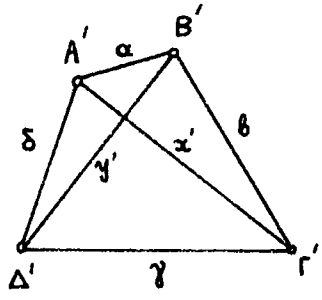
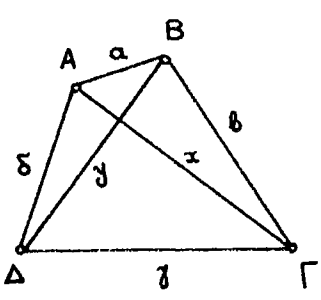
$$\frac{a\beta\omega^2 + \beta^2\omega\delta + a^2\omega\delta + a\beta\delta^2}{a\beta + \delta\omega} = \frac{a\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma\delta + a^2\gamma\delta + a\beta\delta^2}{a\beta + \delta\gamma}$$

ἡ ὁποία ἔχει μίαν προφανῆ λύσιν : $\omega = \gamma$. Ἡ ἑτέρα λύσις τῆς εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἀπορρίπτεται, διότι ἡ ἐξίσωσις γράφεται τελικῶς $a\beta(a\beta + \gamma\delta)\omega^2 + \delta(a^2\beta + a\beta^2 - a\beta\gamma^2 - a\beta\delta^2)\omega + a\beta\gamma\delta\left(\delta^2 - a^2 - \beta^2 - \frac{a\beta\gamma}{\delta}\right) = 0$ καὶ ἔχει σταθερὸν ὄρον ἀρνητικόν, λόγῳ τῆς (1), ὅρα ρίζας ἑτεροσήμους.

β') Ἐστω κυρτὸν τετράπλευρον $ABΓΔ$ (σχ. 169) πλευρῶν a, β, γ, δ καὶ διαγωνίων x, ψ , εἰς τὸ ὅποιον ἰσχύει ἡ σχέσηις

$$(4) \quad \frac{x}{\psi} = \frac{a\delta + \beta\gamma}{a\beta + \gamma\delta}$$

Θὰ δεῖξωμεν ὅτι τὸ $ABΓΔ$ εἶναι ἐγγράψιμον. Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν ἕτερον τετράπλευρον $A'B'Γ'D'$ ἐγγράψιμον (σχ. 169) καὶ ἔχον τὰς ἰδίας κατὰ σειρὰν πλευρὰς



Σχ. 169

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Τοῦτο εἶναι δυνατόν, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως. Ἐάν x', ψ' αἱ ἀντίστοιχοι διαγώνιοι τοῦ δευτέρου, τότε $\frac{x'}{\psi'} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\alpha\beta + \gamma\delta}$, ὁπότε, λόγῳ τῆς (4) :

$$(5) \quad \frac{x'}{\psi'} = \frac{x}{\psi}$$

Ἐστω ὅτι $x' > x$. Τότε ἐκ τῆς (5) θὰ εἶναι καὶ $\psi' > \psi$. Εἰς τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ ἔχομεν :

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ B\Gamma = B'\Gamma' \\ A\Gamma > A'\Gamma' \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{B'}$$

Ὁμοίως εὐρίσκομεν $\widehat{A} > \widehat{A'}, \widehat{\Gamma} > \widehat{\Gamma'}, \widehat{\Delta} > \widehat{\Delta'}$ καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} > \widehat{A'} + \widehat{B'} + \widehat{\Gamma'} + \widehat{\Delta'}$, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα δὲν εἶναι $x' > x$. Ὁμοίως ἀποκλείομεν καὶ τὴν $x' < x$. Ἄρα μένει $x = x'$, ὁπότε $\text{τρ.} AB\Gamma = \text{τρ.} A'B'\Gamma'$ καὶ $\text{τρ.} A\Delta\Gamma = \text{τρ.} A'\Delta'\Gamma'$, ἐξ ὧν $\widehat{B} = \widehat{B'}$ καὶ $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta'}$. Ἐπειδὴ $\widehat{B} + \widehat{\Delta} = 2\alpha\rho\theta \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{\Delta} = 2\alpha\rho\theta \Rightarrow AB\Gamma\Delta$ ἔγγραψιμον.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

574. **Θεώρημα τῶν τριῶν χορδῶν.** Ἐκ τῶν χορδῶν $AB = a$ καὶ $B\Gamma = b$ δύο διαδοχικῶν ἑλασσόνων τόξων καὶ τῆς ἀκτίνος R τοῦ κύκλου, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χορδὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων.

(Ἐποδ. Νὰ ἀχθῇ ἡ διάμετρος BB' ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κοινοῦ ἄκρου τῶν γνωστῶν χορδῶν καὶ νὰ ἐφαρμοσθῇ τὸ 1ον θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου εἰς τὸ $AB\Gamma B'$).

575. **Θεώρημα τῶν τριῶν χορδῶν.** Ἐκ τῶν χορδῶν δύο ἑλασσόνων τόξων καὶ τῆς ἀκτίνος τοῦ κύκλου νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χορδὴ τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων. (Ἐποδ. Ἐστῶσαν $\widehat{A\Gamma} < \widehat{A'B}$ τὰ τόξα καὶ $A\Gamma = a, AB = b$ αἱ γνωσταὶ χορδαί. Ἄγομεν τὴν διάμετρον $AA' = 2R$ τὴν διερχομένην διὰ τοῦ κοινοῦ ἄκρου τῶν γνωστῶν χορδῶν καὶ ἐργαζόμεθα, ὡς προηγουμένως).

576. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν διαγωνίων ἐγγραψίμου τετραπλεύρου συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (βλ. 1ον καὶ 2ον θεώρ. Πτολεμαίου).

577. **Ἐμβαδὸν ἐγγραψίμου τετραπλεύρου.** i) Ἐστῶσαν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ αἱ πλευραὶ καὶ x, y αἱ διαγώνιοι κυρτοῦ τετραπλεύρου. Ἐάν p ἡ προβολὴ τῆς y ἐπὶ τὴν x , τότε βάσει τῆς σχέσεως $|(a^2 + \gamma^2) - (b^2 + \delta^2)| = 2xp$ (ἄσκ. 416) δεῖξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{4} \sqrt{4x^2y^2 - (a^2 + \gamma^2 - b^2 - \delta^2)^2}$.

ii) Βάσει τοῦ ἀνωτέρω τύπου καὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου δεῖξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἐγγραψίμου τετραπλεύρου συναρτήσει τῶν πλευρῶν του $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου : $E = \sqrt{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)(\tau - \delta)}$, ὅπου $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\tau$.

578. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἐγγραψίμου τετραπλεύρου δίδεται συναρτήσει τῶν πλευρῶν διὰ τοῦ τύπου :

$$R = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(\alpha\beta + \gamma\delta)(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)}{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)(\tau - \delta)}}$$

ὅπου $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\tau$.

