Η επίδραση της τεχνολογίας σε κάποιες Μαθηματικές δραστηριότητες

Λυγάτσικας Ζήνων *

Βαρβάκειο Πειραματικό Λύκειο

Ιανουάριος/Φεβρουάριος, 2010

1 Εισαγωγή

Μπορούμε εύκολα μελετώντας την ιστορία να αναγνωρίσουμε τον θεμελειώδη ρόλο των εργαλείων στην ανάπτυξη των μαθηματικών. Ένα τέτοιο εργαλείο, ουσιαστικά ένας κλάδος των μαθηματικών, είναι και ο υπολογιστής ο οποίος επηρέασε τον διδακτικό ρόλο και τον ρόλο στην αυτοματοποίηση και ερμηνείας των μαθηματικών. Θα δούμε στη συνέχεια αυτήν την επίδραση της τεχνολογίας σε τρείς βασικούς διδακτικούς ρόλους που είναι:

1. ο ρόλος των μαθηματικών σαν γλώσσα
2. ο ρόλος των μαθηματικών σαν τεχνική σκέψης και
3. ο ρόλος των μαθηματικών στην ανάπτυξη των δύο θεμελειωδών εννοιολογικών διαδικασιών: της αφαίρεσης (abstracting) και της συγκεκριμενοποίησης (concretising).

Με τον όρο τεχνολογία εννοούμε τη χρήση Συστημάτων Συμβολικού Υπολογισμού (ΣΣΥ), όπως είναι το Maple, Derive, Mathematica, TakeFive και όχι σχεδιαστικών δυναμικών λογισμικών όπως το GeoGebra, Cabri, EucliDraw κ.αλλ.

Πρίν μπούμε σε λεπτομέρειες είναι φρόνιμο να επισημάνουμε μια διδακτική αρχή που πρέπει να διέπει την αντίστοιχη δραστηριότητα μάθησης με τη χρήση των ΣΣΥ.

Απο την αρχή της δημιουργίας των μεγάλων αλγορίθμων, Απαλοιφής ποσοδεικτών και αλγορίθμου Gröbner, διακρίναμε μια ιδιότητα των λογισμικών που διατυπωθηκε σαν μια αρχή του Άσπρου/Μαύρου, όπως διατυπώθηκε απο τον Buchberger, δες [2], [3], [5]. Αν η μαθησιακή δραστηριότητα εξελίσεται πάνω σε διαφορετικά πεδία, το λευκό πεδίο θα είναι αυτό όπου οι διεργασίες είναι ορατές και προσβάσιμες ενώ αντίθετα όταν επισέρχεται στη διαδικασία η χρήση ενός ΣΣΥ, (πχ η εύρεση των ριζών μιας εξίσωσης $5^{ου}$ βαθμού με το Maple), τότε οι διεργασίες δεν είναι ορατές ούτε προσβάσιμες, θα λέμε τη περιοχή αυτή μαύρη περιοχή.

Στη λευκή περιοχή ο μαθητής θα οδηγηθεί απο ένα συγκεκριμένο πρόβλημα σε μια μαθηματική έννοια, έναν αλγόριθμο ή μια μαθηματική θεωρία. Οι δεξιότητες που αναπτύσοντε στο στάδιο αυτό θα πρέπει να γίνονται με το χέρι, χωρίς την χρήση υπολογιστή. Οι

*LaTeX c:\...\articlex\... 2009_2010 \ INOVATION_WITH_COMPUTER_IN_EDUCATION\ conference\paper \ paper1.tex βασικές δεξιότητες πρέπει να αυτοματοποιούντε με την εξάσκηση. Οι πιθανές δραστηριότητες σε μια λευκή περιοχή της μαθησιακής δραστηριότητας θα είναι:

1. η τυποποίηση ενός προβλήματος,
2. η διερεύνιση μιας εικασίας,
3. η ανάπτυξη μιας έννοιας,
4. η ανάπτυξη ενός αλγορίθμου,
5. η απόδειξη,
6. οι υπολογισμοί πολυάριθμων παραδειγμάτων χωρίς ΣΣΥ, πειραματική μάθηση με υπολογιστή όπου τα ΣΣΥ υποστηρίζουν μαύρες περιοχές που έχουν διερευνηθεί σε προηγούμενες λευκές φάσεις.
7. Τέλος, η παρουσίαση λύσεων, οριοθετήσεις και δυνατότητες γενίκευσης. Ανεξάρτητη ανάπτυξη ενοτήτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε επόμενες μαύρες περιοχές.

Η μαύρη περιοχή είναι η περιοχή όπου γίνεται η εφαρμογή της γνώσης. Εδώ χρησιμοποιούμε τις έννοιες που αναπτύχθηκαν κατα τη διάρκεια της λευκής περιοχής, για να επιλύσουμε προβλήματα. Ο υπολογιστής χρησιμοποιείται στην μαύρη περιοχή για την επεξεργασία των πραγματικών αλγορίθμων. Πρέπει να έχουμε επίγνωση του τι κάνουμε, να εξηγούμε τις αποφάσεις, αλλά δεν χρειάζεται να διενεργούμε οι ίδιοι τους υπολογισμούς. Νέα γλωσσικά στοιχεία παράγοντε, είτε με την αποθήσευση είτε με τον ορισμό συναρτήσεων είτε γράφοντας νέα προγράμματα. Ο στόχος πάντα είναι η ανάπτυξη των προσωπικών εργαλείων μάθησης των μαθηματικών.

