Επεξεργασία Γεωμετρικών Προβλημάτων με το Chinese Geometer Exp

Λυγάτσικας Ζήνων *

Ενιαίο Πειραματικό Λύκειο Βαρβακείου Σχολής

Ιούλιος-Αύγουστος, 2008

1 Εισαγωγή

Στο άρθρο αυτό θα παρουσιάσουμε ένα εν εξελίξει σύστημα δυναμικής γεωμετρίας που αναπτύσεται στην Κίνα απο την ομάδα του καθηγητή S.C. Chou. Το σύστημα είναι πολυπλοκότερο απο τα μέχρι τούδε αντίστοιχα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας και θα το τοποθετούσαμε στην κατηγορία των συστημάτων που εκτελούν αυτόματες γεωμετρικές αποδείξεις.

Μέχρι σήμερα τουλάχιστον, είναι διαθέσιμες τέσσερες διαφορετικές προσεγγίσεις σχετικά με τις αυτόματες αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων. Η πρώτη είναι η λεγόμενη *συνθετική* προσέγγιση, δες [6], [8], [11], [14] και [15], η δεύτερη είναι η *αλγεβρική* προσέγγιση που περιλαμβάνει την μέθοδο Wu και την μέθοδο της βάσης του Gröbner, δες [4], [10] και [13]. Η τρίτη προσέγγιση χρησιμοποιεί *γεωμετρικά αμετάβλητα*, όπως τη μέθοδο εμβαδού, δες [5], ή τη μέθοδο της πλήρους γωνίας, δες [3], και τη μέθοδο που περιγράφεται στα [9] και [10]. Άλλες ενδιαφέρουσες προσεγίσεις υπάρχουν στα [1], [13] και [16].

Στα τέλη της δεκαετίας του '80 αναπτύχθηκαν συστήματα δυναμικής γεωμετρίας, όπως το Cabri, με σκοπό την αντικατάσταση του κανόνα και διαβήτη στις γεωμετρικές κατασκευές. Την τελευταία δεκαετία άρχισε να καλιεργείται η ιδέα μιας νέας γενιάς συστημάτων που θα είναι συνδυασμός συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας και συστημάτων συμβολικού υπολογισμού με σκοπό όχι μόνο την εκτέλεση κατασκευών αλλά και την επίτευξη αποδείξεων γεωμετρικών προτάσεων και ισχυρισμών. Ας δούμε μια λίστα απο τέτοια συστήματα:

$Cinderella$	Χρησιμοποιεί πιθανοθεωρητική μέθοδο
$GCLC$	Αποδείξεις με την μέθοδο εμβαδού
$CeometryExplorer$	Αποδείξεις με την μέθοδο της πλήρους γωνίας χρησιμοποιώντας PROLOG

* LaTeX c:\ ... \articles\ztex\2006_07 \ polysimia \seminaire_barb.tex

ChineseGeometerExp	Αποδείξεις με: Wu μέθοδο, Gröbner bases μέθοδο, μέθοδο πλήρους γωνίας, μέθοδο εμβαδού, διανυσματική μέθοδο, συμπερασματική βάση δεδομένων (συνθετική προσέγγιση)
GeoProof	Συνδυασμός δυναμικής γεωμετρίας και μεθόδων αυτομάτων αποδείξεων

Το σύστημα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το Chinese Geometer Exp επειδή διαθέτει την πλουσιότερη βιβλιοθήκη αποδεικτικών μεθόδων αλλά και για έναν άλλο λόγο που το καθιστά μοναδικό. Πρόκειται για τη χρήση μιας βάσης, την οποία οι κατασκευαστές του την αποκαλούν Geometry Information Base, (συντ. G.I.B.). Η βάση αυτή συλλέγει πολύτιμες γεωμετρικές ιδιότητες της γεωμετρικής πρότασης που παράγοντε κατα την διάρκεια της αποδεικτικής διαδικασίας, σύμφωνα με την θεωρία της αναγωγικής βάσης που περιγράφεται στο [7]. Το όλο πακέτο Chinese Geometer Exp είναι ακόμα σε πειραματικό στάδιο[1]. Μας παραχωρήθηκε απο τον καθηγητή Zheng Ye σε πλατφόρμα Windows XP, τον Μάιο του 2008. Το Chinese Geometer Exp είναι εξέλιξη του επίσης πειραματικού λογισμικού GExp των Chou S.-C., Gao X.-S. και Zhang J.-Z., με το οποίο έχουμε πειραματισθεί επιτυχώς. Εδώ θα κάνουμε χρήση μόνο μιας εκ των δυνατοτήτων του συστήματος και αφορά φυσικά την G.I.B.. Με την βοήθεια των ιδιοτήτων που συγγεντρώνοντε στη βάση, μπορούμε να δημιουργήσουμε πληθώρα ερωτήσεων και ισχυρισμών σχετικά με γεωμετρικά προβλήματα. Όπως θα φανεί στα επόμενα, οι δυνατότητες αυτές μπορούν να επεκταθούν και σε ανακαλύψεις νέων θεωρημάτων.

