Το σύστημα Αυτόματης Απόδειξης Γεωμετρικών Θεωρημάτων

Ζήνων Λυγάτσικας
ΠΠ ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής
e-mail: zenon7@otenet.gr
ή zenonlig@sch.gr
ή zligatsikas@gmail.com
http://blogs.sch.gr/zenonlig/

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα Συστήματα Αυτόματης Απόδειξης θεωρημάτων στην Γεωμετρία δημιουργήθηκαν μέσα στην δεκαετία του 80. Μέχρι σήμερα έχουν μια διακριτική παρουσία στα εκπαιδευτικά δρώμενα. Αν και η πρόσβαση στα περισσότερα είναι ελεύθερη και έχουν ήδη αναπτυχθεί εφαρμογές σε διάφορα ερευνητικά εργαστήρια με θεαματικά αποτελέσματα, δεν έχουν τύχη της προσοχής των καθηγητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι αιτίες είναι πολλές. Πρώτον, η υποχώρηση από την βασική εκπαίδευση του ρόλου της Μαθηματικής Απόδειξης εν μέρει στην Άλγεβρα και πρωτίστως στην Γεωμετρία, μέχρι πρότινος τουλάχιστον. Δεύτερον, η «υποβάθμιση» του ρόλου της Μαθηματικής Επιστήμης στην εκπαίδευση σαν υποστηρικτικό εργαλείο μιας ασαφούς εμπειρικής διεπιστημονικότητας σε βάρος της Μαθηματικής αυστηρότητας. Τρίτον, η ελλειμματική παιδεία των νέων καθηγητών στον κλάδο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και αυτό σε διεθνές επίπεδο και τέταρτο, οι αυξημένες μαθηματικές απαιτήσεις στον έλεγχο και στην παραγωγή των αποτελεσμάτων που διαχειρίζεται ένα σύστημα αυτόματης απόδειξης.
Αντίθετα, στην μαθηματική έρευνα η διαδικασία μηχανοποίησης μιας μαθηματικής απόδειξης (και ιδιαίτερα των γεωμετρικών προτάσεων) βελτιστοποιείται και εξελίσσεται σε τέτοιο βαθμό που αναπροσαρμόζει και αναθεωρεί πολλές βασικές μαθηματικές διεργασίες[1]. Φαίνεται ότι οι εξελίξεις αυτές, θα επηρεάσουν στις επόμενες δεκαετίες το syllabus της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε διεθνές επίπεδο. Η εκπαίδευση αιχμής[2] χαμηλού κόστους είναι το ζητούμενο για τις

[1]

1. **Horgan, J.** (1993). *The Death of Proof,* Scientific American Oct. 1993, pp. 93.
2. **INRIA-MICROSOFT** *στο:* http://www.msr-inria.com/news/the-formalization-of-the-odd-order-theorem-has-been-completed-the-20-septembre-2012/
3. **Delvin K. (2010).** *What is Experimental Mathematics*? in The Best writing on Mathematics Ed. Mircea Pitici, pp. 32-36.

[2] *Mathematics Education with Technology* – Experiences in Europe, The project InnoMathEd, 2010 Univ. of Augsburg, Germany, Tamara Bianco, Volker Ulm ed.

αυριανές σύγχρονες κοινωνίες με στόχο την καινοτομία και την ανάπτυξη δεξιοτήτων. Αυτό όμως θα σήμανει την επαναφορά της «καθαρής» μαθηματικής παιδείας, δηλαδή μιας παιδείας όπου η αποδεικτική διαδικασία, ο μαθηματικός πειραματισμός, θα εξασφαλίζουν την ποιότητα της καινοτομίας, όπως αποδεικνύει η «*γαλλική περίπτωση*» την τελευταία δεκαετία. Το σενάριο θα το συναντήσουμε μοιραία κάπου στο απώτερο μέλλον, ελπίζω, και στα δικά μας αναλυτικά προγράμματα[3].
Εδώ θα τολμήσουμε, για πρώτη φορά, να σχεδιάσουμε δραστηριότητες με τα συστήματα της ΣΑΑ χωρίς να προσανατολιζόμαστε στους στόχους του υπάρχοντος αναλυτικού προγράμματος της δεκαετίας του 70-80. Πως θα μπορούσαμε άλλωστε!
Επίσης, θα δούμε πως μπορούμε να οργανώσουμε το καθημερινό μας μάθημα εμπλουτίζοντάς το με κάποια αποτελέσματα, όπου είναι εφικτό, των λογισμικών αυτόματης απόδειξης.