2 Επίδραση στην Μαθηματική γλώσσα

Κάπου το 1994, σ' ένα σεμινάριο, requiem της Μαθηματικής λογικής, ένας σπεσιαλίστας του κλάδου, ο Jean-Louis Krivine είπε κάτι που το βρίσκω αρκετά ωραίο:

> *οι μαθηματικοί δημιούργησαν, ακριβέστερα ανακάλυψαν, σιγά-σιγά, ένα πρωτόκολο επικοινωνίας μεταξύ τους: έτσι, εμφανίστηκε η μαθηματική γλώσσα εφοδιασμένη με μια παράξενη λιτανεία αξιωμάτων, λημμάτων, θεωρημάτων και αποδείξεων. Και ο ρόλος αυτής της γλώσσας δεν είναι κανείς άλλος απο την μεταφορά της πληροφορίας χωρίς κανένα λάθος. Ένα πρωτόκολλο επικοινωνίας είναι κάτι σαν ένα πρόγραμμα του οποίου ο στόχος είναι να επιτρέψει την ανταλλαγή πληροφοριών ανάμεσα σε δύο υπολογιστές. Οι μαθηματικοί έχουν ανακαλύψει μέσα στον εγκέφαλο, ένα πρόγραμμα αυτού του τύπου, ή κάτι παρόμοιο, την μαθηματική γλώσσα, η οποία κατέληξε σήμερα να ονομάζεται αξιωματική μέθοδος.*

Η αξιωματική μέθοδος γέννησε έναν νέο κλάδο της μαθηματικής επιστήμης: την μαθηματική λογική στη συνέχεια την θεωρία αποδείξεων καταλήγοντας στην δεκαετία του 80 στον λ-calculus. Ο στόχος της θεωρίας αποδείξεων ήταν να δοκιμάσει η αποκωδικοποιήση αυτού του πρωτοκόλλου επικοινωνίας.

Η ιδιαίτερη γλωσσική ικανότητα έγινε αναπόσπαστο κομμάτι της μαθηματικής επιστήμης και συνεπώς ένας στόχος της βασικής μαθηματικής εκπαίδευσης.

2.1 Κατασκευή νέων γλωσσικών στοιχείων

Απο τις αρχές της δεκαετίας του '80 όπου άρχισαν να γράφοντε τα περισσότερα συστήματα συμβολικού υπολογισμού, Maple, Derive, Mathematica, Axiom, Paris, CoCoA κλπ, μέχρι σήμερα, η εξέλιξη του interface, το παράθυρο όπου γίνεται η επικοινωνία μεταξύ χρήστη και υπολογιστή, έχει υποστεί μεγάλες αλλαγές έτσι ώστε σήμερα η γραφή ενός τύπου να είναι η ίδια όπως και στο χαρτί. Αυτό είναι και το κλειδί για μια ευρεία χρήση των συστημάτων αυτών ιδίως στην δευτεροβάθμια εκπ/ση. Η τεχνολογία επιτρέπει την μετατροπή του τύπου-λέξη σε ένα συμβολικό αντικείμενο της μαθηματικής γλώσσας με καθορισμένες μεταβλητές και λειτουργίες. Επίσης έχουμε τη δυνατότητα να δοκιμάσουμε συνθετότερα και μη προφανεί παραδείγματα αυξάνοντας τον βαθμό συνείδησης της σημασίας και της χρησιμότητας του μαθηματικού αντικειμένου.

Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μπορεί η μαθητής να κατασκευάσει νέα γλωσσικά στοιχεία; Φυσικά δεν εννοούμε τη γραφή ενός τύπου και την συντακτικώς ορθή χρήση του. Ούτε ότι ο μαθητής θα έχει την δυνατότητα να ανακαλύψει νέα στοιχεία εκ του μη όντος. Τα συστήματα συμβολικού υπολογισμού βασίζονται σε μια καθολική γλώσσα προγραμματισμού όπως για παράδειγμα την LISP η οποία με τη σειρά της έχει ως πρώτυπο το λ-calculus προιόν της μαθηματικής λογικής. Αυτό που μπορεί να κάνει ο μαθητής είναι να εισαχθεί μέσω του προγραμματισμού στις απολύτως αφηρημένες και άριστα δομημένες γλωσσικές δομές της μαθηματικής επιστήμης οι οποίες ενσωματώθηκαν μέσα στη γλώσσα προγραμματισμού.

Ας δούμε ένα πρόβλημα γνωστό απο τα πρώτα χρόνια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Η πορεία απο την διατύπωση του προβλήματος μέχρι την αναζήτηση νέων γλωσσικών μαθηματικών προτάσεων πραγματοποιείται σε τρία στάδια:

1. το πρόβλημα διατυπώνεται στη καθομιλουμένη γλώσσα,
2. το κείμενο συμπιέζεται στα κύρια γλωσσικά τμήματα που έχουν την δυνατότητα μετάφρασης και αναζητούμε αυτό που ονομάζουμε τύπος-λέξη (μτφ word formula),
3. τέλος, μεταφράζουμε τη συμβολική μαθηματική γλώσσα μετατρέποντας το πρόβλημα σε ένα μαθηματικό τύπο.

Παράδειγμα 2.1 *Κάποιος πήρε ένα δάνειο $K = 100000$ ευρώ και πληρώνει ετήσιες δόσεις $r = 10000$ ευρώ με επιτόκιο $p = 6.34\%$. Σε πόσα χρόνια θα καταβάλλει τα χρέη του.*

Το πρώτο βήμα είναι να βρεθεί ο τύπος-λέξη που θα περιγράψει τι πραγματικά συμβαίνει κάθε χρονιά. Ο τόκος p υπολογίζεται επι του κεφαλαίου K και αφαιρείται η δόση r των 10000 ευρώ. Μεταφράζοντας στη γλώσσα των μαθηματικών:

$$K_{\text{νέο}} = K_{\text{παλαιό}} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - r$$

Μέχρι το σημείο αυτό έχουμε διανύσει τα πρώτα στάδια της λευκής φάσης η οποία θα ολοκληρωθεί με την εκτέλεση εφικτών υπολογισμών βρίσκοντας για παράδειγμα το νέο κεφάλαιο κάθε έτος. Ο ανωτέρω τύπος θα μπορούσε να είναι ένα μαύρο κουτί που έχει διερευνηθεί σε προηγούμενες φάσεις. Η πειραματική μάθηση με υπολογιστή θα παρέχει δυνατότητες γενίκευσης και δημιουργίας ενοτήτων για τις επόμενες φάσεις.

Περνώντας τον τύπο στο Maple και χρησιμοποιώντας έναν μετρητή για τον αριθμό των επαναλήψεων το ΣΣΥ μπορεί να μας πληροφορήσει επαναλαμβάνοντας τον τύπο, πότε θα έχουμε καταβάλει το χρέος.

>k := 100000: n := 0: p := 6.34: r := 10000:

>n := n+1: k := evalf(k*(1+(1/100)*p)-r);

$$k := 96340.0$$

>n := n+1; k := evalf(k*(1+(1/100)*p)-r);

$$k := 92447.9560000000$$

>n := n+1; k := evalf(k*(1+(1/100)*p)-r);

$$k := 83907.9569300000$$

...