Στην αρχή οφείλουμε να παρουσιάσουμε το λογισμικό και για τον λόγο αυτό διαλέξαμε τρείς πολύ γνωστές γεωμετρικές προτάσεις και ένα γεωμετρικό τόπο, για να τονίσουμε τις δυνατότητες του συστήματος που μας ενδιαφέρουν και που είναι εύκολα επαληθεύσιμες απο έναν αναγνώστη που δεν έχει οικιοποιηθεί το περιβάλλον του Chinese Geometer Exp. Στη συνέχεια επεξεργαζόμαστε ένα πρόβλημα που πρωτοδιατύπωσε η ομάδα sci.math του Harvard Univ. με επικεφαλής τον N.D. Elkies, το 1992. Το πρόβλημα αυτό λύθηκε απο τον G.A. Edgar του Ohio State Univ. στο Maple με καθαρά αλγεβρικές μεθόδους αλλά η χωρική και χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι μεγάλη. Το Chinese Geometer Exp όχι μόνο δίνει μια γρήγορη απόδειξη χρησιμοποιώντας την συνθετική προσέγγιση, αλλά φυλάσσει στη G.I.B. ιδιότητες του σχήματος που είναι νέα γεωμετρικά αποτελέσματα. Το δεύτερο πρόβλημα είναι γενικά ένα δύσκολο πρόβλημα για την μέθοδο της συμπερασματικής βάσης δεδομένων σε αντίθεση με την αλγεβρική μέθοδο του Wu. Η παραγωγή όμως της G.I.B. δίνει έναν απίστευτο αριθμό απο ιδιότητες οι οποίες μπορεί να παράγουν έναν μεγάλο αριθμό ερωτήσεων στο πρόβλημα.

Το τελευταίο πρόβλημα ξεκινά απο γνωστές προτάσεις των βιβλίων του Λυκεί-

[1]Όπως μας πληροφόρησαν οι κινέζοι συνάδελφοί μας, το σύστημα αυτό χρησιμοποιείται πιλοτικά σε μερικά σχολεία και σε ομάδες προετοιμασίας μαθηματικών διαγωνισμών.

ου και αφορά βασικά το ψευδο-ορθογώνιο τρίγωνο. Με το Chinese Geometer Exp ανακαλύψαμε νέες γεωμετρικές, αλγεβρικές και αριθμητικές ιδιότητες του ψευδο-ορθογώνιο τριγώνου τις οποίες και παραθέτουμε. Προσπαθήσαμε να επεξεργασθούμε όλες τις πτυχές του προβλήματος που ξετυλίγονται όχι μόνο απο το Chinese Geometer Exp αλλά και συνειρμικά απο την μαθηματική μας εμπειρία. Με το να τις παραθέτουμε θέλουμε απλά να δείξουμε την δημιουργικότητα που αποφέρει το σύστημα όταν εμπλακεί στην εκπαιδευτική διαδικασία.

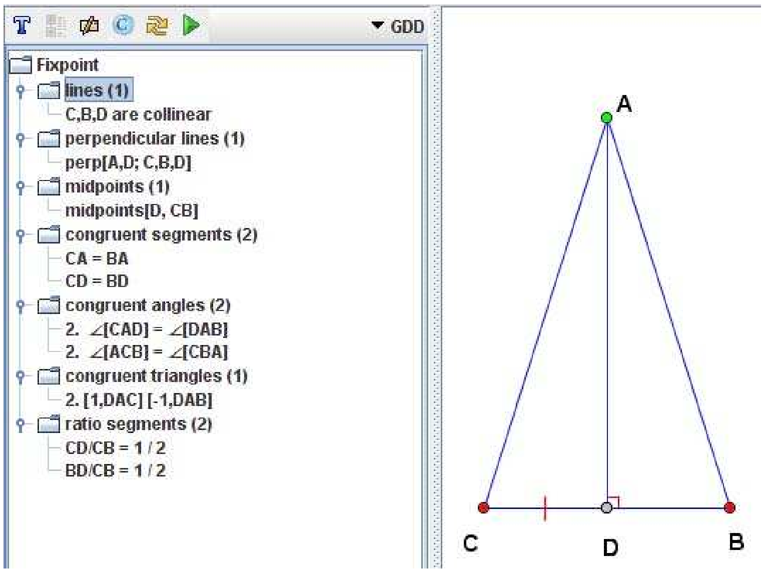
2 Παραδείγματα

2.1 Τρία γνωστά θεωρήματα και ένας γεωμ. τόπος

Ας δούμε πρώτα τρία απλά θεωρήματα με τις ιδιότητες που δημιουργούντε στη G.I.B. ταυτόχρονα με την κατασκευή του σχήματος. Φυσικά τα αποτελέσματα είναι εύκολα εξ αιτίας του στοιχειώδους των γεωμετρικών προτάσεων.

1. Η πρώτη πρόταση είναι πολύ γνωστή: *Δείξτε ότι σ'ενα ισοσκελές τρίγωνο ABC, $AB = AC$, το ύψος άπο την κορυφή A είναι και διάμεσος.*

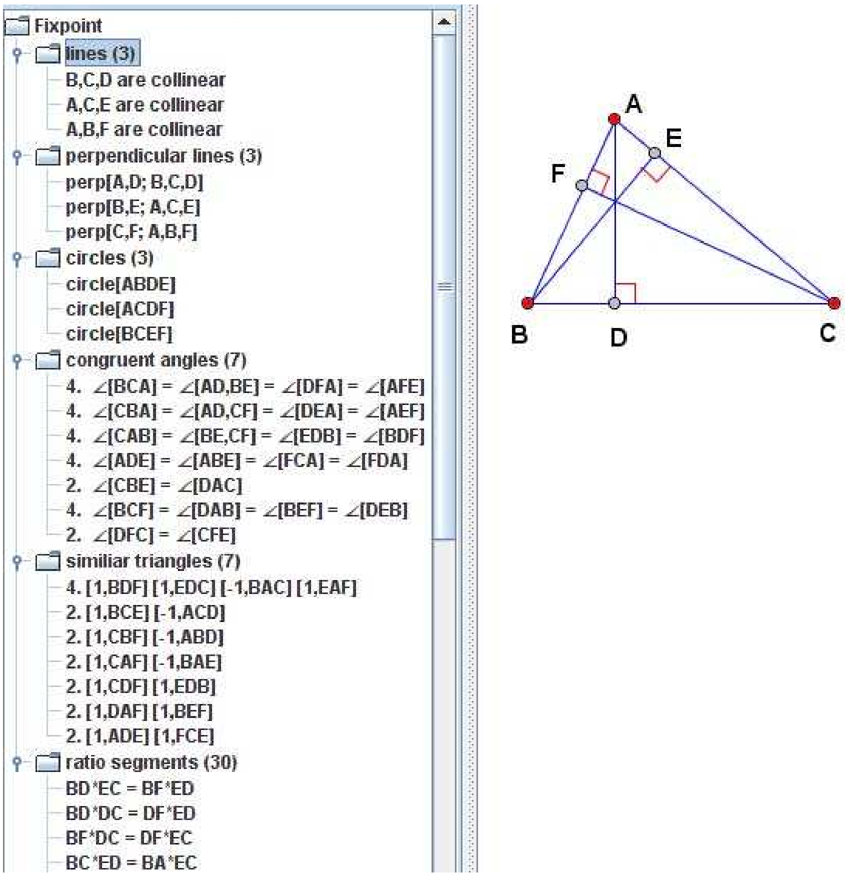
   Όπως βλέπετε στο σχήμα 1, το σύστημα ανίχνευσε όλες τις ιδιότητες του σχήματος που χαράξαμε στο περιβάλλον του. Βρήκε τα ζεύγη των ίσων γωνιών, τα ζεύγη των ίσων τριγώνων και τους λόγους των χωριζομένων ευθ. τμημάτων. Νομίζουμε ότι είναι πολύ ικανοποιητικό.