Συστήματα Συμβολικού Υπολογισμού και Δυναμικής Γεωμετρίας (1η Ωρα)

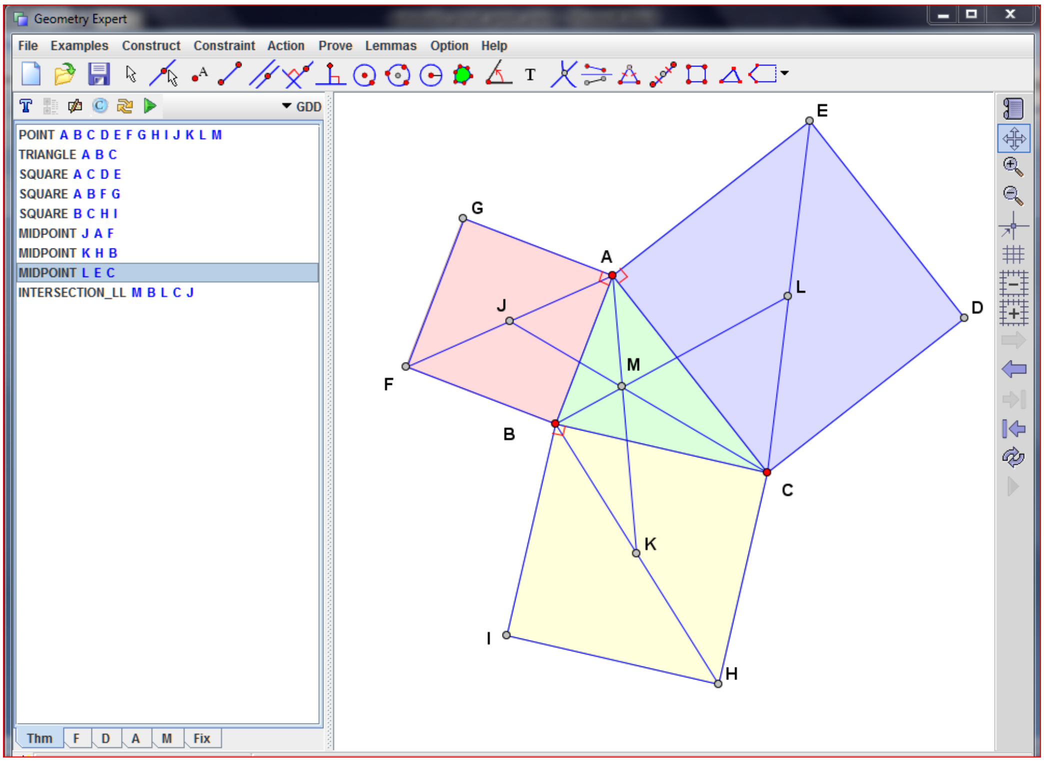
Τα Συστήματα Αυτόματης Απόδειξης (ΣΑΑ) στηρίχθηκαν στα πρώτα τους βήματα πάνω στα Συστήματα Συμβολικού Υπολογισμού (ΣΣΥ). Τι είναι όμως τα ΣΣΥ; Στην χώρα μας εισήχθησαν στην επιστημονική κοινότητα στην δεκαετία του '90, αφού είχαν ήδη περατώσει την βασική πορεία εξέλιξης τους. Στην επιμόρφωση Α και Β επιπέδου των εκπαιδευτικών που ήδη «τρέχει», αγνοούνται!
Για να γίνουν περισσότερο φιλικά σε ένα ευρύτερο κοινό, τα ΣΑΑ, υιοθέτησαν κάποιες βολικές γραφικές δυνατότητες και την διαδραστικότητα των Συστημάτων Δυναμικής Γεωμετρίας (ΣΔΓ) τα οποία όμως είχαν αναπτυχθεί με ένα διαφορετικό σκεπτικό ή καλύτερα χωρίς κανένα μαθηματικό σκεπτικό. Δεν είναι όμως ΣΔΓ και ούτε λειτουργούν σαν τέτοια. Δεν υπάρχουν ad hoc διαδικασίες και έχουν μια περισσότερο συνεκτική μαθηματική πιστότητα.
Για το ευρύ κοινό τα ΣΔΓ είναι υπερεκτιμημένα. Πλήρως αγνοημένα από την Μαθηματική έρευνα και παραγωγή, υιοθετήθηκαν με μεγάλη ευκολία από τους εκπαιδευτικούς κύκλους της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε όλο τον κόσμο. Έχουν όμως μαθηματική πιστοποίηση; Παράγουν μαθηματικά αντικείμενα; Ποια είναι τα όριά τους;

Περιγραφή του Java Geometry Expert (GeX) (2η Ωρα)

Το Java Geometry Expert είναι ένα Σύστημα Αυτόματης Απόδειξης που δημιουργήθηκε ουσιαστικά από μαθητές του Wu W. T. (ο Κινέζος δημιουργός της πρώτης μεθόδου αυτοματοποίησης γεωμετρικών αποδείξεων). Είναι το αποτέλεσμα γενικευμένων αλγορίθμων και δημιουργήθηκε, από περιέργεια (!), στο περιθώριο της προσπάθειας ερευνητών του κλάδου να δοκιμάσουν την έκταση της ανακάλυψης των αλγορίθμων που δικαίωναν το «καταρρακωμένο» από τον Gödel