(Ἐποδ. Ἐκ τῆς σχέσεως $\epsilon\mu\beta AB\Gamma + \epsilon\mu\beta \Gamma\Delta A = E = \epsilon\mu\beta$ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου, λαμβάνομεν $\frac{\alpha\beta x}{4R} + \frac{\gamma\delta x}{4R} = E$, ὅπου x ἡ διαγώνιος $A\Gamma$. Τὸ E ἀντικαθίσταται διὰ τοῦ

τύπου τής προηγούμενης άσκήσεως και τó χ ύπολογίζεται συναρτήσσει τών πλευρών συμφώνως πρós τήν άσκ. 576).

579. Είς πάν μη έγγράψιμον κυρτόν τετράπλευρον, τó γίνόμενον τών διαγωνίων είναι μικροτερον τοú άθροίσματος τών γινομένων τών άπέναντι πλευρών.

(Ύποδ. Βλ. § 133, β').

580. Συναρτήσσει τών καθέτων πλευρών όρθογωνίου τριγώνου νά ύπολογισθή ή απόστασις τής κορυφής τής όρθής γωνίας από τοú κέντρου τοú τετραγώνου τοú κατασκευασομένου επί τής ύποτεινούσης i) έξωτερικώς τοú τριγώνου ή ii) πρós τó μέρος τής άπέναντι κορυφής.

581. i) Νά δειχθή διά τοú (Θ) τοú Πτολεμαίου ότι τó άθροισμα τών άποστάσεων τοú περικέντρου όξυγωνίου τριγώνου από τás τρεις πλευράς ίσοúται πρós τó άθροισμα τών άκτίων τοú έγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου.

ii) Έάν τó τριγωνον είναι άμβλυγώνιον, τó άνωτέρω ίσχύει, άν ή απόστασις από τής μεγαλυτέρας πλευράς ληφθή άρνητική.

iii) Έκ τών δύο προηγούμενων προκύπτει ότι : εις πάν έγγράψιμον κυρτόν τετράπλευρον τó άθροισμα τών άκτίων τών έγγεγραμμένων κύκλων τών δύο τριγώνων, εις τά όποία χωρίζεται τó τετράπλευρον υπό μίης διαγωνίου, είναι τó αυτό και διά τás δύο διαγωνίους.

582. Έάν AB, ΒΓ, ΓΔ είναι τρεις διαδοχικαί χορδαί κύκλου, μήκους λ έκάστη, νά ύπολογισθή ή απόστασις τών μέσων τών AB και ΓΔ συναρτήσσει τοú λ και τής άκτίους R τοú κύκλου.

583. Έάν A τó άκρον άκτίνοσ καθέτου επί τήν διάμετρον ΒΓ και M τυχόν σημειον τοú τεταρτημορίου $\widehat{A\Gamma}$, δείξατε ότι :

$$\frac{1}{\text{ΕμβΜΑΓ}} - \frac{1}{\text{ΕμβΜΑΒ}} = \frac{2}{\text{ΕμβΜΒΓ}}.$$

584. Αί γωνίαί κυρτοú τετραπλεύρου ABΓΔ είναι μεταβληταί, ένθ τά μήκη τών δύο άπέναντι πλευρών του AB και ΓΔ μένουν σταθερώσ ίσα πρós α και τά μήκη τών διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ σταθερώσ ίσα πρós β, (άρθρωτόν τετράπλευρον). i) Νά δειχθή ότι τó ABΓΔ είναι τραπέζιον. ii) Έάν Η, Ε, Ζ τά μέσα τών AB, ΑΓ, ΒΔ, νά δειχθή ότι τó γίνόμενον ΗΕ × ΗΖ μένει σταθερόν.

585. Περί δοθέν τετράγωνον ABΓΔ πλευράς α περιγράφομεν κύκλον και άκολούθως φέρομεν χορδήν ΓΕ, μήκους $3a/\sqrt{5}$, περατουμένην επί τοú τόξου $\widehat{A\text{B}}$. Νά εύρεθ ή ό λόγος τών έμβαδών τοú τριγώνου ΕΑΒ και τοú τετραγώνου ABΓΔ.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ III, IV, V

586. Έπ' εύθείας δίδονται κατά σειράν τά σημεια Α, Β, Γ, Δ. i) Κατασκευάσατε σημειον Σ τής εύθείας τοιούτου, ώστε :

$$\overline{\Sigma\text{A}} \cdot \overline{\Sigma\text{B}} = \overline{\Sigma\text{Γ}} \cdot \overline{\Sigma\text{Δ}}$$

ii) Κατασκευάσατε ζευγος σημειών Ε, Ζ διαιροδν άρμονικώς άμφότερα τά τμήματα AB και ΓΔ και δείξατε ότι τó ζευγος (Ε, Ζ) είναι μοναδικόν.

587. Δοθέντων δύο σημειών Α και Β κατασκευάσατε δύο σημεια Γ και Δ συζυγη άρμονικά τών Α και Β και τοιαυτα, ώστε ή απόστασις ΓΔ νά ίσοúται πρós δοθέν τμήμα.

588. Επί δοθείσης εύθείας λαμβάνομεν δύο τμήματα AB και ΓΔ σταθερά. Νά εύρεθ ή ό γ.τ. τών σημειών, από τών όποίων τά τμήματα ταυτα φαίνονται υπό ίσας γωνίας.

(Ύποδ. βλ. § 97, ζ').

589. Νά δειχθῆ ὅτι, εἰς πᾶν μὴ ἰσοσκελὲς τραπέζιον, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν δύο διαγωνίων ἔχει λόγον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν μὴ παρ/λων πλευρῶν, ὃν λόγον ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν.

590. Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν, τέμνουσαι τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου (ἢ τὰς προεκτάσεις αὐτῶν) εἰς σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν ἀντιστοίχως, νά δειχθῆ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΚΛΜΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ.

591. Δοθείσης περιφερείας καὶ διαμέτρου αὐτῆς ΑΒ, γράφομεν μὲ κέντρον τὸ Α, περιφέρειαν τέμνουσαν εἰς Γ καὶ Δ τὴν δοθεῖσαν καὶ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς δευτέρας. Ἄν αἱ εὐθεῖαι ΒΜ, ΓΜ, ΔΜ ἐπανατέμνουσιν εἰς Ν, Ρ, Κ ἀντιστοίχως τὴν ἀρχικὴν περιφέρειαν, νά δειχθῆ ὅτι :

i) Τὸ ΜΡΒΚ εἶναι παρ/μον.

ii) Ἡ ΝΜ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΝΓ, ΝΔ.

592. Νά δειχθῆ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται μὲ $4R \cdot ΑΠ$, ὅπου ΑΠ ἡ προβολὴ τῆς διαμέσου ΑΜ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΑ' (=2R) τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου.

593. Ἄν εἰς τρίγωνον ἢ διὰ τῆς κορυφῆς Α καὶ τῶν μέσων τῶν ΑΒ, ΑΓ διερχομένη περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς ΒΓ, ἔστω εἰς τὸ Δ, τότε ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς \widehat{A} καὶ μέση ἀνάλογος τῶν ΒΔ, ΔΓ.

594. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο κάθετοι εὐθεῖαι ΟΧ, ΟΨ διερχόμενοι διὰ τοῦ κέντρου. Τυχοῦσα ἐφαπτομένη τοῦ (Ο) τέμνει τὰς ΟΧ, ΟΨ εἰς Α καὶ Β. Μὲ διάμετρον ΑΒ γράφομεν δευτέραν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν πρώτην εἰς Γ καὶ Δ. Νά δειχθῆ ὅτι τὸ μετὰξὺ τῶν ΟΧ, ΟΨ τμήμα τῆς εὐθ ΓΔ ἔχει σταθερὸν μήκος.