Σχήμα 1: Πρόβλημα 1.

Αν παρατηρείσετε στο αριστερό πλαίσιο όπου εμφανίζεται το περιεχόμενο της G.I.B., υπάρχουν οι ιδιότητες ταξινομημένες ανα ειδικότητα. Για παράδειγμα, στην βιβλιοθήκη με τα ίσα τρίγωνα υπάρχει ένα ζεύγος ίσων τριγώνων τα τρίγωνα DAC και DAB. Το σύστημα έχει την δυνατότητα να αποδείξει την ισότητα των τριγώνων αν ζητηθεί απο τον χρήστη.

2. Η δεύτερη πρόταση που επιλέξαμε λέει ότι: *Σε κάθε τρίγωνο τα ύψη συντρέχουν.*



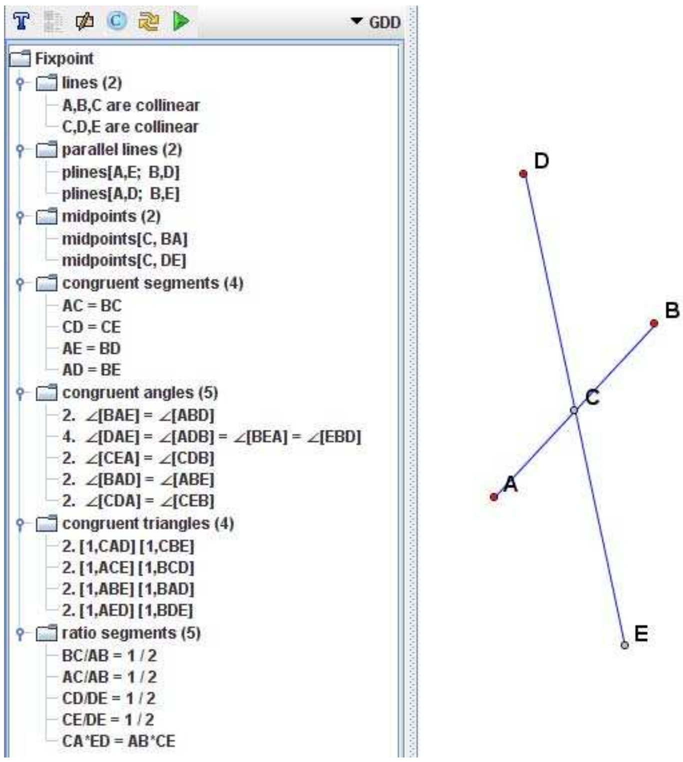
Σχήμα 2: Το ορθόκεντρο τριγώνου, στο πρόβλημα 2.

Στην περίπτωση αυτή φέραμε απλά τα τρία ύψη του τριγώνου. Το σύστημα αναγνώρισε 53 ιδιότητες της κατασκευής, δες σχήμα 2. Μεταξύ αυτών διακρίνουμε τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα που σχηματίζονται όπως και μια σειρά απο αλγεβρικές σχέσεις μεταξύ λόγων ευθ. τμημάτων ή γινομένου ευθ. τμημάτων απο τις σχηματιζόμενες δυνάμεις ως προς κύκλο. Αν προχωρήσουμε στην απόδειξη της πρότασης, αν δηλαδή υποθέσουμε ότι τα ύψη BE και CF τέμνοντε στο G τότε αποδεικνύουμε ότι η AG είναι κάθετος στο BC, το λογισμικό συλλέγει συνολικά 134 ιδιότητες που καλύπτουν ότι γενικά μπορεί να δεί ένα έμπειρο και προσεκτικό μάτι στο σχήμα. Δεν θα παραλείψουμε να σημειώσουμε εδώ ότι μέσα στον όγκο των ιδιοτήτων κρύβονται και ιδιότητες οι οποίες δεν είναι καθόλου προφανείς. Όπως για παράδειγμα τα παρακάτω γινόμενα:

$$
\begin{array}{cc}
\ldots & \ldots \\
BA \cdot CD = CA \cdot ED, & DC \cdot AE = DE \cdot AF \\
DC \cdot FE = CE \cdot AF, & DE \cdot FE = CE \cdot AE \\
BC \cdot AD = BE \cdot AC, & BE \cdot CD = CE \cdot AD \\
CB \cdot FD = CA \cdot FB, & CB \cdot BD = BA \cdot FB \\
\ldots & \ldots
\end{array}
$$