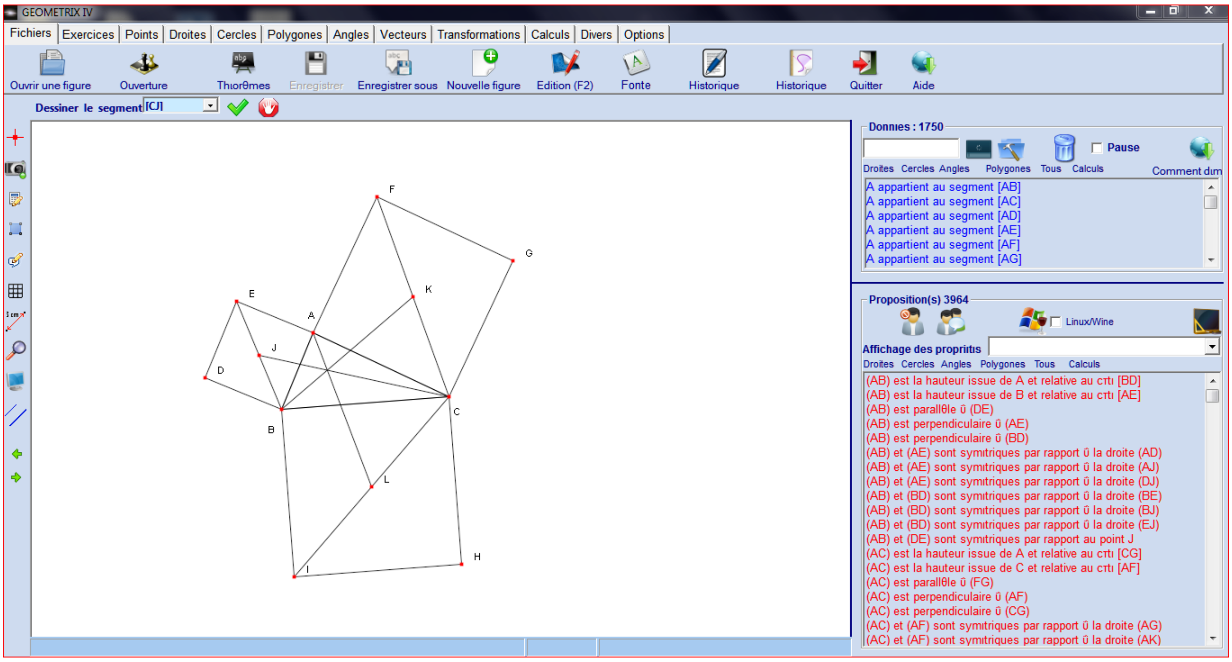
[3] Lin F-L., Hsieh F-J., Hanna G., de Villiers M. : Proceedings of the ICMI Study 19 conference Proof and Proving in Mathematics, The Department of Maths, Univ. Taipei, Taiwan 2009 και 2012 ed. Springer.

πρόγραμμα μηχανοποίησης των μαθηματικών του Hilbert. Το σύστημα είναι το ισχυρότερο από όλα όσα έχουν δημιουργηθεί μέχρι σήμερα, χρησιμοποιεί 4 διαφορετικές μεθόδους απόδειξης, και έχει στο ενεργητικό του μια σειρά από νέα θεωρήματα στην Γεωμετρία. Δεν είναι το καταλληλότερο για την δευτεροβάθμια εκπαίδευση, αν και χρησιμοποιείται στην Κίνα στις προπονήσεις των Ολυμπιακών ομάδων με μία άγνωστη στη δύση εκδοχή που φέρει το όνομα MMP. Για την περίπτωσή μας θα προτείναμε το GEOMETRIX (Γαλλικό), αλλά η τελευταία εκδοχή, που είναι και πλέον εύχρηστη, ήρθε στα χέρια μας μόλις την άνοιξη του 2014 και δεν έχουμε εφαρμογές σε διδακτικό περιβάλλον μέχρι σήμερα.
Θα χρησιμοποιήσουμε μόνο την μέθοδο απόδειξης «GDD» του GeX, η οποία είναι η κλασική επαγωγική μέθοδο του Ευκλείδη.
Το σύστημα έχει περισσότερες δυνατότητες από αυτές που θα παρουσιάσουμε εμείς. Θα περιοριστούμε όμως σε αυτές που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σχετικά εύκολα από ένα καλά εκπαιδευμένο αριθμό μαθητών. Αν και ανοίγοντας το λογισμικό βρισκόμαστε σε ένα περιβάλλον σχεδιασμού πολύ κοντά στο GeoGebra, γρήγορα θα δούμε ότι αλλάζει λειτουργία και σκοπιμότητα με την πρώτη σχεδίαση.