595. Νά δειχθῆ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τριγώνου ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τὰς κορυφὰς κατὰ $6(R^2 - 3GK^2)$, ὅπου Κ τὸ περίκεντρον, Γ τὸ βαρῦκέντρον καὶ R ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

596. Ἄν ΑΒ διάμετρος ἡμικυκλίου καὶ ΑΓ, ΒΔ χορδαὶ αὐτοῦ τεμνόμεναι εἰς σημεῖον Ρ ἐντὸς τοῦ ἡμικυκλίου, νά δειχθῆ ἡ σχέσις : $ΑΒ^2 = ΑΓ \cdot ΑΡ + ΒΔ \cdot ΒΡ$.

597. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου φέρομεν τὸ ὕψος, τὴν διχοτόμον (ἑσωτερικὴν) καὶ εὐθεῖαν //ΒΓ. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΓ ἀχθῆ \perp ἐπὶ τὴν διχοτόμον τέμνουσα αὐτὴν εἰς Η, τὸ ὕψος εἰς Ε καὶ τὴν ἀχθείσαν παράλληλον εἰς τὸ Ζ, δεῖξτε ὅτι $ΒΜ^2 = = ΜΗ \cdot ΖΕ$.

598. Ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου κύκλου (Ο) λαμβάνονται δύο σημεῖα Α καὶ Β συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Ο. Ἐὰν ἀπὸ τυχόντος σημείου Μ τῆς περιφερείας ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΜΑ, ΜΟ, ΜΒ ἐπανατέμνουσαι τὴν περιφέρειαν εἰς Δ, Ε, Ζ, ἡ δὲ εὐθ ΔΖ τέμνη τὴν εὐθ ΑΒ εἰς σημεῖον Η, νά δειχθῆ ὅτι ἡ ΗΕ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (Ο).

599. Διὰ τοῦ μέσου Ε τῆς πλευρᾶς ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν // πρὸς τὴν διχοτόμον ΒΔ, τέμνουσαν εἰς Ζ καὶ Η τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ. Νά δειχθῆ ὅτι $ΑΖ = ΓΗ$.

600. Νά δειχθῆ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν ἄκρων τῆς βάσεως τριγώνου ἀπὸ τὴν ἑσωτερικὴν διχοτόμον τῆς ἀπέναντι γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων, εἰς τὰ ὅποια ἡ βᾶσις χωρίζεται ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

601. Νά δειχθῆ ὅτι τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν τριῶν περιφερειῶν μὲ διαμέτρους τὰς διαμέσους τρ.ΑΒΓ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τρ.ΑΒΓ.

602. Ἐστω Α'Β'Γ' τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον τοῦ δεξυγανίου τριγώνου ΑΒΓ καὶ Α'', Β'', Γ'' τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν Β'Γ', Γ'Α', Α'Β' τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' μετὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου. Νά δειχθῆ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθικοῦ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α''Β''Γ''.

603. Δίδεται περιφέρεια (Ο), διάμετρος ΑΒ αὐτῆς καὶ σημεῖον Μ τῆς (Ο). Μὲ κέντρον

Μ γράφεται περιφέρεια (γ) έφαπτομένη της ΑΒ, έστω εἰς τὸ Ρ. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ κοινὴ χορδὴ τῶν (γ) καὶ (Ο) διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ ΜΡ.

604. Ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὸ ὕψος ΑΗ ὀρθογωνίου τριγ.ΑΒΓ τέμνει τὰς καθέτους πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ εἰς Β' καὶ Γ'. Φέρομεν ἑφαπτομένας τῆς περιφερείας ταύτης εἰς Β' καὶ Γ', τεμνοῦσας εἰς Μ καὶ Ν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Νά δειχθῆ ὅτι τὸ τραπέζιον ΜΒΓ'Ν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

605. Συνδέομεν ἑκάστην κορυφὴν τριγώνου μὲ τὰ σημεῖα τὰ τριχοτομοῦντα τὴν ἀπέναντι πλευράν. Νά δειχθῆ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν 6 τούτων εὐθειῶν σχηματιζόμενον κυρτὸν ἐξάγωνον ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ 1/10 τοῦ τριγώνου.

606. Εἰς πᾶν τραπέζιον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον i) αἱ βάσεις χωρίζονται ὑπὸ τῶν σημείων ἑαφῆς εἰς μέρη ἀντιστροφῶς ἀνάλογα καὶ ii) αἱ διαγώνιοι τέμνονται ἐπὶ τῆς διαμέτρου τοῦ ἔγγεγραμμένου κύκλου, τῆς καθέτου ἐπὶ τὰς βάσεις.

607. Νά δειχθῆ ὅτι, ἂν Κ τὸ περίκεντρον ἔγγραψίμου κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ Μ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του, τότε ἡ εἰς τὸ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΜ τέμνει τοὺς φορεῖς δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου εἰς σημεῖα, ἰσαπέχοντα τοῦ Μ.

608. Ἐπὶ τῶν φορέων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγ.ΑΒΓ λαμβάνονται ἀντιστοίχως σημεῖα Μ, Ν, Ρ. Νά δειχθῆ ὅτι ἀναγκαίᾳ καὶ ἰκανῇ συνθήκῃ, ἵνα αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εἰς Μ, Ν, Ρ ἀντιστοίχως διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἶναι :

$$AM^2 + BN^2 + GP^2 = MB^2 + NG^2 + PA^2$$

609. Ἐάν ΑΑ', ΒΒ' ΓΓ', ΔΔ' εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν διαδοχικῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, Δ τετραγώνου ἀπὸ τυχούσης ἑφαπτομένης τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, νά δειχθῆ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γινόμενων ΑΑ'·ΓΓ' + ΒΒ'·ΔΔ' εἶναι σταθερὸν.

610. Διὰ τοῦ ἔγκεντρον Ο τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΟ καὶ ἔστωσαν Δ καὶ Ε τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ἀχθείσης καθέτου μετὰ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ περιφέρεια, ἣτις ἐφάπτεται τῶν ΑΒ, ΑΓ εἰς Δ καὶ Ε, ἐφάπτεται ἐπίσης καὶ τῆς περὶ τὸ τρ.ΑΒΓ' περιγεγραμμένης περιφερείας.

611. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν σημεῖα Ε καὶ Ζ τοιαῦτα, ὥστε ΑΕ = ΑΖ. Ἡ διάμεσος ΑΔ τοῦ τρ.ΑΒΓ τέμνει τὸ τμήμα ΕΖ εἰς Η. Νά δειχθῆ ὅτι :

$$\frac{EH}{HZ} = \frac{AG}{AB}$$

612. Ἐστω κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο). Ἐστω ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ ΑΒ καὶ ΓΔ, προεκτείνομεναι, τέμνονται εἰς Ε, αἱ δὲ ΒΓ καὶ ΑΔ, ἐπίσης προεκτείνομεναι, τέμνονται εἰς Ζ. Νά δειχθῆ ὅτι ἐπὶ τοῦ τμήματος ΕΖ ὑπάρχει σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε : ΕΜ·ΕΖ = ΕΒ·ΕΑ καὶ συγχρόνως ΖΜ·ΖΕ = ΖΑ·ΖΔ καὶ ἔν συνεχείᾳ νά δειχθῆ ὅτι

$$EZ^2 = \Delta uvE/(O) + \Delta uvZ/(O).$$

613. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀξυγωνίου τριγώνου ὡς ὑποτείνουσῶν κατασκευάζομεν ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους. Νά δειχθῆ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἑμβαδῶν τῶν τριῶν τούτων τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἑμβαδοῦ τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου.

614. Ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγ. ΑΒΓ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ καὶ γράφομεν δύο περιφερείας (Κ) καὶ (Λ), ἐξ ὧν ἡ (Κ) διέρχεται διὰ τῶν Μ καὶ Β καὶ ἐφάπτεται τῆς ΑΒ, ἡ δὲ (Λ) διέρχεται διὰ τῶν Μ καὶ Γ καὶ ἐφάπτεται τῆς ΑΓ. Νά δειχθῆ ὅτι :

i) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίων τῶν (Κ) καὶ (Λ) εἶναι σταθερὸν.

ii) Ἡ μεσοκάθετος τῆς διακέντρον ΚΛ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

615. Ἐάν Ο τὸ ἔγκεντρον τριγώνου ΑΒΓ καὶ Η₁, Η₂ τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων ΟΑΓ καὶ ΟΑΒ, νά δειχθῆ ὅτι ἡ εὐθ Η₁Η₂ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἑαφῆς τῆς πλευρᾶς ΒΓ μετὰ τοῦ ἔγγεγραμμένου εἰς τὸ ΑΒΓ κύκλου.

616. Νά δειχθῆ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον $AB\Gamma$ ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τοῦ μέσου M τῆς $B\Gamma$ καὶ τοῦ ἔγκεντρου O τέμνει τὸ ἐκ τοῦ A ὄψος εἰς σημεῖον Σ ἀπέχον τοῦ A ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου. Ἡ αὐτὴ εὐθεῖα διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος τοῦ συνδέοντος τὸ A μὲ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς E τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μετὰ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$.

617. Τμήμα $AB=3a$ διαιρεῖται διὰ σημείου M εἰς τὰ τμήματα $AM=2a$, $MB=a$. Κατασκευάζομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ AB ἰσόπλευρα τρίγωνα $A\Gamma M$ καὶ $M\Delta B$.
i) Ἐὰν ΓH ὄψος τοῦ $\tau\rho.\Gamma AM$ νὰ δειχθῆ: $\Gamma H=\Gamma\Delta$. ii) Ἐμβαδὸν τοῦ $A\Gamma\Delta B$ συναρτήσει τοῦ a .

618. Δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ E . Ὅρθῃ γωνία \widehat{xEy} στρέφεται περὶ τὸ E . Αἱ πλευραὶ τῆς Ex , Ey τέμνουں τὰς περιφερείας εἰς A καὶ B . Νά δειχθῆ ὅτι ἡ εὐθ AB διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

619. Μεταβλητῆ εὐθεῖα τέμνει τὰς πλευρὰς Ox , Oy δοθείσης γωνίας εἰς A καὶ B οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι πάντοτε $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{c}$ (c =σταθ. τμήμα). Νά δειχθῆ ὅτι ἡ εὐθ AB διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

620. Ἐστω O τὸ ἔγκεντρον τοῦ $\tau\rho.AB\Gamma$ καὶ K τὸ περίκεντρον αὐτοῦ. Νά δειχθῆ ὅτι αἱ κάθετοι εἰς O ἐπὶ τὰς AO , BO , GO τέμνουں τοὺς φορεῖς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν $B\Gamma$, ΓA , AB εἰς τρία σημεῖα κείμενα ἐπὶ εὐθείας καθέτου πρὸς τὴν ἐνοῦσαν τὸ περίκεντρον K μὲ τὸ ἔγκεντρον O .

621. Νά γραφῆ περιφέρεια ἔχουσα τὸ κέντρον τῆς ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (ϵ) καὶ ἡ ὁποία νὰ φαίνεται ὑπὸ δύο δεδομένα σημεῖα ὑπὸ γωνίας 90° καὶ 60° ἀντιστοίχως.

622. Δίδεται διάμετρος AB καὶ χορδὴ $A\Gamma$ περιφερείας. Νά προσδιορισθῆ ἐπὶ τῆς χορδῆς $A\Gamma$ σημεῖον K τοιοῦτον, ὥστε ἡ περιφέρεια $\left(K, \frac{KB}{2}\right)$ νὰ τέμνεται ψευδορθογωνίως (διχοτομηταί) ὑπὸ τῆς δοθείσης.

623. Νά κατασκευασθῆ $\tau\rho. AB\Gamma$ ἐκ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου $A\Delta=\delta$ καὶ τῶν τμημάτων $B\Delta=\mu$, $\Delta\Gamma=\nu$.

624. Νά κατασκευασθῆ $\tau\rho.AB\Gamma$ ἐκ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου $A\Delta=\delta$ καὶ τῶν διαφορῶν: $AB-B\Delta=l$, $A\Gamma-\Gamma\Delta=m$.

625. Δοθέντος κυκλικοῦ τόξου \widehat{AB} , νὰ ἀχθῆ ἐφαπτομένη αὐτοῦ τοιαύτη, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν A καὶ B ἀπὸ ταύτης νὰ ἴσῃται πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

626. Δίδονται δύο παρ/λοι, σημεῖον A ἐπὶ τῆς μιᾶς, σημεῖον B ἐπὶ τῆς ἄλλης καὶ ἔκτος τῶν παρ/λων σημεῖον Σ . Νά ἀχθῆ διὰ τοῦ Σ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς παρ/λους εἰς A' καὶ B' οὕτως, ὥστε $AA'/BB'=\mu/\nu$, ὅπου μ , ν δοθέντα τμήματα.

627. Ἐπ' εὐθείας δίδονται κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα O, A, B . Νά κατασκευασθῆ ἐπὶ τοῦ τμήματος AB σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος $MA \cdot MB/MO^2$ νὰ ἔχη τὴν μεγίστην δυνατὴν τιμὴν.

628. Νά εὑρεθῆ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB δεδομένου τριγώνου $AB\Gamma$ σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος $MA \cdot MB/M\Gamma^2$ νὰ ἔχη τὴν μεγίστην δυνατὴν τιμὴν.

629. Εἰς πᾶν τρίγωνον δεῖξατε τὰς σχέσεις:

$$\begin{aligned} KO^2 + KO_1^2 + KO_2^2 + KO_3^2 &= 12R^2 \\ OO_1^2 + OO_2^2 + OO_3^2 &= 8R(2R-\rho) \\ O_2O_3^2 + O_3O_1^2 + O_1O_2^2 &= 8R(4R+\rho) \end{aligned}$$

(K περίκεντρον, O ἔγκεντρον, O_1 , O_2 , O_3 παράκεντρα).