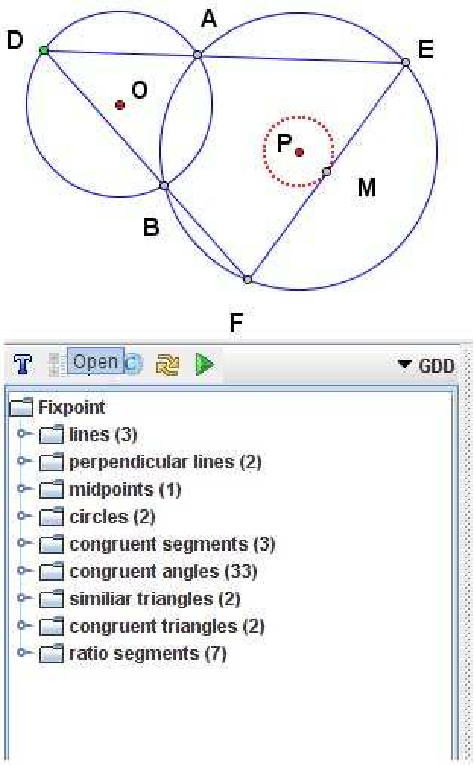
3. Η τρίτη πρόταση είναι η γνωστή ιδιότητα του παραλληλογράμμου: *Αν οι δύο διαγώνιοι τετραπλεύρου διχοτομούνται, τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο, δες σχήμα 3.*

   Στο σχήμα 3 βλέπουμε 24 ιδιότητες.



Σχήμα 3: Δύο διχοτομούμενα ευθ. τμήματα.

4. Το τέταρτο πρόβλημα είναι ένας γεωμετρικός τόπος:*Δίνονται δύο τεμνόμενοι κύκλοι με κέντρα O και P και τα κοινά τους σημεία A και B. Ένα σημείο D κινείται στον κύκλο με κέντρο το O. Να βρεθεί ο γ.τ. του μέσου M του ευθ. τμήματος FE στο σχήμα 4.*



Σχήμα 4: Ο γεωμετρικός τόπος του προβλήματος 4 και η G.I.B..

Η G.I.B., που φαίνεται στο σχήμα 4, δημιουργήθηκε και αυτή μόνο απο τις ιδιότητες του σχήματος. Ψάχνωντας στο σύνολο των ιδιοτήτων θα διαπυστώσετε ότι μπορούμε να πάρουμε όλα τα απαιτούμενα εργαλεία για την απόδειξη του κύκλου, με την διακεκομμένη περιφέρεια, σαν γεωμετρικού τόπου του σημείου M.

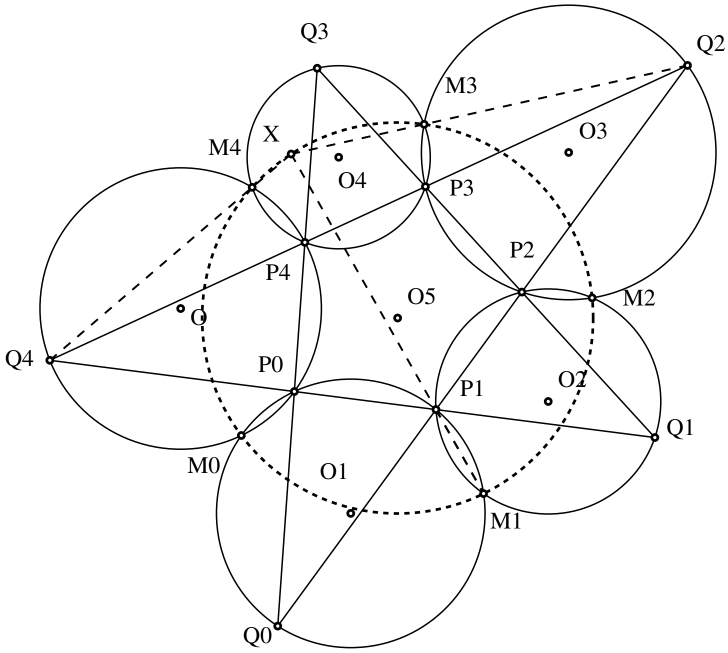
2.2 Το πρόβλημα των πέντε κύκλων

Έδω τα πράγματα δεν είναι τόσο προφανή ή εύκολα. Το πρόβλημα των πέντε κύκλων δείχνει τις δυνατότητες του σχεδιασμού του συστήματος.

Πέντε σημεία $P_0P_1P_2P_3P_4$ σχηματίζουν πεντάγωνο. Θεωρείστε τους δείκτες modulo 5 και

$$\begin{cases} Q_i = P_{i-1} \bigcap P_{i+1}P_{i+2}, \\ M_i = \text{ κύκλος } (Q_{i-1}P_{i-1}P_i) \bigcap \text{ κύκλος } (Q_iP_{i+1}P_i) \end{cases}$$

δείξτε ότι τα σημεία M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 είναι ομοκυκλικά. Δες σχήμα 5.



Σχήμα 5: Το πρόβλημα των πέντε κύκλων.

Το Chinese Geometer Exp αποδεικνύει το συμπέρασμα δημιουργόντας την G.I.B. με 301 γεωμετρικές ιδιότητες σε 0.62 sec. Ταυτόχρονα έχουμε το εξής νέο αποτέλεσμα: οι ακόλουθες δύο ομάδες συντρεχουσών ευθειών

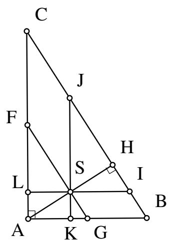
$$\left\{ \begin{array}{l} \{P_{i+1}M_{i+1}, Q_{i-1}M_{i-1}, Q_{i+2}M_{i-2}\}, \\ \{P_{i-1}M_{i-2}, P_iM_{i+1}, Q_{i-1}M_{i+2}\}, \\ i = 0, 1, 2, 3, 4. \end{array} \right.$$

τέμνονται σε δέκα σημεία που ανήκουν στον κύκλο των σημείων M_i. Έτσι, ο κύκλος δεν διέρχεται μόνο απο τα πέντε σημεία, $\{M_i\}_i$, αλλά συνολικά απο δεκαπέντε σημεία. Αυτό, απο όσο γνωρίζουμε, είναι ένα νέο αποτέλεσμα.

