Υποδειγματικές Λύσεις Τεσσάρων Μαθηματικών Προβλημάτων Βαρβάκειο Λύκειο

1. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν πρώτοι αριθμοί στην απειροακολουθία των αριθμών

$$10001,\ 100010001,\ 1000100010001,\ ...$$

Λύση

Αρχικά θα αναζητήσουμε το πρότυπο με το οποίο παράγονται οι αριθμοί της παραπάνω απειροακολουθίας. Για το σκοπό αυτό γράφουμε τους αριθμούς στην αναλυτική μορφή του δεκαδικού συστήματος ως εξής:
$10001 = 1 + 10^4$
$100010001 = 1 + 10^4 + 10^8$
$1000100010001 = 1 + 10^4 + 10^8 + 10^{12}$
...
Τα παραπάνω δίνουν ότι η γενική μορφή είναι $a_n = 1 + 10^4 + 10^8 + ... + 10^{4n}$ όπου ο n είναι ένας φυσικός αριθμός.
Όμως για $a \neq b$ γνωρίζουμε ότι ισχύει η ταυτότητα
$a^n + a^{n-1}b + ... + ab^{n-1} + b^n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$, οπότε για $a = 10^4$, $b = 1$, παίρνουμε ότι

$$a_n = 1 + 10^4 + 10^8 + ... + 10^{4n} = \frac{10^{4(n+1)} - 1}{10^4 - 1} = \frac{(10^{2(n+1)} - 1)(10^{2(n+1)} + 1)}{9 \cdot 11 \cdot 101}$$

Τέλος παρατηρούμε ότι $9|10^{2(n+1)} - 1$ και $11|10^{2(n+1)} - 1$, ενώ $101|10^{2(n+1)} - 1$ όταν n περιττός και $101|10^{2(n+1)} + 1$ όταν n άρτιος.
Συνεπώς όταν n περιττός, ο a_n γράφεται ως γινόμενο δύο ακεραίων με τη μορφή

$$a_n = \frac{(10^{2(n+1)} - 1)}{9 \cdot 11 \cdot 101} \cdot (10^{2(n+1)} + 1)$$

Ενώ όταν n άρτιος, ο a_n γράφεται ως γινόμενο δύο ακεραίων με τη μορφή

$$a_n = \frac{(10^{2(n+1)} - 1)}{9 \cdot 11} \cdot \frac{10^{2(n+1)} + 1}{101}$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι για $n > 1$ οι παραπάνω ακέραιοι των γινομένων είναι και μεγαλύτεροι του 1. Για $n = 1$ έχουμε τον $10001 = 73 \cdot 137$.

2. Έστω f ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Δείξτε ότι όλες οι ρίζες του f είναι πραγματικοί αριθμοί αν και μόνο αν το πολυώνυμο f^2 δεν μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα δύο τετραγώνων

$$f^2 = g^2 + h^2$$

όπου τα g, h είναι μη-μηδενικά πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές και ισχύει $\deg(g) \neq \deg(h)$.

Λύση

Δείχνουμε πρώτα την κατεύθυνση $(\Rightarrow)$. Υποθέτουμε δηλαδή ότι το f^2 δεν μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα δύο τετραγώνων πολυωνύμων g, h με διαφορετικούς βαθμούς, και δείχνουμε ότι όλες οι ρίζες του f είναι πραγματικοί αριθμοί. Υποθέτουμε το αντίθετο, δηλαδή ότι δεν είναι όλες οι ρίζες πραγματικές. Τότε το πολυώνυμο στην παραγοντοποίησή του θα έχει οπωσδήποτε και κάποιους δευτεροβάθμιους παράγοντες με αρνητική διακρίνουσα. Δηλαδή θα έχουμε ότι

$$f(x) = a(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_m)(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)...(x^2+b_nx+c_n)$$