Εικόνα 1: Θεώρημα στο GeX

Αυτό που κάνει το σύστημα ένα πραγματικό εργαλείο μαθηματικού πειραματισμού είναι η βιβλιοθήκη των ιδιοτήτων του σχήματος. Η βιβλιοθήκη αυτή περιέχει ένα μεγάλο σύνολο ιδιοτήτων, που πολλές φορές είναι ασύληπτο για έναν μαθηματικό. Στην Εικόνα 2 βλέπετε 3964 ιδιότητες για το σχήμα που φαίνεται στο παράθυρο σχεδίασης, μερικές από αυτές είναι προφανείς. Υπάρχουν παραδείγματα ασκήσεων του σχολικού βιβλίου στα οποία το GEOMETRIX εντόπισε 19680 ιδιότητες! Ο μαθητής θα πρέπει να διαχειριστεί όλο αυτό το πλήθος ιδιοτήτων ώστε να μπορέσει να γενικεύσει και να πειραματισθεί δημιουργώντας νέους ισχυρισμούς και προτάσεις.



Εικόνα 2 Το GEOMETRIX παραδίδει στον χρήστη 3964 ιδιότητες και χαρακτηριστικά της κατασκευής.

Ένα Σενάριο γενίκευσης και πειραματισμού (3η Ωρα)

Προηγούμενες μελέτες σχετικά με την χρήση των ΣΔΓ έχουν εντοπίσει σημαντικά ζητήματα σχετικά με την χρήση των πόρων των συστημάτων στην διδασκαλία των μαθηματικών.

Το γαλλικό σχέδιο αποσκοπεί στην ανάπτυξη της χρήσης της δυναμικής γεωμετρίας με την βοήθεια μαθημάτων-σεναρίων τα οποία τελειοποιούνται συνεχώς μέσα από ένα συνεχή διάλογο ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς και τους προγραμματιστές των λογισμικών. Αν και ο σχέδιο αυτό έδωσε το έναυσμα για πιο φιλόδοξα σενάρια δεν λέει τίποτα για το μαθηματικό περιεχόμενο ενός προβλήματος ούτε για την διαδραστική οργάνωσή του (όπως είδαμε στα αντιπαραδείγματα γ. τόπων) καθώς και τον διερευνητικό προσανατολισμό του (παρά τις προσπάθειες προσαρμογής ενός στοιχειώδους συστήματος συμβολικού υπολογισμού όπως στο GeoGebra). Εύκολα δε, εξελίσσεται σε μια στοχευμένη εκμάθηση του software και των αδυναμιών του παρά σε μια μαθηματική παιδεία που είναι εν πάση περιπτώσει το ζητούμενο.

Από την άλλη μεριά το αγγλοσαξονικό μοντέλο υποστήριξε την χρήση των ΤΠΕ για να πριμοδοτήσει την καθοδηγούμενη ανακάλυψη μέσα από μια σειρά διαφορετικών παιδαγωγικών προσεγγίσεων. Αυτό οδήγησε σε προσωπικές

επιλογές τους καθηγητές, αφού έβλεπαν διαφορετικά τους παιδαγωγικούς προσανατολισμούς και την δυνατότητα ανάπτυξης της κριτικής σκέψης των μαθητών κυρίως μέσα από μαθηματικές αποκλίσεις. Αρνητικό αποτέλεσμα αυτής της δυσαρμονίας, είναι μια σειρά εκθέσεων σχετικές με την λειτουργικότητα της δυναμικής γεωμετρίας στο σχολικό περιβάλλον εστιάζοντας ιδιάιτερα στις εμφανείς ανωμαλίες του λογισμικού οι οποίες θεωρήθηκαν σαν ευκαιρίες ανάπτυξης της κριτικής σκέψης και ενίσχυσης της μαθηματικής κατανόησης.
Αλλά πιο είναι το συστατικό της μαθηματικής παιδείας στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση που μπορεί να εμφυτευθεί και να ολοκληρωθεί στη τριτοβάθμια εκπαίδευση; Είναι η ad hoc διαμόρφωση προβλημάτων δυναμικού χαρακτήρα ή οι στοχευμένες καθοδηγούμενες ανακαλύψεις;
Τίποτα δεν μπορεί να αντικαταστήσει την αισθητική και την αμεσότητα της μαθηματικής απόδειξης, όταν μιλάμε για την μαθηματική επιστήμη ή ακόμα και για επιστήμη γενικότερα. Αυτό θα προσπαθήσουμε να διαχειριστούμε την βοήθεια των ΣΑΑ.
Η βασική μας ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε τα ΣΑΑ σε ένα είδος μαθηματικού πειραματισμού, αξιοποιώντας τις παρακάτω δυνατότητες που μας παρέχουν τα λογισμικά αυτά:

1. Την δυνατότητα απόκτησης διορατικότητας και διαίσθησης.
2. Την δημιουργία τράπεζας αποτελούμενη από τις υποκρύπτουσες μαθηματικές ιδιότητες των γραφικών απεικονίσεων.
3. Την δυνατότητα δοκιμής και επαλήθευσης εικασιών.
4. Την εξερεύνηση ενός αποτελέσματος για να δούμε αν αξίζει τον κόπο μια απόδειξη.
5. Να υποδεικνύουν προσεγγίσεις για την αυθεντική μαθηματική απόδειξη.
6. Να αντικαταστήσουμε πολύπλοκες πράξεις με αποτελέσματα που εξάγονται από υπολογιστή.
7. Να επιβεβαιώνουμε αναλυτικά παραγόμενα αποτελέσματα.
8. Να μοντελοποιούμε αλγεβρικοποιώντας γεωμετρικές καταστάσεις.