>n := n+1; k := evalf(k*(1+(1/100)*p)-r);

$$k := -6419.0603480000$$

>n;

17

Η λευκή φάση έχει ολοκληρωθεί. Στο στάδιο αυτό είδαμε βήμα-βήμα την θεμελειώδη ιδέα της επαναληπτικής διαδικασίας. Ο υπολογιστής προσέφερε ένα μοντέλο αυτού του αναδρομικού τύπου. Δεν είναι δύσκολο να περάσουμε σε μια γραφή της διαδικασίας εμπλουτίζοντας τα γλωσσικά μαθηματικά εργαλεία με την δημιουργία προγραμμάτων.

Στο τελευταίο στάδιο, το μαύρο πεδίο, κανένα ενδοιάμεσο βήμα δεν είναι ορατό. Η χρήση των γενικευμένων επαναληπτικών διαδικασιών αναδεικνύει την βασική τεχνική δομή της επανάληψης αφήνοντας τις παραμέτρους *επιτόκιο* και *δόση* ελεύθερες σε κάθε επιλογή. Η προσομοίωση θα γίνει στο Maple.

Ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να επιλέξει μεταξύ ενός συγκριτικού πίνακα τιμών και ενός διαγράμματος, δες σχήμα 1, πιο μοντέλο θα χρησιμοποιήσει για να ερμηνεύσει το αποτέλεσμα.

Ας σημειώσουμε ότι η πρώτη πρόταση που είναι γραμμένη σαν ένα μικρό προγραμματάκι στο Maple δεν είναι τίποτα άλλο παρά η προσαρμογή της πρότασης του λ-calculus:

$$\lambda\ f\ n\ f\ x.\ f\ (n-1\ f\ x\ )$$

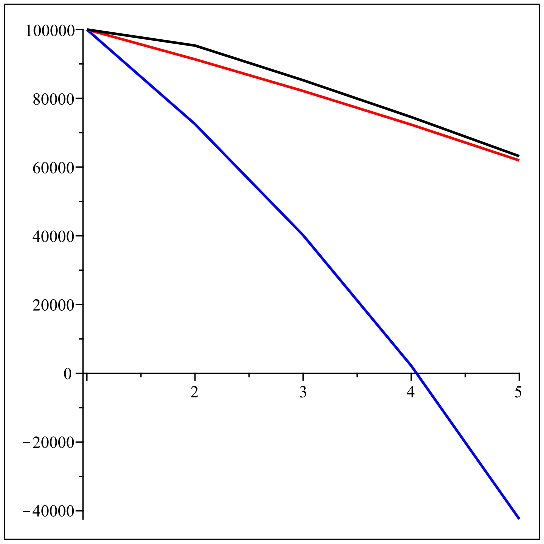
στην γλώσσα του Maple.

> f := proc (n,k,p,r) if n = 1 then k else evalf$\Big($f(n-1,k,p,r)*$\big($1+(1/100)*p$\big)$-r$\Big)$ end if end proc;

>f(18,100000,6.34,10000);

$$-6419.0603480000$$

```
>F := listplot([seq([i, f(i,100000,6.34,15000)], i = 1 .. 5)], color = red)
>G := listplot([seq([j, f(j,100000,17.5,45000)], j = 1 .. 5)], color = blue)
>H := listplot([seq([n, f(n,10000,16.34,21000)], n = 1 .. 5)], color = black)
>display(F, G, H)
```



Σχήμα 1: *Διάγραμμα παραδείγματος 2.1*

Δεν θα αναφέρουμε άλλα παραδείγματα. Τα παραδείγμα που ακολουθούν είναι δυνατά απο μόνα τους να υποστηρίξουν την επίδραση των ΣΣΥ πάνω στη διεύρηνση της γλωσσικής ικανότητας.

3 Επίδραση στην τεχνική της σκέψης

Πέρυσι το Πάσχα έλαβα ένα e-mail απο έναν μαθητή μου που είχα να τον δω γύρω στα 10 χρόνια. Είναι στο Λονδίνο και κάνει το διδακτορικό του στην ιατρική. Μου έγραφε μεταξύ άλλων: *... Έχω ξεχάσει όλα όσα μου είχατε μάθει, δεν είμαι σε θέση να κάνω πράξεις με συναρτήσεις, να λύσω μια άσκηση με διανύσματα, να βρώ έναν γεωμετρικό τόπο, αλλά ο τρόπος να σκέφτομαι λογικά, η ανάγκη να ορίσω μια έννοια ή να την περιγράψω πριν απο τη χρήση, είναι ικανότητες που μου στάθηκαν πολύ χρήσιμες στις σπουδές μου.*

Ο νέος αυτός λέει την αλήθεια, όχι για μένα, αλλά για την ουσία της τεχνικής της μαθηματικής σκέψης, η οποία δεν είναι διαφορετική απο την ουσία της κοινωνίας που βασίζεται πάνω στην τεχνολογία.

Είναι άραγε σωστό να λέμε: *οι μαθητές μας πρέπει να μάθουν ολοκληρώματα*, χωρίς να αναρωτηθούμε *πάνω στις γνώσεις που θα κερδίσουν οι μαθητές της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης όταν μάθουν να λύνουν ολοκληρώματα;*

3.1 ΣΣΥ και τεχνική της σκέψης

Αν λειτουργία της νόησης προυποθέτει απο τη μια μέρια τον άνθρωπο και απο την άλλη τα εργαλεία τότε, νέα εργαλεία μπορεί να αλλάξουν την γνωστική ικανότητα και να δημιουργήσουν νέες δεξιότητες. Η γνώση συνεπώς δεν είναι μια απλή ανάπτυξη των υφισταμένων ικανοτήτων αλλά μάλλον μια συστηματική κατασκευή γνωστικών συστημάτων-ενοτήτων και μια εσχατολογική επίγνωση των ιδιοτήτων και των ορίων του αντικειμένου, όπως θα δούμε στο παράδειγμα της γεωμετρίας. Ο υπολογιστής και το λογισμικό πρέπει να θεωρηθούν σαν επέκταση των εργαλείων της γνωστικής λειτουργίας.