630. Εἰς πᾶν τρίγωνον ἰσχύει ἡ ἀνισοτική σχέσις

$$R \geq 2\rho$$

τὸ δὲ ἰσχύει μόνον εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον

631. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῶν ρ , R , $\widehat{B-\Gamma}$.

632. Νά κατασκευασθῆ τρ. $AB\Gamma$, οὐτινος δίδεται τὸ παράκεντρον O_1 , ὁ φορεὺς τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ καὶ αἱ ἀκτίνες ρ , R .

633. Περιφέρεια (c) εὐρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν γωνίας \widehat{xOy} . Νά εὑρεθῆ ἐπὶ τῆς (c) σημεῖον, τοῦ ὁποῖου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς εὐθείας Ox , Oy νά εἶναι τὸ ἐλάχιστον ἢ τὸ μέγιστον δυνατόν.

634. Θεωροῦμεν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ σταθερῆς ὑποτείνουσας $B\Gamma = a$ καὶ φέρομεν ἐκάστοτε τὰς καθέτους BB' , $\Gamma\Gamma'$ ἐπὶ τὴν διάμεσον AD . Ζητοῦνται αἱ γωνίαι ἐκείνου ἐκ τῶν τριγῶνων $AB\Gamma$, διὰ τὸ ὅποιον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παρ/μου $BB'\Gamma\Gamma'$ καθίσταται μέγιστον. Ποῖα τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγῶνου $AB\Gamma$ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ;

635. Διὰ τοῦ μέσου O τῆς ὑποτείνουσας $B\Gamma$ ὀρθογ. τριγ. $AB\Gamma$ φέρομεν ζευγὸς εὐθειῶν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας, ἐξ ἧν ἡ μία τέμνει τὴν εὐθ AB εἰς M καὶ ἡ ἄλλη τὴν εὐθ $A\Gamma$ εἰς N . Ζητεῖται νά ὀρισθῆ τὸ ζευγὸς ἐκεῖνο, διὰ τὸ ὅποιον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγ. OMN εἶναι τὸ ἐλάχιστον δυνατόν.

636. Δύο περιφέρειαι (K) καὶ (Λ) τέμνονται εἰς A καὶ B , τὰ δὲ κέντρα αὐτῶν K καὶ Λ κεῖνται ἐκατέρωθεν τῆς εὐθ AB . Φέρομεν διὰ τοῦ A εὐθείαν ἐπανατέμνουσαν τὰς περιφερείας εἰς σημεῖα Γ καὶ Δ κείμενα ἐκατέρωθεν τοῦ A . Ἐστω O τὸ ἐγκέντρον καὶ O_1 , O_2 τὰ παράκεντρα τοῦ τριγῶνου $B\Gamma\Delta$ τὰ ἀντιστοιχοῦντα πρὸς τὰς γωνίας $\widehat{\Delta}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$. Ζητεῖται νά ὀρισθῆ ἡ θέσις τῆς τεμνούσης $\Gamma\Delta$, καθ' ἣν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγ. OO_1O_2 εἶναι τὸ μέγιστον δυνατόν.

637. Τραπεζίου ἡ μικροτέρα βᾶσις εἶναι τὸ $1/8$ τῆς μεγαλυτέρας. Ζητεῖται νά διαιρηθῆ τὸ τραπέζιον εἰς τρία ὅμοια τραπέζια διὰ δύο παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις.

638. Νά κατασκευασθῆ τετράγωνον $AB\Gamma\Delta$, ἂν γνωρίζωμεν ἐν σημεῖον M τῆς πλευρᾶς AB , ἐν σημεῖον N τῆς πλευρᾶς $\Gamma\Delta$ καὶ μεταξὺ τῶν M καὶ N δύο σημεῖα Π καὶ K , καθ' ἧν ἡ MN τέμνει τὴν ἐγγεγραμμένην εἰς τὸ τετράγωνον περιφέρειαν.

639. Δίδεται κύκλος (O , R) καὶ εὐθεῖα (δ) ἀπέχουσα τοῦ κέντρου O κατὰ $OH = 2R$.

i) Νά γραφῆ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτίνα ρ , ἐφαπτομένη τῆς (δ) καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως τὴν (O , R). Συνθήκαι δυνατότητος.

ii) Νά γραφῆ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς (δ) εἰς δοθὲν σημεῖον καὶ ὀρθογωνίως τέμνουσα τὴν (O , R).

640. Δοθείσης τεμνούσης $AB\Gamma$ μιᾶς περιφερείας (c) νά κατασκευασθῆ δευτέρα τέμνουσα $AB'\Gamma'$ τοιαύτη, ὥστε οἱ κύκλοι μὲ διαμέτρους $B\Gamma$ καὶ $B'\Gamma'$,

i) νά ἐφάπτονται,

ii) νά τέμνονται ὀρθογωνίως.

641. Νά κατασκευασθῆ τριγ. $AB\Gamma$ ἐκ τῶν τριῶν ὑψῶν u_α , u_β , u_γ . Συνθήκαι δυνατότητος.

642. Νά κατασκευασθῆ τρ. $AB\Gamma$ μὲ $AB + A\Gamma = 3B\Gamma$ καὶ ἐκ τῶν στοιχείων δ_A καὶ $\widehat{B-\Gamma} = \omega$.

643. Διὰ δύο σημείων A , B κειμένων ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου $\Gamma\Delta$ δοθέντος κύκλου καὶ ἐκατέρωθεν τοῦ κέντρου νά ἀχθοῦν δύο ἴσαι χορδαὶ ἔχουσαι ἐν κοινὸν ἄκρον.

644. Νά κατασκευασθῆ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τοῦ ὕψους καὶ τῆς διαμέσου τῶν ἀγομένων ἐπὶ μίαν τῶν ἴσων πλευρῶν.

645. Νά κατασκευασθῆ ἰσοσκελὲς τραπέζιον, τοῦ ὁποῖου δίδεται τὸ μήκος λ τῆς διαγωνίου, ὁ λόγος m/n τῶν δύο βάσεων καὶ ἡ ἀκτίς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

646. Δύο κύκλοι (O , R) καὶ $\left(O', \frac{R}{2}\right)$ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς. Νά κατασκευασθῆ χορδὴ AB τοῦ μεγαλυτέρου ἐφαπτομένη εἰς Γ τοῦ μικροτέρου οὕτως, ὥστε $A\Gamma \cdot \Gamma B = c^2$ (c δοθὲν τμήμα).

647. Νά κατασκευασθῆ τρίγ $AB\Gamma$, οὐτίνος δίδεται ἡ βᾶσις $B\Gamma$, τὸ ὕψος AH καὶ τοῦ ὀπίου ἢ ἔσωτερικῆ διχοτόμος τῆς \widehat{A} νά εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων, εἰς ἃ χωρίζει τὴν $B\Gamma$.

648. Περί δοθέν παραλληλόγραμμον νά περιγραφῆ ὀρθογώνιον παρ/μον τοῦ μεγίστου δυνατοῦ ἔμβαδοῦ.