όπου ο a είναι πραγματικός αριθμός, οι $a_1, ..., a_m$ είναι οι (όχι απαραίτητα διαφορετικές) πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου και οι δευτεροβάθμιοι παράγοντες (υπάρχει τουλάχιστον ένας από την υπόθεσή μας), που έχουν αρνητική διακρίνουσα, δηλαδή $b_i^2 - 4c_i < 0$ για $i = 1, ..., n$. Παρατηρούμε ότι με συμπλήρωση τετραγώνου στους δευτεροβάθμιους παράγοντες παίρνουμε:

$$x^2 + b_ix + c_i = x^2 + b_ix + \frac{b_i^2}{4} + \left(c_i - \frac{b_i^2}{4}\right) = \left(x + \frac{b_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{4c_i - b_i^2}\right)^2$$

δηλαδή υπάρχουν πολυώνυμα g_i, h_i ώστε $x^2 + b_ix + c_i = g_i^2 + h_i^2$.
Οπότε για το πολυώνυμο f^2 θα έχουμε ότι

$$f^2(x) = a^2(x-a_1)^2(x-a_2)^2...(x-a_m)^2\left(g_1^2(x) + h_1^2(x)\right)^2\left(g_2^2(x) + h_2^2(x)\right)^2...\left(g_n^2(x) + h_n^2(x)\right)^2$$

Όμως με διαδοχικές χρήσεις της ταυτότητας *Lagrange*, που λέει ότι $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$, παίρνουμε ότι υπάρχουν πολυώνυμα $s(x), t(x)$ τέτοια, ώστε:

$$\left(g_1^2(x) + h_1^2(x)\right)^2\left(g_2^2(x) + h_2^2(x)\right)^2...\left(g_n^2(x) + h_n^2(x)\right)^2 = s^2(x) + t^2(x)$$

Επιπλέον αν θέσουμε $a^2(x-a_1)^2(x-a_2)^2...(x-a_m)^2 = q^2(x)$ τότε τελικά παίρνουμε ότι

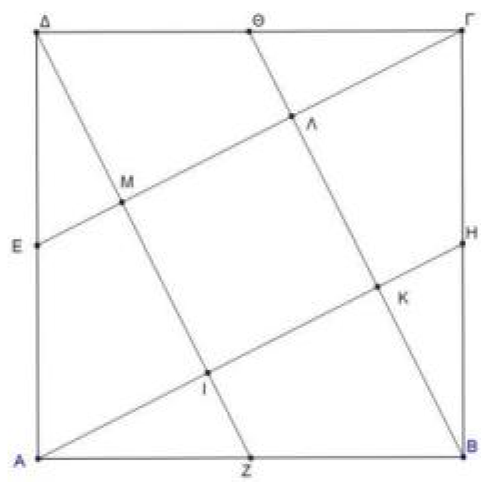
$$f^2(x) = q^2(x)\left(s^2(x) + t^2(x)\right) = g^2(x) + h^2(x)$$

Τέλος αφού τα g_i έχουν βαθμό 1 και τα h_i έχουν βαθμό 0, θα έχουμε ότι $\deg(g) \neq \deg(h)$.
Καταλήξαμε δηλαδή σε άτοπο και έτσι η μία κατεύθυνση έχει αποδειχθεί.