Θα προτείνουμε δύο είδη δραστηριοτήτων: η πρώτη στοχεύει στην ανίχνευση κατάλληλων παραμέτρων για γενικεύσεις και η δεύτερη σε αλγεβρικοποιήσεις γεωμετρικών προτάσεων στην πλέον αφηρημένη τους μορφή.
Και στις δύο περιπτώσεις οι μαθητές είναι υποχρεωμένοι να παρουσιάσουν μια τελική εργασία με τα ακόλουθα μέρη:

1. Εισαγωγή στο πρόβλημα
2. Περιγραφή του προβλήματος με ένα σύστημα δυναμικής γεωμετρίας
3. Λύση του προβλήματος με μια κλασική μέθοδο
4. Αυτόματη λύση με ένα ΣΑΑ
5. Αλγεβρική λύση του προβλήματος (αν είναι δυνατόν με τις αποκτηθείσες γνώσεις)
6. Κατανόηση της γεωμετρικής σημασίας μιας αλγεβρικής εξίσωσης
7. Συγγραφή και εκτύπωση της εργασίας

Τέλος, θα δούμε πως θα μπορούσαμε άμεσα να χησιμοποιήσουμε τα συστήματα αυτά στην τάξη στην διαχείρηση των ασκήσεων.

Βιβλιογραφία

Δίνουμε σχεδόν μια πλήρη βιβλιογραφία πάνω στην Αυτοματοποίηση των Αποδείξεων στην Γεωμετρία.

1. **Abanades M.A., Botana F., Montes A., Recio T. :** An algebraic taxonomy for locus computation in dynamic geometry, Cpmputer Aided Design 56 (2014) pp. 22-33.
2. **ACDCA** Austrian Center for Didactics of Computer Algebra: http://www.acdca.ac.at/
3. **Arzarello F, Olivero F., Paola D, Robutti O. A.**: Cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. ZDM, Zentralbl Didakt Math 2002; 34(3): 66–72. http://dx.doi.org/10.1007/BF02655708.
4. **Atiyah, M. et. al.:** (1994). *Responses to "Theoretical Mathematics"*, Bull. Amer.Math. Soc. 30, 178 – 207.
5. **Avigad, J.:** (2008), *Computers in mathematical inquiry*, in P. Mancosu (ed.), The Philosophy of Mathematical Practice, Oxford University Press, Oxford etc., chapter 11, pp. 302–316.
6. **Bailey D. H., Borwein J.M., Kapoor V. and Weisstein E. W. :** (2006), *Ten Problems in Experimental Mathematics*, The American Mathematical Monthly Vol. 113, No. 6 (Jun. - Jul., 2006), pp. 481-509 Article Stable URL: http://www.jstor.org/stable/27641975
7. **Bailey, D. H., Borwein, J. M. and Girgensohn**, R. (1994), *Experimental evaluation of Euler sums*, Experimental Mathematics 3(1), 17–30.
8. **Bates D.J., Hauenstein J.D., Sommese A.J., Wampler C.W.:** Numerically solving polynomial systems with Bertini, vol. 25. SIAM; 2013.
9. **Borwein, J. and Bailey, D.**: (2004), *Mathematics by Experiment:* Plausible Reasoning in the 21st Century, A K Peters, Natick (MA).
10. **Borwein, J. and Bailey, D**.: (2005), *Experimental Mathematics: Examples, Methods and Implications*, NOTICES OF THE AMS. VOLUME 52 number 2.
11. **Borwein, J., Borwein, P.,** Girgensohn, R. and Parnes, S. (1996), Making sense of experimental mathematics, The mathematical intelligencer 18(4), 12–18.
12. **Botana F, Abanades M, Escribano J**.: Exact internet accessible computation of paths of points in planar linkages and diagrams. Comput Appl Eng Educ 2011; 19:835–41.
13. **Botana F, Valcarce J.L.:** A software tool for the investigation of plane loci. Math Comput Simul 2003; 61(2):139–52.
14. **Botana F.** On the parametric representation of dynamic geometry constructions. In: Murgante B, Gervasi O, Iglesias A, Taniar D, Apduhan B, editors. Computational science and its applications—ICCSA 2011. Lecture notes in computer science, vol. 6785. Berlin (Heidelberg): Springer; 2011. p. 342–52. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-21898-9_30.
15. **Botana F.:** Interactive versus symbolic approaches to plane loci generation in dynamic geometry environments. In: Sloot PM, Hoekstra A, Tan CK, Dongarra JJ, editors. Computational science—ICCS 2002. Lecture notes in computer science, vol. 2330. Berlin (Heidelberg): Springer; 2002. p. 211–8. http://dx.doi.org/10.1007/3-540-46080-2-22
16. **Breton de Champ, Paul Emile** (1864) *Description Des Courbes A Plusieurs Centres D'Apres Le Procede De Perronet* (1846) (French Edition), Kessinger Publishing, LLC (September 10, 2010).
17. **Buchberger, B.** (1992). *Teaching Math by Software.* Paper of the RISC Institute (Research Institute for Symbolic Computation); University of Linz.
18. **Buchberger B., Collins G.E., Kutzler B**.: Algebraic methods for geometric reasoning, Annual review of computer science (1988).
19. **Buchberger B.:** Bruno Buchberger's Ph.D. thesis 1965: an algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal. J