649. Νά κατασκευασθῆ τρ. $AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων :

$$\alpha, \mu, \widehat{B}, \widehat{\Gamma} = \widehat{\omega}.$$

650. **Θεώρημα καὶ ἐφαρμογὰ.** Νά δειχθῆ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον $AB\Gamma$ τὰ παράκεντρα O_2, O_3 διαιροῦν ἀρμονικῶς τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον AD' . Αἱ προβολαὶ τῶν O_2 καὶ O_3 ἐπὶ τὸν φορέα τοῦ ὕψους $AA' = u_\alpha$ διαιροῦν ἀρμονικῶς τὸ ὕψος τοῦτο.

i) Συναγάγετε κατασκευὴν ἑνὸς ἐκ τῶν τριῶν στοιχείων $u_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$, ὅταν δίδονται τὰ δύο ἄλλα.

ii) Δείξατε τὴν σχέσιν :
$$\frac{2}{u_\alpha} = \frac{1}{\rho_\beta} + \frac{1}{\rho_\gamma}.$$

iii) Νά κατασκευασθῆ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐκ τῶν στοιχείων $\beta + \gamma, \rho_\alpha, \rho_\beta$.

(Υποδ. $2/u_\alpha = 1/\rho_\beta + 1/\rho_\alpha$. Τὸ μέσον M τῆς $B\Gamma$ ἀπέχει τῆς εὐθ AB , $u_\gamma/2$).

651. Αἱ τέσσαρες πλευραὶ κυρτοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ἔχουν μῆκη $AB = 30m$, $B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A = 24m$ ἢ δὲ διαγώνιος $\Delta B = 36m$. i) Δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον εἶναι τραπέζιον. ii) Ὅτι αἱ δύο γωνίαι $\delta\epsilon$ σχηματίζουν αἱ διαγώνιοι τοῦ $AB\Gamma\Delta$ ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

652. Δοθέντων δύο τεμνομένων κύκλων νά ἀχθῆ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθείσαν εὐθεῖαν καὶ τέμνουσα τὰς δύο περιφέρειας εἰς δύο ζεύγη σημείων, ὥστε τὸ ἐν ζεύγος νά χωρίζῃ ἀρμονικῶς τὸ ἄλλο.

653. Δίδεται περιφέρεια (O) καὶ σημεῖον Σ ἐκτὸς αὐτῆς. Νά ἀχθῆ διὰ τοῦ Σ εὐθεῖα τέμνουσα τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεία, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῆς διὰ τοῦ Σ διερχομένης διαμέτρου νά ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

654. Μεταβλητοῦ, ἰσοσκελοῦς τρ. $AB\Gamma$ ($\Gamma A = \Gamma B$) τὸ ἐν ἄκρον A τῆς βάσεως AB εἶναι σταθερὸν καὶ ὁ φορεὺς αὐτῆς AX σταθερός. Ποῖος ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Γ αὐτοῦ, ἐάν τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του μένει σταθερὸν;

655. Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας SX νά εὑρεθῆ σημεῖον M , τοῦ ὁποῦ τοῦ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς κορυφὰς δεδομένου τριγώνου $AB\Gamma$ νά εἶναι τὸ ἐλάχιστον δυνατόν. Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ M , ὅταν ἡ SX στρέφεται περὶ τὸ S ;

656. Ἐπὶ περιφέρειας, ἀκτίνος ρ , λαμβάνομεν σταθερὸν σημεῖον Σ . Ἐνοῦμεν τὸ Σ μὲ τυχὸν σημεῖον A τῆς περιφέρειας καὶ προεκτείνομεν τὸ $A\Sigma$ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Σ κατὰ ΣM ὅπως, ὥστε $A\Sigma^2 + \Sigma M^2 = 4\rho^2$. Ζητεῖται τὸ σύνολον τῶν σημείων M .

657. Δύο ἡμιπεριφέρειαι διαμέτρων AB καὶ $A'B'$ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς A . Εὐθεῖα $\perp A'B'$ τέμνει τὰς ἡμιπεριφέρειας ἀντιστοίχως εἰς P καὶ P' . Τὸπος τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν εὐθειῶν BP καὶ $B'P'$.

658. Δίδεται περιφέρεια (c) καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς σημεῖον A . Μεταβλητὴ περιφέρεια (γ) διέρχεται διὰ τοῦ A καὶ ἐφάπτεται τῆς (c) εἰς τὸ M . Τὸπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐφαπτομένων τῆς (γ) εἰς A καὶ M .

659. Ἐστω $AB\Gamma$ ἰσόπλευρον τρίγωνον, O τὸ ἔγκεντρον αὐτοῦ καὶ (c) περιφέρεια ἐφαπτομένη τῶν $OB, O\Gamma$ εἰς B καὶ Γ . Νά δειχθῆ ὅτι διὰ πᾶν σημεῖον M τῆς (c) ἰσχύει : $MA^2 = MB^2 + M\Gamma^2$.

660. Ὄρθογώνιον παρ/μου $AB\Gamma\Delta$ ἢ κορυφὴ A μένει σταθερὰ, ἢ δὲ διαγώνιος BA παραμένει χορδὴ δεδομένης περιφέρειας. Τὸπος τῆς κορυφῆς Γ .

661. Ἐστω ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ μὲ $AB = A\Gamma$ καὶ I τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς AB πρὸς τὸ μέρος τοῦ B λαμβάνομεν σημεῖον M καὶ ἐπὶ τῆς προεκτά-

σως της ΑΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ σημείον Ν τοιαῦτα, ὥστε $BM \cdot GN = IB^2 = IG^2$ (σταθερόν). Ζητοῦνται :

i) Ὁ τόπος τοῦ περικέντρου τοῦ τρ.ΙΜΝ.

ii) Ὁ τόπος τοῦ ποδὸς Η τοῦ ὕψους ΙΗ τοῦ τρ.ΙΜΝ.

iii) Ὁ τόπος τοῦ ποδὸς Δ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου ΙΔ τοῦ τρ.ΙΜΝ.

662. Ἐπ' εὐθείας δίδονται κατὰ σειρὰν τὰ σταθερὰ σημεῖα Α, Δ, Β. Ἐπὶ τῆς εἰς Δ καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθ ΑΒ λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον Γ καὶ ἔστω Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τρ. ΑΒΓ. Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῆς προβολῆς τοῦ Γ ἐπὶ τὴν εὐθείαν τὴν διερχομένην διὰ τοῦ Η καὶ διὰ τοῦ μέσου Ο τῆς πλευρᾶς ΑΒ.

663. Δίδεται περιφέρεια (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπ' εὐθείας μετὰ τοῦ κέντρου Ο. Ἐάν ἀχθῆι τυχούσα διάμετρος ΠΚ τῆς (Ο), ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς τῶν περιφερειῶν (ΑΟΠ) καὶ (ΒΟΚ), ὅταν ἡ ΠΚ στρέφεται περὶ τὸ Ο;

664. Ἐπ' εὐθείας δίδονται κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Διὰ τῶν Β καὶ Γ φέρομεν καθέτους ΒΒ', ΓΓ' ἐπὶ μεταβλητὴν εὐθείαν Αχ διερχομένην διὰ τοῦ Α. Τόπος τῆς τομῆς τῶν ΒΓ' καὶ Β'Γ.