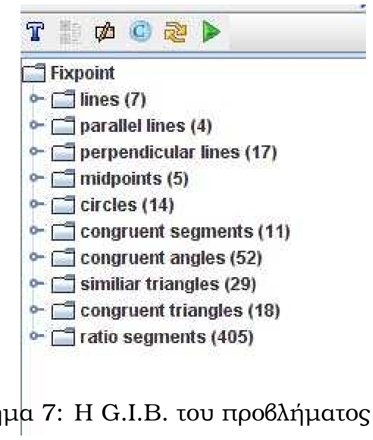
2.3 Ομοκυκλικά σημεία σε ορθογώνιο τρίγωνο

Σ'ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABC με $\widehat{A} = 90^o$, $AH \perp BC$ και S το μέσο του AH, δες σχήμα 6. $FG \| BC$, $LI \| AB$, $JK \| AC$. Τότε τα σημεία F, L, K, G, I, J είναι ομοκυκλικά.

Η G.I.B. περιέχει 562 ιδιότητες, προφανείς ή όχι, δες σχήμα 7. Συνολικά, με την αίτηση απόδειξης του συμπεράσματος, έχουμε 1326 γεωμετρικές ιδιότητες, αριθμός υπερβολικά μεγάλος.



Σχήμα 6: Ομοκυκλικά σημεία.



Σχήμα 7: Η G.I.B. του προβλήματος 2.3

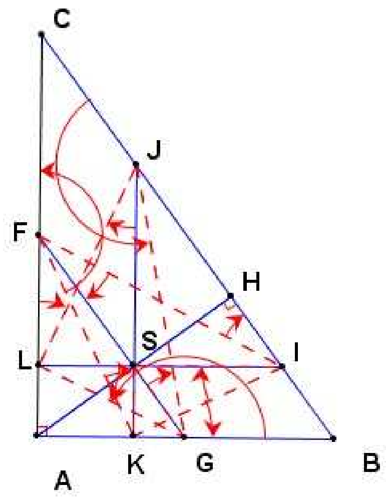
Στο σχήμα 8 βλέπουμε 19 γωνίες ίσες ή παραπληρωματικές που παρήχθησαν στην G.I.B. του Chinese Geometer Exp κατα την διάρκεια της κατασκευής.

2.4 Το ψευδο-ορθογώνιο τρίγωνο

Αφήσαμε στο τέλος την επεξεργασία ενός προβλήματος που στάθηκε η αφορμή να προσέξουμε ιδιαίτερα την *ψυχολογία* του Chinese Geometer Exp. Φυσικά δεν υπερασπίζουμε την πρωτοτυπία των αποτελεσμάτων. Μπορείτε ενδεχομένως να βρείτε στην βιβλιογραφία πιο ισχυρά μαθηματικά κίνητρα που δικαιολογούν τις επιμέρους ερωτήσεις. Αυτό όμως που θέλουμε να τονίσουμε είναι ότι το συγκεκριμένο σύστημα μπορεί να παίξει ένα ρόλο πολύ διαφορετικό απο αυτόν που μας έχουν συνηθίσει όλα τα προηγούμενα. Και κάτι άλλο, η χρήση του δεν αλλοίωσε σε τίποτα το μαθηματικό περιεχόμενο του προβλήματος, όπως συμβαίνει με τα περισσότερα συστήματα του είδους, δες [12].

Υπάρχουν δύο ασκήσεις στα βιβλία του Λυκείου με τις οποίες εισαχθήκαμε στην δραστηριότητα αυτή. Η πρώτη είναι θεώρημα στο βιβλίο της γεωμετρίας στην ύλη της Β' Λυκείου και λέει ότι:

Αν $AB\Gamma$ ένα ορθογώνιο τρίγωνο με $\widehat{A} = 90^o$ και P το ίχνος του ύψους



Σχήμα 8: 19 ίσες γωνίες της G.I.B. στο πρόβλημα 2.3.

που άγεται απο την κορυφή A, ισχύει ότι $AP^2 = BP \cdot P\Gamma$. Ισχύει το αντίστροφο; Δηλαδή, αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ με P το ίχνος του ύψους που άγεται απο την κορυφή A ισχύει $AP^2 = BP \cdot P\Gamma$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο;

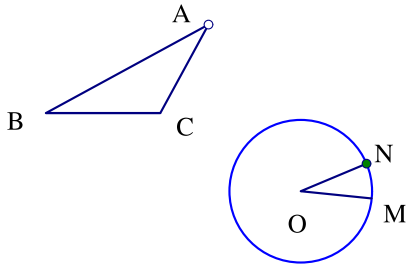
Η δεύτερη μπορεί να είναι μια άσκηση των Μαθηματικών της Κατεύθυνσης της Β' Λυκείου.

Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = \alpha^2$. Να αποδειχθεί ότι το ορθόκεντρο H του τριγώνου ABA' με $A(\alpha, 0)$, $A'(-\alpha, 0)$, $B(\alpha\sqrt{2}, \alpha)$ ανήκει στην υπερβολή. Αποδείξτε ότι για το τρίγωνο ABA' ισχύει: $|\widehat{BAA'} - \widehat{BA'A}| = 90^o$.

Το τρίγωνο του δευτέρου ερωτήματος που ικανοποιεί εν μέρει και το πρώτο πρόβλημα, έχει μια χαρακτηριστική ιδιότητα. Χάριν ευκολίας ας δώσουμε τον εξής, όχι πολύ γνωστό, ορισμό.