Υπαρχει μια μετατόπιση δραστηριοτήτων με βαρύτητα στον σχεδιασμό και την ερμηνεία. Η διαδικασία της σκέψης αναπτύσσεται εποφελώς με συγκεκριμμένες αναπαραστάσεις ή μοντέλα του προβλήματος. Το καλό λογισμικό προσφέρει ένα αριθμό γραφικών και συμβολικών στοιχείων που επιτρέπουν στον χρήστη να κατασκευάσει μια μεγάλη ποικιλία πρωτοτύπων και ακόμα περισσότερο, πρωτότυπα που είναι αδύνατο να κατασκευασθούν χωρίς υπολογιστή.

Ο υπολογιστής και ιδιαίτερα τα ΣΣΥ ανοίγουν ένα νέο δρόμο στην σπονδυλωτή σκέψη και εργασία, δηλαδή εργασία που αποτελείται απο αυτοτελή - αυτόνομα σχήματα-ενότητες που συνδέονται μεταξύ τους.

Ενώ στα παραδοσιακά μαθηματικά ο τύπος, ο τύπος του Ήρρωνα για παράδειγμα - μια ενότητα των παραδοσιακών μαθηματικών, είναι το σημείο εκκίνησης για υπολογισμούς, τα ΣΣΥ κάνουν τα ίδια τους υπολογισμούς αυτούς αφήνωντας ένα πλούσιο πεδίο σε νέες μορφές μαθηματικών αντικειμένων ή σε νέα στοιχεία στη μαθηματική γλώσσα, αλλά προπάντων ένα νεο πεδίο αναδιοργάνωσει της μαθηματικης δραστηριότητας.

Μπορούμε να λέμε αυτές τις ενότητες *γνωστικές ενότητες* με τα εξής δύο χαρακτηριστικά:

1. στις ενότητες αυτές η γνώση έχει συμπιεσθεί και

2. η επιχειρησιακή τους δραση μπορεί να εξαπλωθεί σε όλο το γνωστικό πακέτο.

Θα ήμουν πειστικότερος αν είχαμε την δυνατότητα να παρουσιάσουμε όλες τις δυνατότητες της τεχνολογίας που διαθέτουμε σήμερα χώρις περιορισμούς. Παρ' όλα αυτά έχω την δυνατότητα να σας δείξω παραδείγματα με ένα πειραματικό λογισμικό με το οποίο εργάζομαι όχι σπάνια στην τάξη μου.

Στη συνέχεια θα δούμε δύο *γνωστικές ενότητες* σε ΣΣΥ. Τέλος με το τρίτο παράδειγμα, θα τονίσουμε μια νέα παράμετρο της επίδρασης πάνω στην μαθηματική τεχνική η οποία δεν είναι ορατή απο τα ΣΣΥ. Θα δούμε πως το ανακάτεμα συστημάτων συμβολικού υπολογισμού και ντετερμινιστικών συστημάτων δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να καταργίσει την βασική αρχή που θίξαμε στην εισαγωγή του άσπρου/μαύρου, τουλάχιστον κάτω απο ορισμένες περιπτώσεις, διόλου ευκαταφρόνητες.

Παράδειγμα 3.1 *Ας πάρουμε τον κλασσικό ορισμό της παραγώγου σαν όριο του πηλίκου*

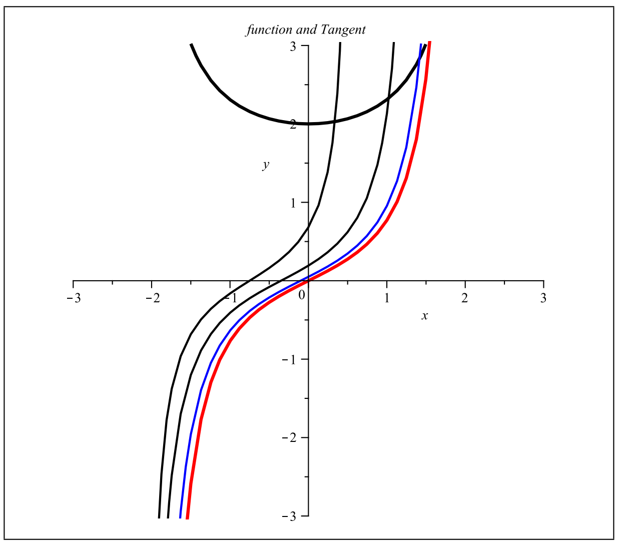
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

- 1^o βήμα: Ορίζω την ενότητα `diffq` να είναι μια συνάρτηση του $(x+h)$ στο $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$> \text{diffq} := (\text{x, h}) \rightarrow \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

- 2^o βήμα: Χρησιμοποιώ την ενότητα `diffq` στη διερεύνηση των γαφικών περαστάσεων για διάφορες τιμές του h.

  Αν $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{4-x^2}}$ μπορούμε να δούμε σε ένα διάγραμμα του Maple τις συναρτήσεις: `f(x)`,`diffq(x,0.2)`, `diffq(x,0.7)`, `diffq(x,1.5)` και την πρώτη παράγωγο της `f(x)` την οποία θα βρούμε στο 3ο βήμα, δες σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Διάγραμμα παραδείγματος 3.1*

- 3^o βήμα: Συνεργασία της ενότητας με άλλες ενότητες του Maple όπως είναι η standard ενότητα $\lim\limits_{h\to a}$.

  Μπορούμε έτσι να βρούμε το όριο του `diffq` το οποίο δεν είναι άλλο απο την πρώτη παράγωγο της `f(x)`:
  $> \lim\limits_{h\to 0}\Big(diffq(x,h)\Big);$

$$\frac{4x}{(4-x^2)^{3/2}}$$

Παράδειγμα 3.2 *Απόσταση σημείων και συναρτήσεων. Η ενότητα που θα αναπτύξουμε μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή πιο συνθέτων ενοτήτων.*

- 1^o βήμα: Κατ' αρχάς ορίζουμε την απόσταση σημείων $A(a,b)$ και $B(c,d)$.