665. Δύο μεταβλητοὶ κύκλοι, τῶν ὁποίων αἱ ἀκτίνες ἔχουν σταθερὸν λόγον, ἐφάπτονται δοθείσης εὐθείας εἰς δύο σταθερὰ σημεῖα καὶ κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Ἐῦρετε τὸν τόπον τῆς τομῆς τῆς ἑτέρας ἐξωτερικῆς κοινῆς ἐφαπτομένης τῶν μετὰ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν δύο κύκλων.

666. Θεωροῦμεν μεταβλητὴν εὐθείαν διερχομένην διὰ τῆς κορυφῆς Δ τετραγώνου ΑΒΓΔ καὶ τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν (Δ, ΔΑ) κατὰ διάμετρον ΜΜ', τὸν φορέα τῆς διαγωνίου ΑΓ εἰς Ν καὶ τὴν εὐθ ΑΒ εἰς Ρ.

i) Τόπος τοῦ συζυγοῦς ἁρμονικοῦ Ν' τοῦ Ν ὡς πρὸς τὰ Μ καὶ Μ'.

ii) Τόπος τοῦ συζυγοῦς ἁρμονικοῦ Ρ' τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰ Μ καὶ Μ'.

667. Σημεῖον Μ προβάλλεται ἐπὶ τῶν ὑψῶν δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ εἰς Α', Β', Γ'. Νὰ εὑρεθῆ ὁ τόπος τοῦ Μ, ὅταν τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

668. Διὰ τῆς κορυφῆς Α τετραγώνου ΑΒΓΔ ἄγεται εὐθεῖα τέμνουσα τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς Μ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἰς Ι. Νὰ δεიχθῆ ὅτι

$$\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2}.$$

669. Δίδεται περιφέρεια (Ο, R) καὶ διάμετρος αὐτῆς ΑΒ. Προεκτείνομεν τὸ ΑΒ κατὰ ΒΓ=R. i) Νὰ κατασκευασθῆ τέμνουσα ΓΔΕ τῆς περιφερείας τοιαύτη, ὥστε ΓΔ=ΔΕ. ii) Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρ.ΟΓΕ.

670. Κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι ΑΓ ⊥ ΓΒ, ΒΔ ⊥ ΑΔ, ΑΒ=65m, ΑΔ=39m, ΒΓ=25m. Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι 1344m².

671. Ἐάν R₁, R₂ εἶναι αἱ ἀκτίνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων περὶ τὰ δύο τρίγωνα, εἰς ᾧ χωρίζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ὑπὸ τῆς διαμέσου ΑΔ τῆς ἀγομένης πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν, νὰ δεიχθῆ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρ.ΑΒΓ ἰσοῦται πρὸς: $(2R_1 R_2)^2 / (R_1^2 + R_2^2)^2$.

672. Τραπεζίου ΑΒΓΔ αἱ βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ ἔχουν μήκη α καὶ β. Ἄν Ε τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του, νὰ ὑπολογισθῆ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ τριγ. ΕΑΔ καὶ τοῦ τραπέζιου ΑΒΓΔ συναρτήσει τῶν α καὶ β.

673. Ἐάν εἰς τρ.ΑΒΓ εἶναι $\widehat{A} + 2\widehat{B} = 3$ ὀρθ., δεῖξατε ὅτι τότε μετὰ τῶν στοιχείων του ὑφίσταται ἡ σχέση β²-Rα=2R².

674. Τὰ μήκη τῶν βάσεων ἰσοσκελοῦς τραπέζιου περιγραφίμου εἶναι α καὶ β. Ὑπολογίσατε τὴν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τραπέζιον κύκλου.

675. Προεκτείνομεν τὴν ἀκτίνα ΟΑ κύκλου (Ο) κατὰ ΑΒ=μ. ΟΑ καὶ ἄγομεν ἐκ τοῦ Β ἐφαπτόμενον τμήμα ΒΓ πρὸς τὸν κύκλον. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀκτίς τοῦ περὶ τὸ τρ. ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου, συναρτήσει τοῦ μήκους ΑΓ=λ καὶ τοῦ ἀριθμοῦ μ.

676. Τρεις παρ/λοι εὐθείαι διερχόμεναι διὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τοὺς φορεῖς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἰς Α', Β', Γ'. Νὰ δεიχθῆ ὅτι :

$$\text{Εμβ}(Α'Β'Γ') : \text{Εμβ}(ΑΒΓ) = 2 : 1.$$

677. Ἐάν Ε, Ε₁, Ε₂, Ε₃ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ΑΒΓ μετὰ τῆς εὐθείας ΒΓ, δεῖξτε ὅτι :

$$ΑΕ^2 + ΑΕ_1^2 + ΑΕ_2^2 + ΑΕ_3^2 = 3(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2.$$

678. Δείξτε ὅτι :

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = -1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\text{ΑΓ}} + \frac{1}{\text{ΑΔ}} \right) + \left(\frac{1}{\text{ΒΓ}} + \frac{1}{\text{ΒΔ}} \right) = 0.$$

679. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς l καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιστοίχως, σημεῖα Ζ καὶ Ι τοιαῦτα, ὥστε ΑΖ = α, ΙΓ = β.

i) Ποία εἶναι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη μεταξὺ τῶν α, β, l , ἵνα οἱ κύκλοι (Ι, β) καὶ (Ζ, α) τέμνονται ὀρθογωνίως;

ii) Τῆς συνθήκης πληρουμένης, νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΙΖ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ τετραγώνου.

iii) Νὰ δειχθῆ ὅτι αἱ ἀνωτέρω ὀρθογώνιοι περιφέρειαι ἔχουν τὸ ἓν κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ καὶ τὸ ἕτερον ἐπὶ τῆς περὶ τὸ τετράγωνον περιγεγραμμένης περιφέρειας.

680. Ἐστω κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Ἐὰς καλέσωμεν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν σου ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀντιστοίχως μὲ : α, β, γ, δ. Ἐὰς φέρωμεν τὰ διανύσματα $\vec{AA'} = \vec{BA}$ καὶ $\vec{ΓΓ'} = \vec{BD}$ καὶ ἄς σχηματίσωμεν τὸ παρ/μιον ΑΓΓ'Α', ἐντὸς τοῦ ὁποίου εὐρίσκεται ἡ κορυφή Δ. Νὰ δειχθῆ ὅτι τὸ Δ βλέπει τὰς πλευρὰς τοῦ παρ/μιου ΑΓΓ'Α' ὑπὸ γωνίας ἴσας πρὸς τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ παραλληλογράμμου ἀποστάσεις ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου καὶ ὅτι, δοθέντος τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓΓ'Α' καὶ τοῦ σημείου Δ ἐντὸς αὐτοῦ, τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ὠρισμένον. Βάσει τούτων νὰ κατασκευασθῆ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, οὐτινος δίδονται αἱ διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία αὐτῶν ἢ περιέχουσα τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ ἀκόμη :

i) Δύο διαδοχικαὶ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

ii) Δύο ἀπέναντι γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔ.

iii) Μία γωνία καὶ μία σχέσις μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν αὐτήν, ὅπως π.χ. ἡ \widehat{B} καὶ ἡ σχέσις $\alpha + \beta = c$ ἢ $\alpha - \beta = c$ ἢ $\alpha^2 + \beta^2 = c^2$ ἢ $\alpha^2 - \beta^2 = c^2$ ἢ $\alpha/\beta = \mu/\nu$ ἢ $\alpha\beta = c^2$.