Symbolic Comput 2006; 41(3–4):475–511. http://dx.doi.org/10.1016/j.jsc.2005.09.007. (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0747717105001483).

20. **Buchberger B.:** Grobner bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory. In: Bose NK, editor. Multidimensional systems theory. Dordrecht (Netherlands): Reidel; 1985. p. 184–232. [Chapter] Grobner bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory.
21. **Buchberger, B.** (2002). (Research Institute for Symbolic Computation, University of Linz,Austria): *Logic, Mathematics, Computer Science: Interactions*, Talk at LMCS 2002. Castle of Hagenberg, October 2002.
22. **Chou S.-C., Gao X**.: Ritt-Wu decomposition algorithm and geometry theorem proving (1989).
23. **Chou S.-C., Gao X.-S., Zhang J.-Z**.: Deductive Database Approach to Automated Geometry Theorem Proving and Discovering. Journal of Automated Reasoning 25: 219-246, 2000.
24. **Chou S.-C., Schelter W.F**.: Proving geometry theorems with rewrite rules. Journal of automated Reasoning #2 (1986).
25. **Chou S.C.:** Mechanical geometry theorem proving. Dordrecht, Netherlands: D. Reidel Publishing Company; 1988.
26. **Chou S.C.:** Proving elementary geometry theorems using Wu's algorithm. In: Bledsoe WW, Loveland DW, editors. Automated theorem proving: after 25 years. Contemporary mathematics, vol. 29. American Mathematical Society; 1984. p. 243–86.
27. **Chou, S. C., Gao, X. S. and Zhang, J. Z**.: Machine Proofs in Geometry, World Scientific, 1994.
28. **Chou, S.-C., X.-S. Gao and J.-Z. Zhang**, Automated generation of readable proofs with geometric invariants, II. Theorem proving with full-angles, Journal of Automated Reasoning 17 (1996), pp. 349 -370.
29. **Coelho, H. and Pereira, L.M.**: Automated reasoning in geometry theorem proving with prolog, J. Automated Reasoning 2 (1986), 329-390.
30. **Coq:** URL http://coq.inria.fr/
31. **Cox D., Little J., O'Shea D.:** Ideals, Varieties and Algorithms, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer - Verlag, 1991.
32. **Delvin K. (2010).** What is Experimental Mathematics? in The Best writing on Mathematics Ed. Mircea Pitici, pp. 32-36.
33. **Escribano J., Botana F., Abanades M.A.:** Adding remote computational capabilities to dynamic geometry systems. Math Comput Simul 2010;80:1177–84.
34. **Gallaire, H., Minker, J. and Nicola, J. M.**: Logic and databases: A deductive approach, ACM Comput. Surveys 16(2) (1984), 153-185.
35. **Gallo G., Mishra B.:** Efficient algorithms and bounds for Wu- Ritt characteristics sets. Robotics research - Technical Repport - New York University - Courant institute of mathematical science (1989).
36. **Gallo G., Mishra B.:** Wu-Ritt characteristic sets . in DIMACS Series in discrete mathematics and theretical computer science Vol. 6 (1987).
37. **Gao X.:** Transcendental functions and mechanical theorem proving in elementary geometries. Mathematics-mechanization Research preprints # 2 (1987).
38. **Gao X.S.** : Automated geometry diagram construction and engineering geometry. In: Gao XS, Wang D, Yang L, editors. ADG 1998. Lecture notes in artificial intelligence, vol. 1669. Heidelberg: Springer; 1999. p. 232–57.
39. **GeoProof:** URL: http://home.gna.org/geoproof/
40. **GeoGebra:** GSoC. URL: http://www.geogebra.org/trac/wiki/LocusLineEquation.
41. **GeoGebra:** [Last accessed February 2014] http://www.geogebra.org
42. **GEOMETRIX**: URL: http://geometrix.free.fr/site/logiciels.php
43. **Gerhauser M., Wassermann A.:** Automatic calculation of plane loci using Grobner bases and integration into a dynamic geometry system. In: Schreck P, Narboux J, Richter-