  $> \text{distance} := \rightarrow (a,b,c,d)\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$

- 2^o βήμα: Χρησιμοποιώ την ενότητα αυτή για να υπολογίσω την απόσταση σημείων και καμπυλών:

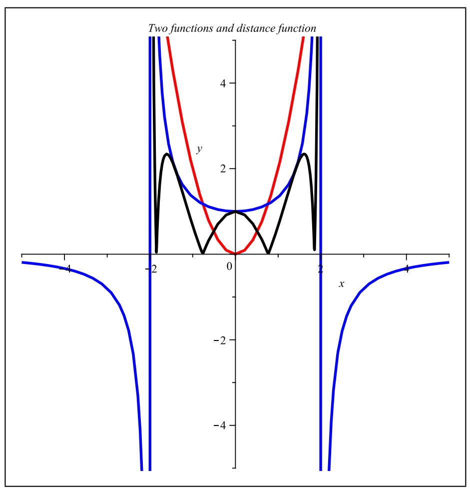
  $> \text{f := (x)} \rightarrow \dfrac{4}{4-x^2};$

  $> \text{g := (x)} \rightarrow 2 * x^2;$

  $>$ distance(x, f(x), x, g(x));

$$\sqrt{\left(\frac{4}{4-x^2} - 2x^2\right)^2}$$

  Στο σχήμα 8 βλέπουμε το διάγραμμα των τριών συναρτήσεων `f, g, distance`.



Σχήμα 3: *Διάγραμμα παραδείγματος 3.2*

- 3^o βήμα: Τέλος, η ενότητα συνεργάζεται επίσης με τις υπάρχουσες ενότητες $maximize$ και $minimize$ του Maple:

  $>$ minimize(distance(x, f(x), x, g(x)), x = -2 .. 2, y = -1 .. 3, location);

  $>$ maximize(distance(x, f(x), x, g(x)), x = -1.7 .. 1.7, y = 0 .. 5, location);

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να στραφώ στην γεωμετρία. Η γεωμετρία είναι για τους περισσότερους σπεσιαλίστες, μαζύ με την θεωρία αριθμών, η πηγή έμπνευσης των μαθηματικών. Η αναγκαιότητα της παρουσία της στην εκπαίδευση είναι όχι μόνο αδιαπραγμάτευτη, αλλά πρέπει να επεκταθεί περισσότερο.

Τα εργαλεία και η διαισθητικότητα της γεωμετρίας επηρέασαν αμφίδρομα την τεχνολογία, δες [8]. Πολύ ισχυροί αλγόριθμοι έχουν background γεωμετρικής προέλευσης, πχ επίλυση συστημάτων, τοπολογικοί αλγόριθμοι αναπαράστασης καμπυλών, ρομποτική κλπ. Για εμάς, της β'θμιας εκπαίδευσης ένα απο τα βασικά προτερήματα είναι η προσφορά της στην δομή του συλλογισμού. Αλλά το να περιορίζουμε τον ρόλο της συστηματικά μόνο στην απόδειξη είναι μόνο μια απο πτυχές της γεωμετρίας. Αν και η φάση της απόδειξης είναι ουσιαστική, εξασφαλίζοντας την ασφάλεια και την ακρίβεια, δεν είναι εν πάση περιπτώση η μόνη δραστηριότητα του μαθηματικού! Πίσω απο αυτή ξεδιπλώνεται μια τεχνική τελείως εμπειρική και διαισθητική που συνοδεύεται με την διατύπωση ισχυρισμών και την κριτική εξέταση αντιπαραδειγμάτων, η οποία προηγείται της απόδειξης. Η φάση αυτή είναι μια γνήσια μαθηματική δραστηριότητα και προσπαθεί να πάρει τη θέση της στην εκπαίδευση με τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας.

Με τα υπάρχοντα όμως συστήματα δυναμικής γεωμετρίας μπορούμε μεν να προσεγγίσουμε την διασθητική πλευρά του γεωμετρικού προβλήματος, δεν μπορούμε όμως να εξασφαλίσουμε την επαληθευσιμότητα ενός ισχυρισμού, όσο φιλότιμη και αν είναι η περίπτωση συστημάτων όπως το Cinderella. Για τον λόγο αυτό έχουμε περάσει στην επόμενη γενιά των συστημάτων αυτών το οποία υποστηρίζουν και σχεδιάζονται πάνω σε πλατφόρμα συνεργασίας μεταξύ ενός κοινού συστήματος δυναμικής γεωμετρίας και ΣΣΥ. Οι αλγόριθμοι που υποστηρίζουν την συνεργασία υπάρχουν. Η εξέλιξη λοιπόν είναι αναμενόμενη και εξασφαλισμένη αφού αποβλέπει στην πλήρη αυτοματοποίηση αποδείξεων χρήσιμη στην ρομποτική και στην παραγωγή νέων θεωρημάτων και προτάσεων χρήσιμα για την εξασφάλιση της πληρότητας της μεθόδου. Ας δούμε ένα τέτοιο σύστημα με το παραπεμπτικό όνομα TakeFive. Το TakeFive είναι σχεδιασμένο με ένα πλεονέκτημα. Εκεί όπου μπορεί να είναι διαφανές στην ροή των αποδεικτικών συλλογισμών η αρχή του Άσπρου/Μαύρου δεν εφαρμόζεται. Έτσι, η ανατομία της απόδειξης μιας πρότασης και η δημιουργία ιδιοτήτων της πρότασης είναι το κύριο πλεονέκτημα του λογισμικού.

Σημειώνουμε ότι αυτό είναι απολύτως πειραματικό και ακόμα ανοικτό, ο πυρήνας του δηλαδή είναι υπο κατασκευή. Για τον λόγο αυτό δεν είναι εύκολο στη χρήση. Μπορεί όμως να κάνει αποδείξεις και όχι μόνο.

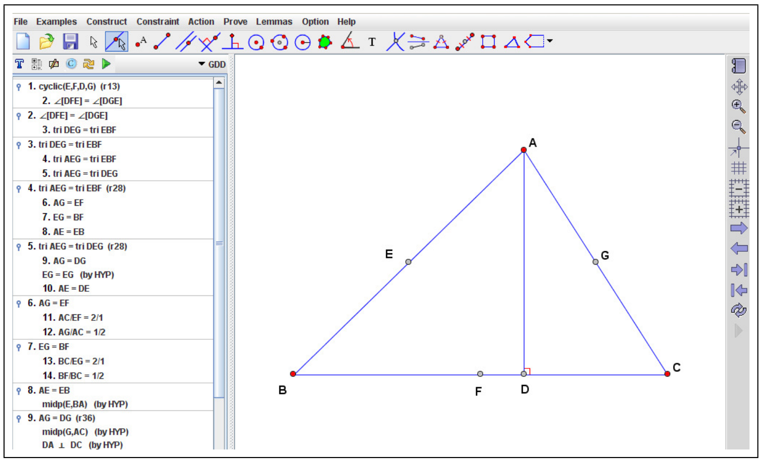
Παράδειγμα 3.3 *Ας πάρουμε για παράδειγμα τον κύκλο των εννέα σημείων.*

Μπορούμε να αποδείξουμε τον ισχυρισμό με τέσσερες διαφορετικές μεθόδους: κλασσική μέθοδος, μέθοδος της πλήρους γωνίας, με τη βάση του Gröbner και με τη βάση του Wu.