Ορισμός 2.1 *Λέμε ότι ένα τρίγωνο είναι ψευδο-ορθογώνιο στο A αν ισχύει $|\widehat{B}-\widehat{\Gamma}| = \frac{\pi}{2}$. Λέμε επίσης ότι είναι ψευδο-ορθογώνιο στο A με αμβλεία την $\widehat{B}$, αν $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \frac{\pi}{2}$.*

Η κατασκευή ενός ψευδο-ορθογώνιο τριγώνου σε ένα σύστημα δυναμικής γεωμετρίας είναι εύκολη. Ακολουθώντας πιστά τον ορισμό δεν έχετε παρά να κατασκευάσετε ένα κύκλο και ένα σημείο του N. Αν πάρετε δυο σημεία B και C στο επίπεδο και περιστρέψετε την BC με κέντρο το B κατά γωνία $\widehat{MON}$ και στη συνέχεια την BC κατά γωνία $\frac{\pi}{2} + \widehat{MON}$, σχηματίζεται το τρίγωνο ABC που είναι ψευδο-ορθογώνιο στο A με αμβλεία την $\widehat{C}$, δες σχήμα 9.



Σχήμα 9: Κατασκευή ψευδο-ορθογώνιο τριγώνου σε ένα σύστημα δυναμικής γεωμετρίας.

Για το επιλεγμένο λειτουργικό η κατασκευή αυτή δεν είναι συμβατή. Βασική προυπόθεση είναι ότι όλες οι προτάσεις πρέπει να είναι κατασκευαστικές. Οι κατασκευαστικές προτάσεις θα λέγαμε ότι είναι οι επεκτάσεις των θεωρημάτων καθαρής τομής του Hilbert[2] και παίζουν κεντρικό ρόλο στην θεωρία των αυτομάτων αποδείξεων.

2.4.1 Κατασκευή Ψευδο-ορθογωνίου Τριγώνου

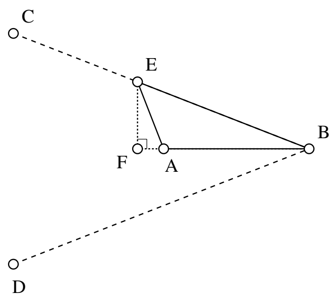
Οι δύο πρώτες κατασκευές είναι αυτές που θα χρησιμοποιήσουμε στο Chinese Geometer Exp.

1. *Αν ABE ψευδο-ορθογώνιο στο E με αμβλεία τη $\widehat{A}$ και $\widehat{B}_1$ η συμπληρωματική της $\widehat{B}$. Τότε $\widehat{A}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \widehat{B}_1$. Και αντιστρόφως: Αν $\widehat{A}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = \widehat{B}_1$, τότε το ABE είναι ψευδο-ορθογώνιο στο E με αμβλεία τη $\widehat{A}$. Κατασκευάστε ένα ψευδο-ορθογώνιο τρίγωνο σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση.*

   Για την κατασκευή του ABE ακολουθούμε τα εξής βήματα. Κατασκευάζω ένα ευθ. τμήμα AB. Έστω C τυχαίο σημείο του επιπέδου διαφορετικό των A και B. Βρίσκω το συμμετρικό του BC ως προς BA και φέρω απο το A κάθετο σάυτήν. Η τομή της καθέτου με την BC είναι η κορυφή E του ψευδο-ορθογώνιο τριγώνου, δες σχήμα 10.

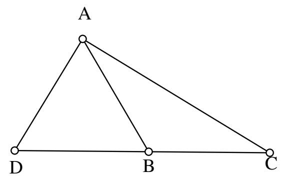
2. *Εστώ $AB\Gamma$ ψευδο-ορθογώνιο στο A με αμβλεία τη $\widehat{B}$. Έστω D το σημείο τομής του κύκλου (A, AB) με την $B\Gamma$. Προφανώς λόγω κατασκευής το σημείο D είναι διαφορετικό του B. Τότε AD είναι κάθετος στην AC. Αντιστρόφως: Έστω τρίγωνο ABC. Έστω D το σημείο τομής της καθέτου AD στην AC, με την BC. Αν $AD = AB$, τότε το τρίγωνο είναι ψευδο-ορθογώνιο στο A με αμβλεία τη $\widehat{B}$. Κατασκευάστε ένα ψευδο-ορθογώνιο τρίγωνο σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση.*

[2]Πρόκειται για τα θεωρήματα που περιγράφονται στο κλασσικό έργο του Grundlagen der Geometric του Hilbert με το όνομα pure intersection theorems. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει επίσης στο [4], §1.6, σελίδα 15, για μια πλήρη ενημέρωση.



Σχήμα 10: Κατασκευή ψευδο-ορθογώνιο τριγώνου AEB.

Η κατασκευή αυτή βοηθά στην ανακάλυψη αλγεβρικών σχέσεων στο ψευδο-ορθογώνιο τρίγωνο. Το Chinese Geometer Exp διαθέτει ένα έξυπνο εργαλείο που θα το εκμεταλευτούμε χωρίς ενδοιασμούς. Η ιδιότητα που δίνει την δεύτερη κατασκεύη είναι προφανώς το ότι η ακτίνα AD του κύκλου (A, AB) είναι κάθετη στην AC. Άρα, κατασκευάζουμε ένα τυχαίο τρίγωνο ABC, δες σχήμα 11, και την κάθετο AD στην AC. Το εργαλείο που προαναφέραμε είναι η απαίτηση να είναι $AD = AB$. Μετά το αίτημα αυτό το τρίγωνο μας είναι ψευδο-ορθογώνιο.



Σχήμα 11: Η κατασκευή 2 για τις αριθμητικές σχέσεις.