Gebert J, editors. Automated deduction in geometry. Lecture notes in computer science, vol. 6877. Berlin (Heidelberg): Springer; 2011. p. 68–77. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-25070-5_4.
44. **Gerlentner, H., Hanson, J. R. and Loveland, D. W.**: Empirical explorations of the geometry theorem proving machine, in Proc. West. Joint Computer Conf., 1960, pp. 143-147.
45. **Gonthier Georges** (2008). Formal Proof – The Four Color Theorem http://www.ams.org/notices/200811/tx081101382p.pdf
46. **Green, Ben .** Tao, Terence (2008). *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions.* Ann. of Math. (2) 167, no 2, 481-547.
47. **Grothendieck A, Dieudonne J.:** Elements de geometrie algebrique. Le langage des schemes. Vol. 166. Springer-Verlag; 1971.
48. **Hales Thomas** (2008). Formal Proof στο http://www.ams.org/notices/200811/tx081101370p.pdf
49. **Harrison J.** (2008**).** *Formal Proof* – Theory and Practice στο http://www.ams.org/notices/200811/tx081101395p.pdf
50. **Havel, T.**: The use of distance as coordinates in computer-aided proofs of theorems in Euclidean geometry, IMA Preprint, No. 389, University of Minnesota, 1988.
51. **Hong-Bo, Li and Minteh, Cheng**: Clifford algebraic reduction method for automated theorem proving in differential geometry, J. Automated Reasoning 21(1) (1998), 1-21.
52. **Horgan, J.** (1993). The Death of Proof, Scientific American Oct. 1993, pp. 93.
53. **Interoperable interactive Geometry for Europe, Project I2G:** http://i2geo.net/
54. **Jackiw N.:** The geometer's sketchpad v 4.0. Key Curriculum Press; 2002.
55. **Java Geometry Expert**. http://www.cs.wichita.edu/~ye/ [Last accessed February 2014].
56. **Kapur D**.: Geometry theorem proving using Hilbert's Nullstellensatz. In: Char BW, editor. SYMSAC'86: proceedings of the fifth ACM symposium on symbolic and algebraic computation. New York (NY, USA): ACM Press; 1986. p. 202–8.
57. **Kapur D.:** Using Grobner bases to reason about geometry problems. J Symbolic Comput 1986;2(4):399–408.
58. **Kapur, D**.: Geometry theorem proving using Hilbert's nullstellensatz, in Proc. SYMSAC '86, Waterloo, 1986, pp. 202-208.
59. **Koedinger, K. R. and Anderson, J. R**.: Abstract planning and perceptual chunks: Elements of expertise in geometry, Cognitive Science 14 (1990), 511-550.
60. **Kortenkamp U, Richter-Gebert J.:** Using automatic theorem proving to improve the usability of geometry software, in: Proceedings of the mathematical user interfaces workshop, vol. 2004. 2004.
61. **Kortenkamp U.:** Foundations of dynamic geometry (Ph.D. thesis). Zurich: Swiss Federal Institute of Technology; 1999.
62. **Kutzler B., Stifter S.W** Automated geometry theorem proving using Buchberger's algorithm. In: Char BW, editor. SYMSAC'86: proceedings of the fifth ACM symposium on symbolic and algebraic computation. New York (NY, USA):ACM Press; 1986. p. 209–14.
63. **Laborde J.M., Bellemain F**.: Cabri geometry II. Dallas: Texas Instruments; 1998.
64. **Laborde, C.** (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 283-317. http://dx.doi.org/10.1023/A:1013309728825.
65. **Lebmeir P, Richter-Gebert J**.: Recognition of computationally constructed loci. In: Botana F, Recio T, editors. Automated deduction in geometry. Lecture notes in computer science, vol. 4869. Berlin (Heidelberg): Springer; 2007. p. 52–67. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-77356-6_4.
66. **Locus Prototype,** 2012 http://webs.uvigo.es/fbotana/LocusGC/.