Οι παραγόμενες ιδιότητες απο την εφαρμογή του συμπεράσματος βρίσκονται στη βάση FIX, δες σχήμα 4.

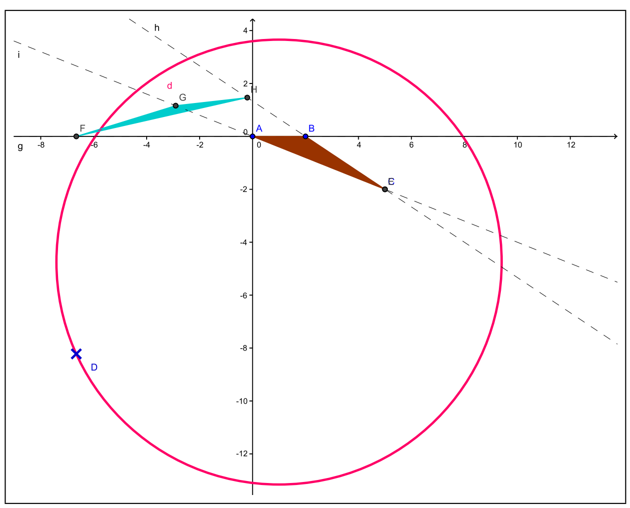
Η πλατφόρμα του TakeFive είναι σχεδιασμένη όμως να κάνει και υπερβάσεις. Έτσι μπορούμε να ανακαλύψουμε νέα θεωρήματα ή να βρούμε δύσκολους γεωμετρικούς τόπους δυσδιάκριτους και απο την κλασσική γεωμετρική μεθοδολογία και την κλασσική αλγεβρική πρακτική. Στο παράδειγμα που ακολουθεί η γεωμετρικός τόπος υπολογίσθηκε στο Maple και σχεδιάστηκε στο Geogebra. Στο TakeFive θέλουμε αυτά να γίνουν αυτόματα. Συγκεκριμμένα το παράδειγμα δεν μπορεί να τυπωποιηθεί και να αυτοματοποιηθεί απο το λογισμικό. Οι προσπάθειες συνεχίζονται.

Επιλέξαμε ένα δύσκολο πρόβλημα που είναι μια γενίκευση της ευθείας γνωστής με το όνομα του Simpon: Δίδεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του



Σχήμα 4: *Ο κύκλος των εννέα σημείων.*

επιπέδου έτσι ώστε το τρίγωνο με κορυφές τις προβολές του Μ πάνω στις πλευρές του τριγώνου να έχει σταθερό εμβαδόν, δες [4]. Ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος που προκύπτει



Σχήμα 5: *Γεωμετρικός τόπος σημείων, δες [4].*

σαν το ψευδο-υπόλοιπο της διαίρεσης των πολυωνύμων στο χαρακτηριστικό σύνολο, δια του πολυωνύμου που εκφράζει το σταθερό εμβαδόν του τριγώνου. Όλα αυτά υπολογίστηκαν με τον αλγόριθμο του Wu, δες [7]. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 5.

4 Τεχνολογία και διαδικασίες αφαίρεσης-εφαρμογής

Ένα απο τα χαρακτηριστικά των μαθηματικών είναι ότι ή ομάδα των ανθρώπων που αναγνωρίζει την σημασία ή καλύτερα την αξία της μαθηματικής γνώσης, είναι αρκετά μικρή. Η ανάπτυξη των μαθηματικών είναι μια διαδικασία που συμβαίνει σε διάφορες φάσεις. Ένα πιθανό μοντέλο αυτής της ανάπτυξης είναι το μοντέλο που αποτελείται απο δύο φάσεις. Η μιά είναι η φάση της αφαίρεσης και η άλλη των εφαρμογών.

4.1 Τεχνολογία και διαδικασία αφαίρεσης

Στη φάση της αφαίρεσης ξεκινάμε απο ένα συγκεκριμένο πρόβλημα για να φθάσουμε σε μια νέα θεωρία, ένα νέο αλγόριθμο ή μια νέα έννοια.

Ας δούμε δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.1 *Η παράγωγος μιας συνάρτησης.*

- *Συγκεκριμένο πρόβλημα :* *Η κλίση της εφαπτομένης.*
- *Η φάση της αφαίρεσης:* *Φεύγουμε απο το πρόβλημα της εφαπτομένης και επικεντρονόμαστε στην πρώτη παράγωγο σαν το όριο ενός λόγου διαφορών όταν ο τελεστής* Δx *τείνει στο* 0.

Παράδειγμα 4.2 *Ολοκληρωτικός λογισμός.*

- *Συγκεκριμένο πρόβλημα :* *Το εμβαδόν μεταξύ μιας καμπύλης και του άξονα* $x'x$.
- *Η φάση της αφαίρεσης:* *Είναι καλύτερα να αποσπασθούμε απο την έννοια του εμβαδού και να επικεντρωθούμε στο όριο αθροίσματος για να καταλήξουμε τελικά στο θεμελειώδες θεώρημα και στην έννοια του μέτρου κ.ο.κ.*

Στη προγραμματική γλώσσα του Maple μπορούμε να κατασκευάσουμε τέτοια μοντέλα αφαίρεσης.

1. Υπολογισμός ορισμένου ολοκληρώματος.