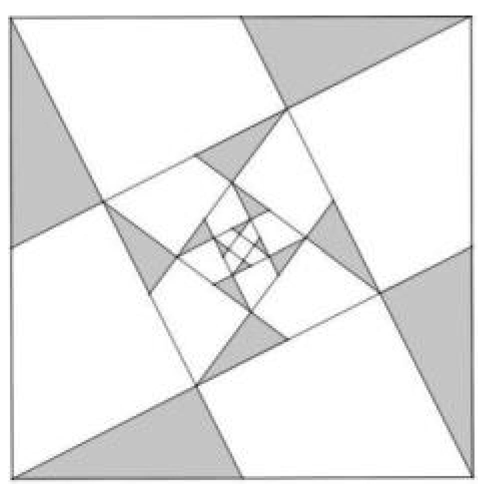
Αποδεικνύουμε τώρα την κατεύθυνση ($\Leftarrow$). Δείχνουμε δηλαδή ότι αν όλες οι ρίζες του f είναι πραγματικές, τότε δεν υπάρχουν πολυώνυμα g, h με διαφορετικούς βαθμούς τέτοια, ώστε $f^2 = g^2 + h^2$.
Πράγματι, ας υποθέσουμε πάλι το αντίθετο και θα προσπαθήσουμε να καταλήξουμε σε άτοπο. Υποθέτουμε λόγω της συμμετρίας ότι $\deg(g) > \deg(h)$. Οπότε συγκρίνοντας τους βαθμούς στα δύο μέλη της $f^2 = g^2 + h^2$ (*), παίρνουμε ότι $\deg(g) = \deg(h)$. Επιπλέον αν a είναι μια ρίζα του f, τότε $g^2(a) + h^2(a) = 0$, άρα $g(a) = h(a) = 0$. Αφού λοιπόν τα f, g έχουν τις ίδιες ρίζες και τον ίδιο βαθμό είτε θα ισχύει ότι $f(x) = g(x)$ είτε θα υπάρχει μία ρίζα του f σε μεγαλύτερη πολλαπλότητα από αυτή στο g. Η περίπτωση $f(x) = g(x)$ απορρίπτεται καθώς τότε το h θα ήταν το μηδενικό πολυώνυμο. Οπότε υπάρχει a ώστε $(x-a)^{2m} f_1^2(x) = (x-a)^{2n} g_1^2(x) + (x-a)^{2s} h_1(x)$ με $m > n$. Τότε δεν μπορεί να έχουμε $s > n$ γιατί τότε θα είχαμε ότι το a είναι ρίζα του $g_1(x)$. Επίσης δεν μπορεί να ισχύει $n > s$ γιατί τότε το a θα ήταν ρίζα του $h_1(x)$. Επομένως $n = s$, οπότε $(x-a)^{2m-2n} f_1^2(x) = g_1^2(x) + h_1^2(x)$. Τότε όμως για $x = a$ έχουμε ότι $g_1^2(a) + h_1^2(a) = 0$, άρα $g_1(a) = h_1(a) = 0$ το οποίο είναι άτοπο, οπότε η υπόθεσή μας ήταν εσφαλμένη, οπότε το ζητούμενο αποδείχθηκε και σε αυτή την περίπτωση.

Σημείωση: *Το παραπάνω πρόβλημα ανήκει στην κατηγορία του 17ου προβλήματος του Hilbert. Ο Hilbert διατύπωσε την εξής ερώτηση:*
¨Δοθέντος ενός πολυωνύμου πολλών μεταβλητών το οποίο παίρνει μη αρνητικές τιμές υπεράνω των πραγματικών αριθμών, μπορούμε να το αναπαραστήσουμε σαν άθροισμα τετραγώνων ρητών συναρτήσεων; '
Η απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι καταφατική και αποδείχθηκε από τον Emil Artin. Παρόλα αυτά δεν είναι σωστό ότι:"Δοθέντος ενός πολυωνύμου πολλών μεταβλητών το οποίο παίρνει μη αρνητικές τιμές υπεράνω των πραγματικών αριθμών, μπορούμε να το αναπαραστήσουμε σαν άθροισμα τετραγώνων πολυωνύμων¨. Το αντιπαράδειγμα δόθηκε το 1967 από τον Motzkin που έδωσε παράδειγμα του πολυωνύμου $p(x, y, z) = z^6 + x^4 z^2 + x^2 y^4 - 3x^2 y^2 z^2$, *που είναι σχεδόν παντού θετικό αλλά δεν μπορεί να γραφεί ως άθροισμα τετραγώνων πολυωνύμων.*
Βέβαια αν πάμε λίγο παραπέρα, θα δούμε ότι ισχύει ότι κάθε μη αρνητικό πολυώνυμο προσεγγίζεται από ακολουθία πολυωνύμων που τα στοιχεία της γράφονται ως άθροισμα τετραγώνων πολυωνύμων.

3. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 1. Αν E, Z, H, Θ είναι τα μέσα των πλευρών του, τότε να δειχθεί ότι το τετράπλευρο $IK\Lambda M$, όπως αυτό σχηματίζεται στο παρακάτω σχήμα, είναι τετράγωνο. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς του;



Συνεχίζουμε τη διαδικασία με το νέο τετράγωνο που δημιουργείται και χρωματίζουμε τα τρίγωνα που σχηματίζονται, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδειχθεί ότι αν συνεχίσουμε επ'απειρον αυτή τη διαδικασία, τότε το εμβαδό των χρωματισμένων τριγώνων θα ισούται με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του αρχικού τετραγώνου.



Λύση

Παρατηρούμε αρχικά ότι τα τρίγωνα $B\Gamma\Theta, \Gamma\Delta E$ είναι ίσα, συνεπώς θα ισχύει ότι $\angle\Theta B\Gamma = \angle\Delta\Gamma E = 90° - \angle\Lambda\Gamma B$, οπότε $\angle\Gamma\Lambda B = 90°$. Όμοια δείχνουμε ότι όλες οι γωνίες του $IK\Lambda M$ είναι ορθές. Άρα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Θα δείξουμε ότι έχει και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. Θα δείξουμε ότι $K\Lambda = M\Lambda$. Πράγματι αυτό ισχύει αφού $B\Theta = \Gamma E$, $EM = \Theta\Lambda$ και $\Gamma\Lambda = KB$. Συνεπώς το $IK\Lambda M$ είναι τετράγωνο. Επιπλέον, αφού τα τρίγωνα $\Gamma\Theta\Lambda, \Gamma\Delta E$ είναι όμοια, θα ισχύει ότι:

$$\frac{\Theta\Lambda}{\Lambda\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta\Gamma} = \frac{1}{2}$$

Επίσης $\Gamma\Lambda = \Lambda M$ οπότε $M\Lambda = \dfrac{2}{5}\Gamma E = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Για το δεύτερο ερώτημα τώρα, θα δούμε γενικά σε τετράγωνο με πλευρά a, τι μέρος του εμβαδού του καλύπτουν τα 4 τρίγωνα. Θα διατηρήσουμε τον αρχικό συμβολισμό των γραμμάτων στο τετράγωνο για ευκολία, υποθέτοντας μόνο ότι αντί για πλευρά 1 έχει πλευρά a. Τότε το άθροισμα του εμβαδού των τριγώνων είναι $4\dfrac{1}{2}\Theta\Lambda \cdot \Lambda\Gamma = \Gamma\Lambda^2$.

Άρα τα τρίγωνα καλύπτουν το $\dfrac{\Gamma\Lambda^2}{a^2} = \dfrac{\left(\frac{2}{5}\Gamma E\right)^2}{a^2} = \dfrac{\frac{4}{25}\frac{5a^2}{4}}{a^2} = \dfrac{1}{5}$ του τετραγώνου. Επομένως στην αρχή καλύπτεται το $\frac{1}{5}$, στο δεύτερο βήμα καλύπτεται το $\frac{1}{5}$ του $\frac{1}{5}$ και λοιπά. Δηλαδή συνολικά καλύπτεται το

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + ... = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

του αρχικού τετραγώνου, που είναι και το ζητούμενο.

4. Να κατασκευαστεί τρίγωνο ABC αν δίνεται η πλευρά BC, το μήκος του τμήματος OH και ότι $OH//BC$, όπου O, H είναι αντίστοιχα το περίκεντρο και το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC.

Λύση

Αν D είναι το ίχνος του ύψους από την κορυφή A και M είναι το μέσον της BC, τότε αφού $OH//BC$, θα έχουμε ότι το τετράπλευρο $OHDM$ είναι ορθογώνιο, άρα $DM = OH$. Αφού όμως ξέρουμε το μέσον M γνωστής πλευράς και ξέρουμε και το μήκος OH, ξέρουμε και το ίχνος D του ύψους. Συνεπώς για να κατασκευάσουμε το τρίγωνο, μένει μόνο να βρούμε το μήκος AD, ώστε να προσδιορίσουμε και την κορυφή A. Γνωρίζουμε όμως ότι το συμμετρικό K του ορθοκέντρου ως προς τη BC ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο, και ότι $AH = 2OM$. Όμως $OM = HD$, οπότε $DK = DH = \frac{DA}{3}$, οπότε από το θεώρημα της δύναμης σημείου ως προς κύκλο έχουμε ότι

$$DA \cdot DK = DB \cdot DC \Rightarrow DA^2 = 3DB \cdot DC$$

Αυτό όμως δίνει το ζητούμενο αφού το D είναι γνωστό σημείο πάνω στη BC, άρα τα μήκη DB, DC τα γνωρίζουμε.