681. Νὰ κατασκευασθῆ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δεδομένων σημείων καὶ ἡ ὁποία νὰ φαίνεται ἀπὸ τρίτου δοθέντος σημείου ὑπὸ δοθείσαν γωνίαν.

682. Διὰ δύο δεδομένων σημείων δοθείσης περιφέρειας νὰ ἀχθοῦν δύο ὁμόρροποι ἡμιεὐθεῖαι ἀποτεμνοῦσαι δύο χορδὰς, αἱ ὁποῖαι νὰ πληροῦν ἓν ἐκ τῶν τεσσάρων ἐπομένων ἐπιταγμάτων :

i) Νὰ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς δοθὲν τμήμα.

ii) Νὰ ἔχουν διαφορὰν ἴσην πρὸς δοθὲν τμήμα.

iii) Νὰ ἔχουν γινόμενον δοθὲν ἴσον πρὸς c^2 .

iv) Νὰ ἔχουν λόγον δοθέντα.

683. Ἐάν Π καὶ Κ εἶναι αἱ προβολαὶ σημείου Μ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας \widehat{A} τριγώνου ΑΒΓ, ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Μ ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ συναντᾷ τὴν ΙΚ εἰς σημεῖον Ε κείμενον ἐπὶ τῆς διαμέσου ΑΔ τοῦ τρ. ΑΒΓ.

684. Ἐστω παρ/μιον ΑΒΓΔ, Ε σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ Ζ ἕτερον σημεῖον τῆς

πλευράς ΑΔ. "Αν αί ΕΑ, ΖΒ τέμνονται εις Η και αί ΕΔ, ΖΓ εις Ι, δείξατε ότι ή ευθ ΗΙ διαιρεί τὸ παρ/μον εις δύο ἰσοδύναμα μέρη.

685. Αί εὐθείαι ΑΑ, ΒΑ, ΓΑ συνδέουσαι τὰς κορυφὰς τριγώνου ΑΒΓ με σημειον Λ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου τέμνουσι τὰς ἀπέναντι πλευράς εις Α', Β', Γ'. Αί διὰ τοῦ Α' ἀγόμεναι παρ/λοι πρὸς τὰς ΒΒ' και ΓΓ' τέμνουσι τὰς πλευράς ΑΓ και ΑΒ εις Π και Κ και αί ἐκ τοῦ Α' ἀγόμεναι παρ/λοι πρὸς τὰς ΑΓ, ΑΒ τέμνουσι τὰς ΒΒ', ΓΓ' εις Ρ και Τ. Νά δειχθῆ ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Π, Κ, Ρ, Τ κείνται ἐπ' εὐθείας.

686. Ἐστω ῥόμβος ΑΒΓΔ και Π, Ρ, Σ, Κ τὰ περίκεντρα τῶν τριγῶνων ΒΓΔ, ΒΑΔ, ΑΒΓ, ΑΔΓ. Νά δειχθῆ ὅτι τὰ Π, Σ, Ρ, Κ εἶναι κορυφαί ῥόμβου ὁμοίου πρὸς τὸν δοθέντα.

687. Μεταβλητοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ βάσις ΒΓ εἶναι σταθερά και τὸ ἄθροισμα $AB + \Gamma A = s$, σταθερόν. Ἡ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ παρ/λος πρὸς τὴν ΑΒ τέμνει τὴν ἐκ τοῦ Γ παρ/λον πρὸς τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον ΑΔ εις Ρ. Ζητεῖται ὁ τόπος τοῦ Ρ.

688. Εἰς πᾶν τρ. ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$AO \cdot AO_1 = AB \cdot AG,$$

ὅπου Ο τὸ ἔγκεντρον, Ο₁ τὸ παράκεντρον τὸ ἀντιστοιχοῦν εις τὴν \widehat{A} .

689. Δοθέντων τριῶν κύκλων νά κατασκευασθῆ τέταρτος τοιοῦτος, ὥστε οἱ ριζικοὶ ἄξονες αὐτοῦ και τῶν τριῶν δοθέντων νά διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ τρία δεδομένα σημεῖα.

690. Ἐστῶσαν τρεῖς κύκλοι (Κ), (Λ), (Ο) ἐκτὸς ἀλλήλων. Νά δειχθῆ ὅτι τὰ δύο ὀριακά σημεῖα τῆς δέσμης, ἣν ὀρίζουσι οἱ (Κ) και (Λ) και τὰ τῆς δέσμης, ἣν ὀρίζουσι οἱ (Κ) και (Ο), εἶναι ὁμοκυκλικά.

691. Εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς κορυφῆς Α ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὴν πλευράν ΒΓ εις Δ και τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εις Ε. Νά δειχθῆ ὅτι

$$\frac{1}{EA} = \frac{1}{EB} + \frac{1}{EG}.$$

692. Ἡ περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ τοῦ ποδὸς Δ τοῦ ὕψους ΑΔ τριγ.ΑΒΓ και διὰ τῶν σημείων Ο και Ο₁ (ἔγκεντρον, παράκεντρον) ἐπανατέμνει τὴν ευθΑΔ εις Σ. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ ΑΣ ἰσοῦται με τὴν διάμετρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ τρ.ΑΒΓ.

693. Ἡ εὐθεῖα ἡ ἐνοῦσα τὸ βαρύκεντρον τρ.ΑΒΓ με τυχὸν σημεῖον Ρ τῆς περιγεγραμμένης περιφέρειας διχοτομεῖ τὸ τμήμα τὸ ἔχον ἄκρα τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τοῦ Ρ και τὸ ὀρθόκεντρον.

694. Ἐάν Μ, Ν, Ρ, Κ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παρ/μου, τότε αἱ εὐθείαι ΑΝ, ΒΡ, ΓΚ, ΔΜ ὀρίζουσι παρ/μον, τοῦ ὁποῖου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι τὸ ἕν πέμπτον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ΑΒΓΔ.

695. Νά δειχθῆ ὅτι αἱ εὐθείαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τριγώνου ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέσους τοῦ τρ.ΑΒΓ τὰς ἀγομένας ἐκ τῶν Β, Γ, Α σχηματίζουν τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τριπλάσιον τοῦ τρ.ΑΒΓ και ἔχον τὸ ἴδιον κ.β. με τὸ τρ.ΑΒΓ.

696. Ἐάν ἐπι τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγ. ΑΒΓ ληφθοῦν ἀντιστοίχως σημεῖα Γ₁, Α₁, Β₁ τοιαῦτα, ὥστε : $AG_1/\Gamma_1B = BA_1/A_1\Gamma = \Gamma B_1/B_1A$, τότε τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α₁Β₁Γ₁ ἔχουσι τὸ ἴδιον βαρύκεντρον.

ΕΚΔΟΣΙΣ Α'. 1976 (V) -- ΑΝΤΙΤ. 34.000 -- ΣΥΜΒΑΣΙΣ: 2655/90-3-76
ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔ.: «ΑΤΛΑΝΤΙΣ - Μ. ΠΕΧΑΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ» Α.Ε.