   Με τα παραδοσιακά μαθηματικά μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} x^3 dx$ χωρίς να επισέλθουμε στη φάση αφαίρεσης και σε υπολογισμούς ορίων. Μια εξήγηση είναι ότι πολύ λίγα απο αυτά τα αθροίσματα Riemann μπορεί να υπολογισθούν απο τους μαθητές, ή και απο τους φοιτητές. Χρησιμοποιώντας όμως το λογισμικό Maple διαθέτουμε ένα μεγάλο πλεονέκτημα τη μοντελοποίηση του αθροίσματος. Φυσικά ένας υπολογισμός ενός τέτοιου αθροίσματος γίνεται μέσα σε μια μαύρη περιοχή. Για τον λόγο αυτό η λευκή φάση προυποθέτει υπολογισμούς στο χαρτί απλών αθροισμάτων, όπως το άθροισμα Riemann στη περίπτωση του ολοκληρώματος $\int_a^b x^3 dx$.

   Ας δούμε την μοντελοποίηση στο Maple. Αφού διαιρέσουμε το διάστημα $[a, b]$ σε ίσα διαστήματα, υπολογίζουμε το μέσο $\xi(i)$ κάθε υποδιαστήματος και την τιμή $f(\xi(i))$:

$> \textbf{x := i} \rightarrow \ \dfrac{a+(b-a)*i}{n};$

$> \xi \textbf{ := i} \rightarrow \ \dfrac{1}{2}*x(i-1)+\dfrac{1}{2}*x(i);$

$> \textbf{f := x} \rightarrow \ x^3 \ ;$

$>$ simplify(f(ξ(i)));

$$-\frac{(-2an-2bi+b+2ai-a)^3}{8n^3}$$

$> \ \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{(b-a)}{n}\ (f(\xi(i)))\Big);$

$$\frac{1}{4}b^4-\frac{1}{4}a^4$$

4.2 Τεχνολογία και εφαρμογές των μαθηματικών

Η διαδικασία της αφαίρεσης είναι το σημείο εκκίνησης για τη διαδικασία της εφαρμογής στα μαθηματικά και αντιστρόφως.

Ας δούμε δύο παραδείγματα. Όταν το 1999 η Giovanna Castelli παρουσίασε την πτυχιακή της εργασία στο πανεπιστήμιο του Μιλάνου πάνω στην διδακτική των μαθηματικών, χρησιμοποίησε ένα ξένο για την εποχή μέσο για να κάνει μαθηματικά. Χρησιμοποίησε το νερό. Ο στόχος της πτυχιακής εργασίας ήταν η μελέτη της περιβάλλουσας μιας οικογένειας καμυλών. Ας δούμε δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.3 *Γνωρίζουμε ότι η τροχιά ενός σώματος κάτω απο την επίδραση της βαρύτητας είναι μια παραβολή. Η τροχιά αυτή δεν είναι ορατή όταν συμβαίνει στον αέρα. Αντίθετα όταν τρυπήσετε ένα πλαστικό μπουκάλι νερού, δες εικόνα 6, η τροχιά μιας σταγόνας νερού που φεύγει απο την τρύπα είναι ορατή. Μπορείτε λοιπόν να πάρετε την φωτογραφία, και να μελετήσετε τις τροχιές αυτές στο Geogebra.*

Ας υποθέσουμε ότι το ύψος του νερού στο μπουκάλι είναι $H = 30\ cm$. Κάθε τρύπα βρίσκεται σε ύψος μεταβλητό h απο 0 έως $29\ cm$. Οι εξισώσεις της τροχιάς της σταγόνας[1], σαν υλικό σημείο μάζας m, δίνονται απο τις παρακάτω εξισώσεις, σαν ευθύγραμμη κίνηση στο Ox και σαν ελεύθερη πτώση στον Oy. Η αρχή των αξόνων είναι στη βάση του μπουκαλιού:

$$\begin{aligned} x &= v\cdot t \\ y &= h-\tfrac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητα και v η οριζόνται ταχύτητα. Η οριζόντια ταχύτητα μπορεί να υπολογισθεί (με τη βοήθεια του θεωρήματος διατήρησης της ενέργειας) και είναι ίση με: $v = \sqrt{2g(H-h)}$. Απαλοίφωντας τον χρόνο απο τις εξισώσεις έχουμε:

$$y = h - \frac{x^2}{4(H-h)} \tag{1}$$

[1] Πρόκειται για τη Φυσική της Α Λυκείου.

Σχήμα 6: *Η τροχιά του νερού στο παράδειγμα 4.3*

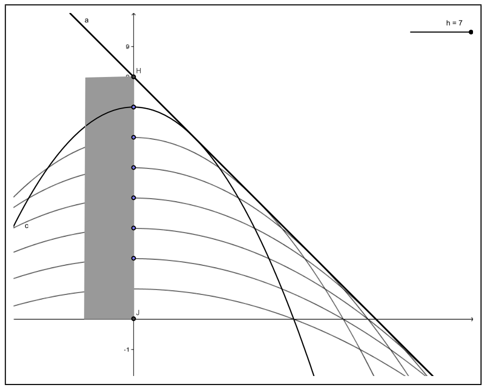
Για να βρούμε την περιβάλλουσα βρίσκουμε την παράγωγο του y ως προς h:

$$0 = 1 - \frac{x^2}{4(H-h)^2} \tag{2}$$

Απαλείφωντας το h απο την 1 και 2, θα πάρουμε την περιβάλλουσα $y = H - x$, δες σχήμα 7

Παράδειγμα 4.4 *Υποθέστε ότι έχετε ένα ποτιστικό μηχάνημα το οποίο πετά νερό προς μια κατεύθυνση, προς τα πάνω, αριστερά-δεξιά σχηματίζοντας κάθε σταγόνα που εκτοξεύεται γωνία θ. Μελετήστε τις τροχιές αυτές.*

Οι νόμοι της φυσικής κάτω απο ορισμένες προυποθέσεις είναι γνωστοί και δίνουν παραμετρικές συντεταγμένες για κάθε σημείο της τροχιάς:



Σχήμα 7: *Μοντελοποίηση του παραδείγματος 4.3.*

$$
\begin{aligned}
x &= v\text{συν}\,(\theta) \cdot t \\
y &= v\text{ημ}\,(\theta) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2
\end{aligned}
$$

Η τροχιά λοιπόν είναι μια παραβολή με εξίσωση:

$$y = \text{εφ}\,(\theta) \cdot x - \frac{1}{2}g\Big(\frac{x}{v \cdot \text{συν}\,(\theta)}\Big)^2 \tag{3}$$

ή αν θέσουμε $k := \text{εφ}\,(\theta)$, έχω:

$$y = k \cdot x - \frac{1}{2}\frac{(1+k^2)gx^2}{v^2} \tag{4}$$

Η πρώτη παράγωγος της 4 ως προς k είναι:

$$0 = x - \frac{kgx^2}{v^2}$$

με $k = \dfrac{v^2}{gx}$. Και συνεπώς η εξίσωση τις περιβάλουσας είναι:

$$y = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{g}{v^2}x^2 \tag{5}$$

Αν προσέξουμε καλύτερα θα δούμε ότι η εστία της περιβάλουσας 5, είναι το σημείο που βρίσκεται το μηχάνημα εκτόξευσης και ότι ο γεωμετρικός τόπος των εστιών των παραβολών των τροχιών είναι κωνική με κέντρο την εστία της περιβάλουσας, δες σχήμα 9!

Παράδειγμα 4.5 *Ξεκινώντας απο την προηγούμενη εφαρμογή θα μπρορούσαμε να μοντελοποίησουμε σχήματα μέσα απο φωτογραφίες, δες [1], όπως είναι ο πύργος Eifel στο Geogebra, δες σχήμα 10.*

Το λογισμικό διαθέτει εργαλείο εισαγωγής εικόνας στο σχεδιαστικό φύλλο. Κατόπιν μπορεί να αναζητήσουμε όλες τις κωνικές του απεικονιζόμενου πύργου που προσδιορίζονται απο το περίγραμμα. Ποικίλες εφαρμογές και δραστηριότητες μπορείτε να δημιουργήσετε. Οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να δημιουργήσουν πολλά εργαλεία σχετικά με τις κατασκευές πάνω στις κωνικές. Ίσως βρείτε το EucliDraw πιο φιλικό στην περίπτωση αυτή λόγω της πληθώρας των εργαλείων του.

Παράδειγμα 4.6 *Το τρίτο παράδειγμα αναφέρεται στην εύρεση του περιγεγραμμένου n-γώνου με την μεγαλύτερη περίμετρο, δες [6].*

Αναφορές

[1] Bhöm, J.: *Background Pictures as a Stimulating Means for Math Teaching.* DES TIME-2006, Dresden, 2006.

[2] Buchberger, B.: *Teaching Math by Software.* Paper of the RISC Institute (Research Institute for Symbolic Computation); University of Linz, 1992

[3] Buchberger, Bruno (Research Institute for Symbolic Computation, University of Linz, Austria): *Logic, Mathematics, Computer Science: Interactions* Talk at LMCS 2002. Castle of Hagenberg, October 2002.

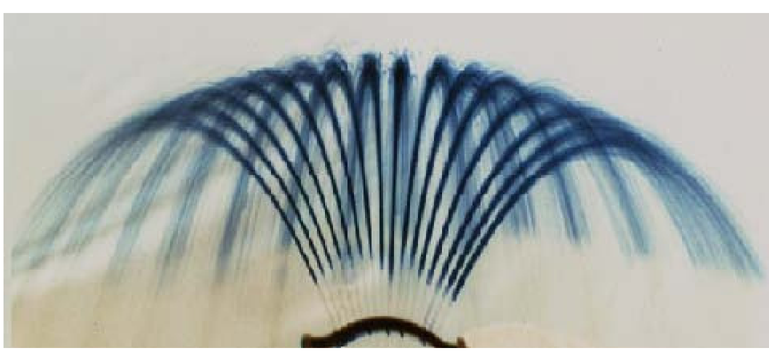
[4] Guzmán, M.*An extension of the Wallace-Simson theorem: projecting in arbitrary directions.* American Math. Monthly, 106(6), 574-580, 1999.

[5] Kutzler B.*DERIVE The future of Teaching, Mathematics*, The International DERIVE Journal, vol. 1, no 1, 1994.

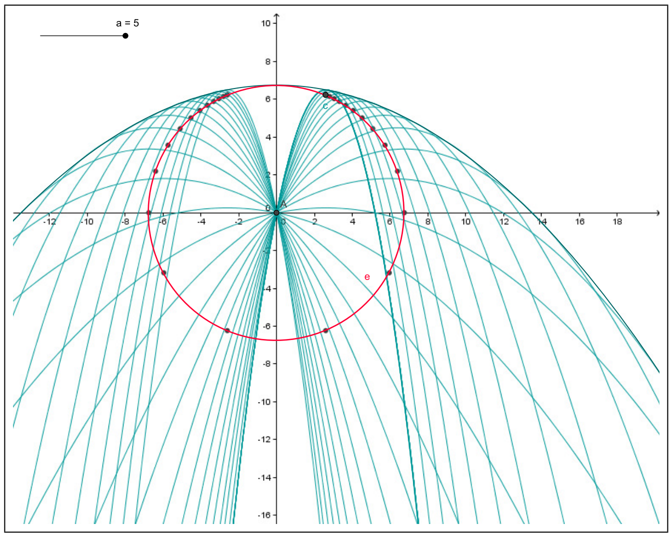
[6] Λυγάτσικας Z.: *Αυτόματες αποδείξεις με συστήματα Συμβολικού Υπολογισμού και Δυναμικής Γεωμετρίας*, Πρακτικά 23ου Πανελληνίου συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Πάτρα 24-26 Νοεμβρίου 2006.

[7] Λυγάτσικας Z.: *Αυτόματες Αποδείξεις στη Γεωμετρία με τη Μέθοδο του Wu.*, δες http://www.mathematica.gr/Μαθηματικά Κείμενα Μελέτες, Σεπτέμβριος 2008.

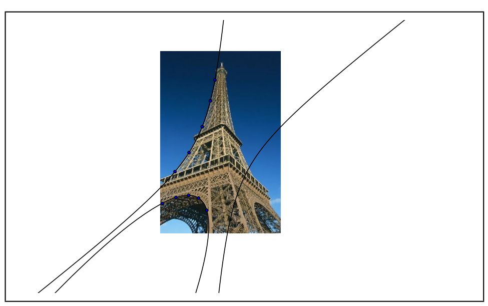
[8] Recio,T., Vélez,M.P. *Automatic discovery of theorems in elementary geometry.* Journal of automated reasoning, 23, 63-82, 1999.



Σχήμα 8: *Παράδειγμα 4.4.*



Σχήμα 9: *Μοντελοποίηση του παραδείγματος 4.4.*



Σχήμα 10: *Μοντελοποίηση και Geogebra*