Γεωμετρικές Ιδιότητες

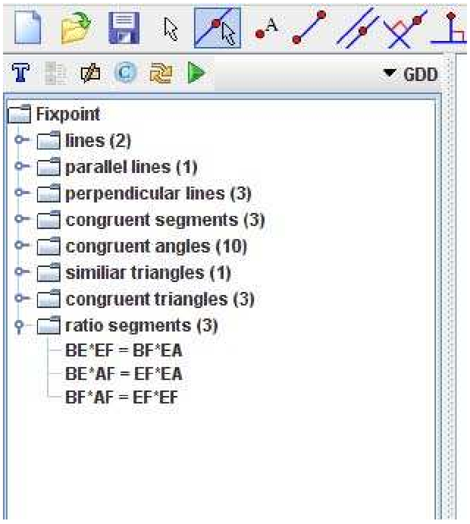
Οι παρακάτω ιδιότητες παράγοντε στην G.I.B. του Chinese Geometer Exp συγχρόνως με την κατασκευή 1.

Η δε G.I.B. περιέχει 26 ιδιότητες μεταξύ των οποίων, δες σχήμα 12:

$$BE \cdot EF = BF \cdot EA$$
$$BE \cdot AF = EF \cdot EA$$
$$BF \cdot AF = EF \cdot EF$$

Έχοντας αυτά υπ'οψιν, ας διατυπώσουμε τις πρώτες ερωτήσεις-ασκήσεις.

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και P η ορθή προβολή του A στην πλευρά $B\Gamma$.



Σχήμα 12: Οι ιδιότητες του ψευδο-ορϑογώνιο τριγώνου AEB προκύπτουν συγχρόνως με την κατασκευή του. Η βάση G.I.B. του Chinese Geometer Exp.

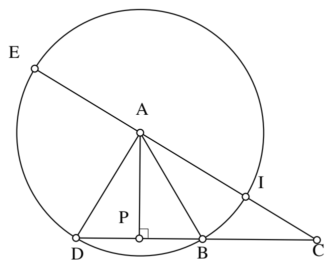
1. Αν Δ το συμμετρικό του Γ ως προς το P, τότε $\widehat{BA\Delta} = 90^o$. Και αντιστρόφως: αν $\widehat{BA\Delta} = 90^o$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ψευδο-ορϑογώνιο στο A.
2. Δείξτε ότι αν το τρίγωνο είναι είτε ορθογώνιο με κορυφή το A είτε ψευδο-ορϑογώνιο στο A τότε $AP^2 = BP \cdot P\Gamma$. Και αντιστρόφως: αν $AP^2 = BP \cdot P\Gamma$, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι είτε ορθογώνιο είτε ψευδο-ορϑογώνιο στο A.
3. Δείξτε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ψευδο-ορϑογώνιο στο A αν και μόνο αν το ορθόκεντρό του είναι το συμμετρικό του A ως προς την $B\Gamma$.
4. Έστω R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $AB\Gamma$. Να δείξετε ότι $PB + P\Gamma = 2R$ αν και μόνο αν το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στην κορυφή A ή ψευδο-ορϑογώνιο στο A.
5. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ψευδο-ορϑογώνιο στο A αν και μόνο αν η AP είναι εφαπτόμενη του περιγεγραμμένου κύκλου στο σημείο A.

Αριθμητικές Ιδιότητες των Πλευρών Ψευδο-ορθογωνίου Τριγώνου

Υποθέστε την κατασκευή 2. Στην G.I.B. βρίσκουμε την σχέση: $DC \cdot BC = CE \cdot IC$, δες σχήμα 13. Απο τη σχέση αυτή προκύπτει εύκολα ότι:

$$BC \cdot \sqrt{AB^2 + AC^2} = (AC + AE) \cdot (AC - AE)$$

Είναι δημοφιλές σήμερα να ρωτάμε πότε οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ρητοί ή ακέραιοι αριθμοί. Έτσι, προκύπτουν οι παρακάτω αριθμητικές σχέσεις οι οποίες φυσικά δεν επαληθεύοντε με το Chinese Geometer Exp. Μπορούμε όμως να



Σχήμα 13: Η κατασκευή 2 οδηγεί σε αριθμητικές σχέσεις.

χρησιμοποιήσουμε συστήματα συμβολικού υπολογισμού στην απόδειξη των υπολοίπων αριθμητικών ιδιοτήτων όπως για παράδειγμα στην απόδειξη της ιδιότητας για την παραγοντοποίηση παραστάσεων της ιδιότητας 3 στο σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

1. Έστω α, β, και γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

   (α') Υπάρχει ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ψευδο-ορθογώνιο στο A με αμβλεία την $\widehat{B}$ έτσι ώστε $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$ και $B\Gamma = \alpha$.

   (β') $\beta^2 - \gamma^2 = \alpha\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$.

   (γ') Υπάρχουν δύο πραγματικοί ϱ και θ έτσι ώστε: $\varrho > 0$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ και:

   $$(\Sigma)\ :\ \left\{\begin{array}{ccl} \alpha & = & \varrho \cdot \text{συν}\, 2\theta \\ \beta & = & \varrho \cdot \text{συν}\, \theta \\ \gamma & = & \varrho \cdot \text{ημ}\, \theta \end{array}\right. .$$

   Ποιά είναι η γεωμετρική σημασία των ϱ και θ;

   Υπόδειξη: Το ϱ είναι ίση με τη διάμετρο του περιγεγραμμένου κύκλου. Η δε γωνία θ είναι ίση με την γωνία Γ.

2. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ ψευδο-ορθογώνιο στο A με αμβλεία τη $\widehat{B}$ έτσι ώστε τα μήκη των πλευρών να είναι ρητοί αριθμοί. Έστω ϱ και θ όπως στην (Σ) 1.(γ'). Δείξτε ότι ϱ και εφ $\dfrac{\theta}{2}$ είναι ρητοί αριθμοί.

3. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ϱ, θ όπως προηγουμένως. Αν εφ $\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{p}{q}$, δείξτε ότι $0 < p < q(\sqrt{2} - 1)$ και ότι υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε:

   $$(\Lambda)\ :\ \left\{\begin{array}{ccl} \alpha & = & r(p^4 - 6p^2q^2 + q^4) \\ \beta & = & r(q^4 - p^4) \\ \gamma & = & 2pqr(p^2 + q^2) \end{array}\right. .$$

   Και αντιστρόφως: αν τα μήκη των πλευρών τριγώνου ικανοποιούν την σχέση (Λ), τότε το τρίγωνο είναι ψευδο-ορθογώνιο στο A με αμβλεία τη B και τα μήκη των πλευρών είναι ρητοί αριθμοί.

4. (α') Έστω p και q δύο θετικοί ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους. Βρείτε τον Μ.Κ.Δ. των τριών ακεραίων:

$$p^4 - 6p^2q^2 + q^4,\ q^4 - p^4,\ 2pq(p^2 + q^2)$$

   (β') Βρείτε ακεραίους $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ τέτοιοι ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ που έχει μήκη πλευρών $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$ και $B\Gamma = \alpha$, είναι ψευδο-ορθογώνιο στο A με αμβλεία τη B.

5. Να λυθεί στο $\mathbb{N}^*$ η εξίσωση: $x^2(y^2 + z^2) = (y^2 - z^2)^2$.

6. Να λυθεί στο $\mathbb{Q}^*$ η εξίσωση: $x^2(y^2 + z^2) = (y^2 - z^2)^2$.

Διάφορες γεωμετρικές ιδιότητες ενός Ψευδο-ορθογωνίου Τριγώνου

Οι παρακάτω καθαρά γεωμετρικές ιδιότητες του ψευδο-ορθογώνιο τριγώνου είναι *κρυμένες* στην G.I.B. του συστήματος. Για παράδειγμα η παρακάτω ιδιότητα 8 είναι αποτέλεσμα της Γεωμετρικής ιδιότητας 5, όπου ουσιαστικά λέει ότι η ακτίνα AO, με O το περίκεντρο, είναι παράλληλη στην $B\Gamma$.

Δείξτε ότι αν ένα τρίγωνο, $AB\Gamma$, είναι ψευδο-ορθογώνιο στο A τότε:

1. $\overrightarrow{PA}^2 = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{P\Gamma}$, όπου P η προβολή του A στην $B\Gamma$.
2. Η ΓA είναι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\Gamma O}$, O το κέντρο του περιγέγραμμένου κύκλου.
3. AO και $B\Gamma$ είναι παράλληλες μεταξύ τους.
4. Το κέντρο του κύκλου του Euler του τριγώνου $AB\Gamma$ βρίσκεται πάνω στην $B\Gamma$.
5. Οι διχοτόμοι της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ σχηματίζουν με την $B\Gamma$ γωνίες ίσες με $\pm\dfrac{\pi}{4}$.
6. $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 + 4PA^2$.
7. $|AB^2 - A\Gamma^2| = 2R \cdot B\Gamma$, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.
8. $AB^2 + A\Gamma^2 = 4R^2$.
9. $\dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{A\Gamma^2} = \dfrac{1}{AP^2}$.

Αναφορές

[1] Bulmer, M. and Fearnley-Sander, D.: *The kinds of truth of geometry theorems*, Preprint.

[2] Chou S.-C., Gao X.-S., Zhang J.-Z.: *A Deductive Database Approach to Automated Geometry Theorem Proving and Discovering.* Journal of Automated Reasoning 25: 219-246, 2000.

[3] Chou, S.-C., X.-S. Gao and J.-Z. Zhang, *Automated generation of readable proofs with geometric invariants, II. Theorem proving with full-angles*, Journal of Automated Reasoning 17 (1996), pp. 349-370.

[4] Chou, S. C.: *Mechanical Geometry Theorem Proving*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Netherlands, 1988.

[5] Chou, S. C., Gao, X. S. and Zhang, J. Z.: *Machine Proofs in Geometry*, World Scientific, 1994.

[6] Coelho, H. and Pereira, L.M.: *Automated reasoning in geometry theorem proving with prolog*, J. Automated Reasoning 2 (1986), 329-390.

[7] Gallaire, H., Minker, J. and Nicola, J. M.: *Logic and databases: A deductive approach, ACM Comput.* Surveys 16(2) (1984), 153-185.

[8] Gerlentner, H., Hanson, J. R. and Loveland, D. W.: *Empirical explorations of the geometry theorem proving machine*, in Proc. West. Joint Computer Conf., 1960, pp. 143-147.

[9] Havel, T.: *The use of distance as coordinates in computer-aided proofs of theorems in Euclidean geometry*, IMA Preprint, No. 389, University of Minnesota, 1988.

[10] Kapur, D.: *Geometry theorem proving using Hilbert's nullstellensatz*, in Proc. SYMSAC '86, Waterloo, 1986, pp. 202-208.

[11] Koedinger, K. R. and Anderson, J. R.: *Abstract planning and perceptual chunks: Elements of expertise in geometry*, Cognitive Science 14 (1990), 511-550.

[12] Λυγάτσικας Ζ.: *Αυτόματες αποδείξεις με συστήματα Συμβολικού Υπολογισμού και Δυναμικής Γεωμετρίας*, Πρακτικά 23ου Πανελληνίου συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Πάτρα 24-26 Νοεμβρίου 2006.

[13] Hong-Bo, Li and Minteh, Cheng: *Clifford algebraic reduction method for automated theorem proving in differential geometry*, J. Automated Reasoning 21(1) (1998), 1-21.

[14] Nevins, A. J.: *Plane geometry theorem proving using forward chaining*, Artif. Intell. 6 (1975), 1-23.

[15] Reiter, R.: *A semantically guided deductive system for automatic theorem proving*, IEEE Trans. on Computers C-25(4) (1976), 328-334.

[16] Wang, D. M.: *Reasoning about geometric problems using an elimination method*, in J. Pfalzgraf and D. M. Wang (eds), Automated Practical Reasoning, Springer-Verlag, 1995, pp. 148-185.