67. **Losada R, Recio T, Valcarce JL**. On the automatic discovery of Steiner–Lehmus generalizations, in: Richter - Gebert J., Schrek P, editors. Proceedings of ADG’2010, Mónchen. 2010. p. 171–4.
68. **Montes A, Recio T**. Generalizing the Steiner–Lehmus theorem using the Grobner cover. Math Comput Simul 2014; [in press] URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.matcom.2013.06.006.
69. **Montes A., Wibmer M.:** Grobner bases for polynomial systems with parameters. J Symbolic Computation 2010;45:1391–425.
70. **Nevins, A. J.:** Plane geometry theorem proving using forward chaining, Artif. Intell. 6 (1975), 1-23.
71. **Pech, P**. (2005). Classical versus computer algebra methods in elementary geometry. Int. Journal of Technology in Mathematics Education 12, 137-148.
72. **Pech, P.** (2007). Selected topics in geometry with classical vs. computer proving. Singapore: World Scientific.
73. **Recio T., Vılez M.P**.Q Automatic discovery of theorems in elementary geometry. J Automat Reason 1999;23:63–82.
74. **Recio, T., Vélez, M. P. (1998).** Automatic Discovery of Theorems in Elementary Geometry. J. Automat. Reasoning, 12, 1-22.
75. **Reiter, R.:** A semantically guided deductive system for automatic theorem proving, IEEE Trans. on Computers C-25(4) (1976), 328-334.
76. **Richter-Gebert J, Kortenkamp U.:** The interactive geometry software Cinderella. Berlin: Springer; 1999.
77. **Ritt J.F.:** Differential Algebra, Amer. Mat. Soc., New York, (1950).
78. **Roanes-Macvas E, Roanes-Lozano E**.: Automatic determination of geometric loci. 3D-extension of Simson–Steiner theorem. In: Campbell J, Roanes- Lozano E, editors. Artificial intelligence and symbolic computation. Lecture notes in computer science, vol. 1930. Berlin (Heidelberg): Springer; 2001. p. 157–73. http://dx.doi.org/10.1007/3-540-44990-6_12.
79. **Roanes-Macvas E, Roanes-Lozano E**.: Bïsqueda automαtica de lugares geometricos. Bol Soc Puig Adam 1999;53:67–77.
80. **Ruthven, K., Hennessy, S., & Deaney, R.** (2008). Constructions of dynamic geometry: a study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. Computers & Education, 51(1), 297-317. http://dx.doi.org/10.1016/j.compedu.2007.05.013.
81. **Sage:** Sage cell server [Last accessed February 2014]. URL: https://github.com/sagemath/sagecell.
82. **Schumann H**.: A dynamic approach to simple algebraic curves. ZDM, Zentralbl Didakt Math 2003;35:301–16.
83. **Singular:** [Last accessed February 2014] http://www.singular.uni-kl.de/
84. **Sutherland I.E**.: Sketchpad: a man–machine graphical communication system. Tech. rep. 574. Computer Laboratory, University of Cambridge; 2003.
85. **Wang D.:** Geother: a geometry theorem prover. In: McRobbie MA, Slaney JK, editors. Automated deduction—CADE-13. Lectures notes in computer science, vol. 1104. Springer; 1996. p. 166–70.
86. **Wang, D. M**.: Reasoning about geometric problems using an elimination method, in J. Pfalzgraf and D. M. Wang (eds), Automated Practical Reasoning, Springer-Verlag, 1995, pp. 148-185.
87. **Wiedijk Freek (2008).** *Formal Proof Started* στο http://www.ams.org/notices/200811/tx081101408p.pdf.
88. **Wu W.T.:** Mechanical theorem proving in geometries. Vienna: Springer; 1994.
89. **Wu Wen-Tsun**: Basic principles of mechanical theorem proving in elementary geometries. Journal of automated reasoning # 2 (3) pp. 221-252, (1986).

90. **Wu Wen-Tsun**: On the decision problem and the mechanization of theorem-proving in elementary geometry. Scienta Sinica, 21 (1978).
91. **Wu Wen-Tsun**: Some recent advances in mechanical theorem-proving of geometries, in Automated theorem proving after 25 years-Contemporary mathematics Vol. 29-Bledsoe and Loveland editors - Denver (1984).
92. **Λυγάτσικας Ζ.**: Αυτόματες αποδείξεις με συστήματα Συμβολικού Υπολογισμού και Δυναμικής Γεωμετρίας, Πρακτικά 23ου Πανελληνίου συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Πάτρα 24-26 Νοεμβρίου 2006.
93. **Λυγάτσικας Ζ.**: Κωνικές στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, εκδ. Liberal Books, Αθήνα, 2013.
94. **Λυγάτσικας Ζ.**: Επαναπροσδιορίζοντας το ρόλο της τεχνολογίας στη μαθηματική παιδεία αιχμής, ΠΑ.Π.Ε.Δ.Ε. Έρκυνα τεύχος 1, 2014, σσ. 216-232. http://erkyna.gr/e_docs/periodiko/dimosieyseis/thet_epistimes/t01-14.pdf
95. **Λυγάτσικας Ζ.:** Αυτόματες Αποδείξεις στην Γεωμετρία με την Μέθοδο Wu, Μαθηματική Επιθεώρηση, ΕΜΕ 2014.

Μερικά άρθρα μπορείτε να τα βρείτε στον φάκελο εδώ:

https://www.dropbox.com/sh/29htcxwq32yuvas/AADkRg-E1SeYlMU_GCXIGNmqa?dl=0

Λυγάτσικας Ζήνων
ΠΕ03 – ΠΠ ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής