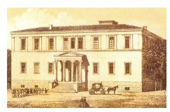
Το Λογισμικό JGEX



Λυγάτσικας Ζήνων

zenon7@otenet.gr

http://blogs.sch.gr/zenonlig/

Πρότυπο Πειραματικό Γ.Ε.Λ. Βαρβακείου Σχολής

5 Μαρτίου 2015

1 Τι είναι ένα Σύστημα Αυτόματης Απόδειξης (ΣΑΑ) στην Γεωμετρία;

Διαθέτουμε δύο μεγάλες κατηγορίες λογισμικών για να υποστηρίξουμε την εκπαιδευτική διαδιακασία: τα Συστήματα Δυναμικής Γεωμετρίας (ΣΔΓ) και τα Συστήματα Αλγεβρικού Υπολογισμού (ΣΑΥ). Μεταξύ των συστημάτων αυτών μόνο ένας αρκετά μικρός αριθμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αυτόματη απόδειξη θεωρημάτων στην Ευκλείδεια Γεωμετρίας. Το Xcas κατασκευάζει αποδείξεις χρησιμοποιώντας μερικές ικανότητες των ΣΑΥ, το Cinderella μπορεί να ελέγξει την αλήθεια ή όχι μίας πρότασης χρησιμοποιώντας πιθανοθεωρητικές μεθόδους και τέλος το Geometrix μπορεί να ελέγχει γεωμετρικές αποδείξεις χρησιμοποιώντας το πανίσχυρο proof assistant σύστημα Coq. Το σύστημα αυτό δεν είναι συστήματα αυτόματης απόδειξης. Χρησιμοποιείται αποκλειστικά στο να δείξει που και πως θεωρήματα μπορούν να ορίσουν μια αυτόματη απόδειξη. Το Coq χρησιμοποιήθηκε επιτυχώς στο πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων, στην απόδειξη του θεμελειώδους θεωρήματος της Άλγεβρας με την χρήση της θεωρίας ομάδων και τελευταία στο θεώρημα των Feit-Thomson.

Το JGEX μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παράγει αυτόματες αποδείξεις. Πρόκειται για ένα σύστημα που ενσωματώνει τις δυνατότητες των συστημάτων Δυναμικής Γεωμετρίας αλλά έχει και έναν solver με διπλή λειτουργία: μπορεί να κάνει αυτόματες αποδείξεις με μια Επαγωγική Βάση (ΕΒ) και με μία Αλγεβρική Βάση χρησιμοποιώντας δύο πανίσχυρα εργαλεία της Πραγματικής Αλγεβρικής Γεωμετρίας, την θεωρία της βάσης Gröbner και την μέθοδο Wu, δες στο [7] και [8]. Το λογισμικό είναι το αποτέλεσμα των αλγορίθμων στην Άλγεβρα που αναπτύχθηκαν στην δεκαετία του 80 και της μερικής χρήσης κάποιων αποτελεσμάτων της Μαθηματικής Λογικής και της Λογικής του Προγραμματισμού, όπως η Skolemization και Horn clauses. Δεν θα μας απασχολήσει εδώ η Αλγεβρική Βάση. Θα ασχοληθούμε με την ΕΒ του συστήματος και συγκεκριμμένα το πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αποδείξει ή να ανακαλύψει μη τετριμένα γεωμετρικά θεωρήματα.

Η βασική ιδέα του λογισμικού μπορεί να επικεντρωθεί στην κατασκευή μιας βάσης που την αποκαλεί fixpoint, εμείς θα την λέμε βάση ιδιοτήτων, η οποία μπορεί να βρεί όλες τις ιδιότητες του σχήματος που μπορεί να εξαχθούν από ένα σύνολο αξιωμάτων.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι οποιοδήποτε θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί με την μέθοδο της ΕΒ, μπορεί να αποδειχθεί και με τις δύο ενσωματομένες αλγεβρικές μεθόδους, οι οποίες όμως δεν κατασκευάζουν απόδειξη αλλά είναι διαδικασίες απόφασης αν το θεώρημα είναι ή όχι αληθές. Οπωσδήποτε όμως μπορούμε να αποδείξουμε περισσότερα και δυσκολότερα θεωρήματα με τις αλγεβρικές μεθόδους του λογισμικού παρά με την Επαγωγική Βάση.

1.1 Η Επιλογή των Γεωμετρικών Κανόνων

Οι Γεωμετρικοί κανόνες είναι στον πυρήνα του συστήματος, ο οποίος αν και δεν είναι κλειστός δεν έχουμε την δυνατότητα παρέμβασης. Η επιλογή τους βασίζεται στις παρακάτω παραδοχές.

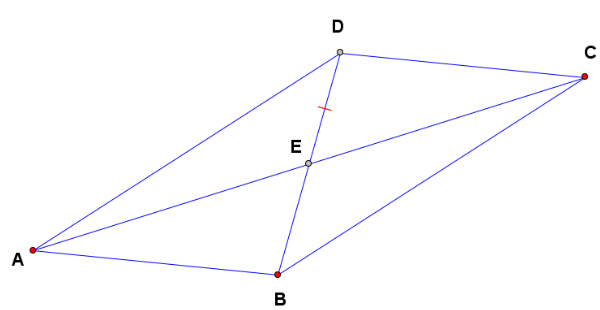
1.1.1 Κατασκευή βοηθητικών σημείων

Το επαγωγικό σύστημα βασίζεται πάνω στην χρήση προτάσεων Horn και έτσι δεν υπάρχει τρόπος για την κατασκευή βοηθητικών σημείων. Αν και τα θεωρήματα που χρησιμοποιούν ισότητες τριγώνων δεν χρησιμοποιούν αυτήν την ιδιότητα. Ωστόσο, πολλά θεωρήματα, όπως για παράδειγμα το θεώρημα του ορθοκέντρου ή του κέντρου βάρους, δεν μπορεί να αποδειχθούν χωρίς την κατασκευή βοηθητικών σημείων. Το JGEX κάνει κάτι πιο οικονομικό και αποτελεσματικό.

Η κατασκευή βοηθητικών σημείων αντιστοιχούν στην Skolemization των υπαρξιακών ποσοδεικτών. Έχει χρησιμοποιηθεί η παρατήρηση αυτή από τον A. Robinson, δες [1] ότι πρίν την γεωμετρική απόδειξη, μπορεί να κατασκευάσουμε όλα τα βοηθητικά σημεία και ευθείες που μπορεί να χρειασθούμε στην απόδειξη, αφού είναι στοιχεία του συνόλου -universe Herbrand του προβλήματος. Βασισμένος σ' αυτές τις αρχές ο Reiter παρουσίασε μια επαγωγική μέθοδο που παράγει νέα στοιχεία στο [10]. Και οι δύο αυτές ιδέες δεν είναι αλγοριθμικές. Επίσης, εισάγοντας νέα στοιχεία αυξάνουμε δραματικά το μέγεθος της βάσης. Αφού συζητήσουμε την τελική βάση, θα έχουμε την δυνατότητα να δούμε πως λειτουργεί αυτήν η παραδοχή.

1.1.2 Σχέση διάταξης

Ας δούμε την απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος: ***Οι διαγώνιες παραλληλογράμμου διχοτομούνται.***



Η κλασική απόδειξη χρησιμοποιεί την ισότητα τριγώνων $ABE^{\triangle} = DCE^{\triangle}$ η οποία με την σειρά της βασίζεται στην ισότητα των γωνιών $\widehat{EAB} = \widehat{DCE}$. Αλλά, αυτό υποθέτει ότι τα σημεία B και D είναι εκατέρωθεν της AC. Αυτή η παραδοχή δεν φαίνεται λογική σε αυτόματες μηχανιστικές αποδείξεις. Το JGEX στην περίπτωση αυτή δεν χρησιμοποιεί το ότι τα B και D είναι εκατέροθεν της AC, χρησιμοποιεί μάλιστα το Θεώρημα Θαλή στην απόδειξη, ως εξής: Αφού AC και BD δεν είναι παράλληλα θα τέμνονται σε ένα σημείο E. Αλλά τότε τα δύο τρίγωνα $ABE^{\triangle}$ και $DCE^{\triangle}$ είναι όμοια. Άρα $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{EB}{ED} = \dfrac{AB}{DC}$. Αλλά, $AB = DC$, συνεπώς $EB = ED$ και $EA = EC$.

Άρα, ένα στοιχειώδες θεώρημα στην Γεωμετρία που χρειάζεται μόνο ισότητες είναι ανεξάρτητο από την σχετική θέση σημείων. Αυτό είναι μια παρατήρηση γνωστή στους προγραμματιστές του JGEX από την δεκαετία του 80. Παρά το ότι η απόδειξη στην στοιχειώδη γεωμετρία, ενός τέτοιου θεωρήματος, δεν παρουσιάζει πρόβλημα, στο λογισμικό μας μπορεί να είναι περίπλοκη και καθόλου αυστηρή.
Το ίδιο ισχύει για το θεώρημα που εκφράζει την ιδιότητα της διχοτόμου σε ισοσκελές τρίγωνο.

1.2 Οι Κανόνες

Η δομή ενός κανόνα ακολουθεί την δομή μιας πρότασης Horn (Horn clause), του τύπου:

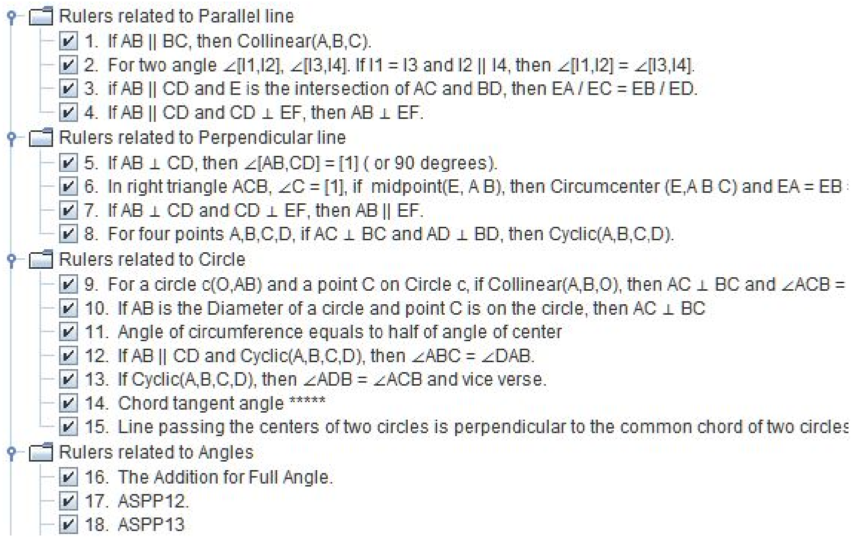
$$\forall x\Big[\Big(P_1(x) \wedge \cdots \wedge P_k(x)\Big) \Rightarrow Q(x)\Big]$$

όπου όλα τα x είναι σημεία που βρίσκονται στα γεωμετρικά κατηγορήματα $P_1, \ldots, P_k, Q$. Οι προτάσεις Horn είναι πολύ καλές στην αυτοματοποίηση αποδείξεων. Ας δούμε μερικούς τέτοιους κανόνες:

14. $\Big(circle(O, A, B, C) \wedge perp(O, A, A, X)\Big) \Rightarrow \angle[AB, AX] = \angle[CA, CB]$
35. $\Big(midp(E, A, B) \wedge midp(F, A, C)\Big) \Rightarrow EF \| BC$

$\ldots$

Κεντρική έννοια στην κατασκευή των κανόνων παίζει η ισότητα γωνιών. Εδώ οι γωνία δεν είναι η σύνηθης γωνία αλλά είναι η λεγόμενη πλήρης γωνία full-angle. Έτσι, μια γωνία που συμβολίζεται με $\angle[l, u]$ είναι η γωνία των ευθειών l και u, δεν είναι οι συνήθεις πλευρές μιας γωνίας. Δύο γωνίες $\angle[l, u]$ και $\angle[v, k]$ είναι ίσες αν μετά από μία στροφή K έχουμε $K(l) \equiv K(v)$ και $K(u) \equiv K(k)$. Ποιά είναι η πραγματική αιτία για αυτήν την απλούστευση. Θεωρείστε δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια τρίτη. Για να περιγράψουμε τα ζεύγη των ίσων γωνιών πρέπει να δώσουμε μια σχέση διάταξης. Αν φορτώσουμε το γεωμετρικό κατηγόρημα με όρους διάταξης γίνεται δίσχρηστο με κίνδυνο να διασπασθεί κατα την διάρκεια των υπολογισμών. Αυτός είναι ο λόγος που θα δείτε να σημειώνουνται σαν ίσες γωνίες που έχουν άθροισμα 180^o. Παρ'όλα



αυτά, το λογισμικό, με ad hock επεμβάσεις μπορεί να διακρίνει κατα την διάρκεια της απόδειξης γωνίες ίσες και παραπληρωματικές με την σύνηθη σημασία.

Το σύνολο των κανόνων που είναι στην βιβλιοθήκη του λογισμικού ανέρχεται σε 43. Οπωσδήποτε δεν είναι πλήρης ο κατάλογος. Για τον λόγο αυτό μπορεί μερικά θεωρήματα να μην είναι αποδείξιμα με το JGEX. Η κλειδωμένη βάση των κανόνων είναι ένα από τα ελλατώματα του λογισμικού.

1.3 Η βάση Ιδιοτήτων, fixpoint

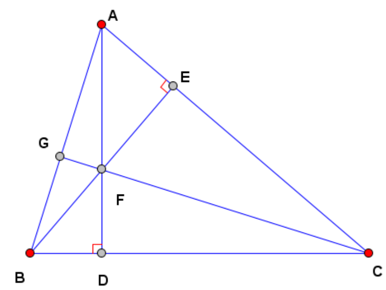
Έστω D_0 είναι ένα σύνολο γεωμετρικών ιδιοτήτων ενός γεωμετρικού σχήματος, οι υποθέσεις σε μια άσκηση ή σε ένα θεώρημα και R ένα σύνολο κανόνων. Θα χρησιμοποιήσουμε μια αύξουσα αλυσίδα ιδιοτήτων για να βρούμε νέες ιδιότητες στο αρχικό σχήμα.

$$\boxed{D_0} \quad \overset{R}{\subset} \quad \boxed{D_1} \quad \overset{R}{\subset} \quad \ldots \quad \overset{R}{\subset} \quad \boxed{D_k}$$

Το σύστημα αρχίζει με το σύνολο των ιδιοτήτων D_0 και συνεχίζει δημιουργώντας ένα νέο σύνολο από το D_0 όταν το σύνολο κανόνων R εφαρμοσθεί σε αυτό. Όταν $R(D_k) = D_k$ το σύστημα σταματά και μας δίνει την βάση ιδιοτήτων (ή fixpoint).

Ας δούμε την βάση ιδιοτήτων του θεωρήματος που αφορά το ορθόκεντρο τριγώνου. Δέδεται τρίγωνο ABC και AD, BE τα ύψη που άγονται από τις κορυφές A και B αντίστοιχα. F το σημείο τομής των AD και BE. Τότε το σύνολο D_0 είναι:

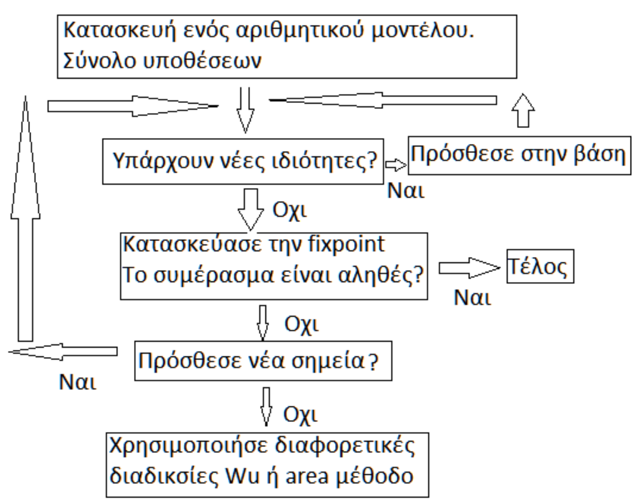
$$D_0 = \left\{ \begin{array}{c} collinear(A,E,C),\ perpendicular(B,E,A,C) \\ collinear(D,B,C),\ perpendicular(A,D,B,C) \\ collinear(F,A,D),\ collinear(F,B,E) \\ collinear(G,A,B),\ collinear(G,C,F) \end{array} \right\}$$



Η κατασκευή της βάση ιδιοτήτων κοστίζει 0.3 *sec*. Η βάση έχει με 134 ιδιότητες.

lines 6
peprpendicular lines 3
circles 6
congruent angles 7
similar triangles 7
ratio segments 105

Η βάση λοιπόν σχηματίζεται βάσει του διαγράμματος:



1.4 Ο ρόλος του αριθμητικού μοντέλου

Παρα το ότι έχουμε την εντύπωση ότι τα συστήματα αυτόματης απόδειξης λειτουργούν αποκλειστικά με επαγωγικά μοντέλα, η ύπαρξη αριθμητικών μοντέλων βοηθαέι ad hock την κατασκευή της βιβλιοθήκης Ιδιοτήτων, στα δύο κύρια συστήματα Geometrix και JGEX. Έτσι, πρέπει να έχουμε υπόψη ότι η κατασκευή ενός αριθμητικού μοντέλου είναι καθοριστική για την μέθοδο επιλογής της απόδειξης. Πρώτα, είναι χρήσιμο στην αντίστροφή διαδικασία της απόδειξης όπως παρουσιάζεται από το λογισμικό JGEX. Επίσης, είναι χρήσιμο για την παραγωγή αποδείξεων ανεξαρτήτων από το γράφημα. Ένα σχήμα παράγει ένα καλό αριθμητικό μοντέλο αν είναι το σχήμα είναι γραμμικά κατασκευάσιμο. Λέμε ότι ένα σχήμα είναι γραμμικά κατασκευάσιμο αν κατασκευάζεται σύμφωνα με τις παρακάτω κατασκευές:

- Από ένα ελεύθερο σημείο
- Από ένα αυθαίρετο σημείο πάνω σε ευθεία
- Από τομές ευθειών
- Από την τομή μιας ευθείας και ενός κύκλου όταν το άλλο σημείο τομής έχει προηγουμένως κατασκευασθεί.

Αν μια γεωμετρική κατασκευή δεν είναι γραμμική, το σχήμα προσδιορίζει τα σημεία από αλγεβρικές συντεταγμένες. Τότε το λογισμικό δεν μπορεί να κατασκευάσει ένα αριθμητικό μοντέλο και δεν μπορεί να υποστηρίξει μια απόδειξη. Στην περίπτωση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε μια από τις αλγεβρικές μεθόδους που ήδη υπάρχουν στο λογισμικό.

1.5 Διαχείριση των βοηθητικών σημείων

Όπως είπαμε το JGEX δεν ξεκινά την κατασκευή βοηθητικών σημείων αν δεν υπάρχει λόγος. Η αιτία είναι να μην αυξηθεί το μέγεθος της βάσης ιδιοτήτων fixpoint. Έτσι, αν η απόδειξη δεν βρίσκεται στην βάση fixpoint, τότε το σύστημα θα προσπαθήσει να κατασκευάσει νέα σημεία έτσι ώστε οι νέες ιδιότητες να βρεθούν στην βάση. Αν το συμπέρασμα δεν βρεθεί στην βάση συνεχίζει με τον τρόπο αυτό. Δεν είναι μια δόκιμη επιλογή, αλλά οι προγραμματιστές προτίμησαν την στρατηγική αυτή για καθαρά αποτελεσματικές αλγοριθμηκές αιτιές. Δηλαδή, η αύξηση των δεδομένων δεν επιτρέπει την αποτελεσματική λειτουργία του hardware. Γενικά για την ακτασευή νέων σημείων ισχύουν οι παρακάτω τέσσερες κανόνες:

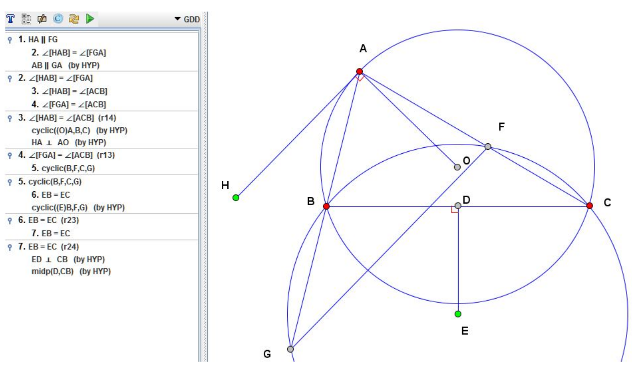
Οι κανόνες $A1$ και $A2$ εισάγουν νέα σημεία σαν τομές δύο μη παραλλήλων ευθειών. Ο κανόνας $A3$ εισάγει σημεία σαν μέσα ευθυγράμμων τμημάτων και τέλος ο κανόνας $A4$ εισάγει σημεία που είναι οι τομές ευθείας και κύκλου.

$A1$: [perp(O, M, M, A) and $\angle[XO, MO] = \angle[MO, AO]$] $\Rightarrow$
$\exists B$[coll(B, A, M) and coll(B, O, X) and cong(O, B, O, A)
and midp(M, A, B)].
$A2$: [$\angle[AP, BP] = \angle[AX, BY]$ and $\neg$coll(A, B, P)] $\Rightarrow$
$\exists Q$[$\angle[AP, BP] = \angle[AQ, BQ]$ and cyclic$[A, B, P, Q]$.]
$A3$: [midp(M, A, B) and midp(N, C, D)] $\Rightarrow$
$\exists P$[midp(P, A, D), para(P, M, B, D), and para$[P, N, A, C]$.]
$A4$: [cong(O, C, O, D) and perp(A, B, B, O)] $\Rightarrow$
$\exists P$[cong(O, C, O, P), para(P, C, A, B), cong$[B, C, B, P]$.]

Παράδειγμα 1 *Αριθμητικό Μουτέλο*

Στην άσκηση Αποδεικτική 2 σελ. 139, το ένα σημείο της τομής ευθείας και κύκλου, B και Γ, έχει προηγουμένως κατασκευασθεί. Έτσι η κατασκευή είναι γραμμική και επομένως το αριθμητικό μουτέλο κατασκευάζεται. Η άσκηση λέει:

> *Ένας κύκλος K διέρχεται από τις κορυφές B και C, (άρα τα δύο αυτά σημεία έχουν κατασκευάσθεί), ενός τριγώνου ABC και τέμνει τις πλευρές AB και AC στα σημεία G και F. Να αποδείξετε ότι η GF είναι παράλληλη στην εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου στο σημείο A.*



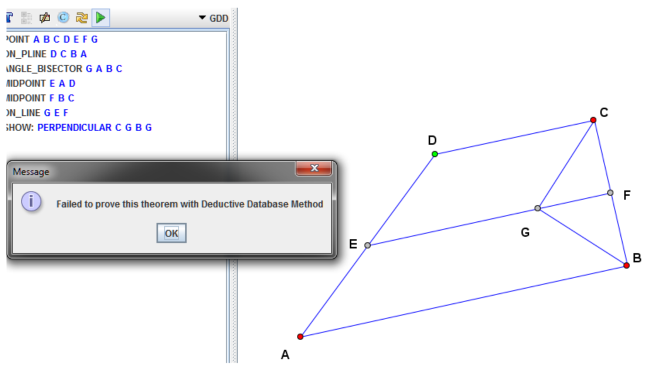
Σχήμα 1: Άσκηση Αποδεικτική 2 σελ. 139.

Παράδειγμα 2 *Αριθμητικό Μουτέλο - Κατασκευή Νέου Σημείου*
Στο παρακάτω παράδειγμα θα δούμε δύο διαφορετικές κατασκευές στην ίδια άσκηση που δείχνουν το πως εργάζεται το λογισμικό στην κατασκευή αριθμητικού μευτέλου ή όχι.

Άσκηση Αποδεικτική 1 σελ. 120:

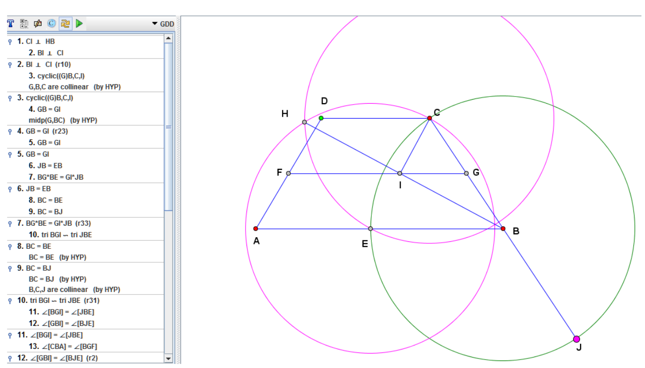
> *Σε τραπέζιο $ABCD$ η διχοτόμος της B τέμνει τη διάμεσο σε σημείο G. Τότε η $BG \perp GC$.*

Αν αφήσετε το σύστημα να κατασκευάσει την διχοτόμο της γωνίας B, η κατασκευή που είναι ενσωματωμένη στο λογισμικό είναι αριθμητική της έτσι δεν είναι γραμμικά κατασκευάσιμη. Τότε αν και το σύστημα δίνει μια καταφατική απάντηση - ναι/οχι, δεν είναι δυνατόν να υποστηρίξει το αριθμητικό μοντέλο και απορρίπτει την απόδειξη με ΕΒ. Ενώ με αλγεβρικές μεθόδους αυτό είναι εφικτό, όπως μπορείτε να διαπυστώσετε. Υπενθυμίζουμε ότι η κατασκευή της διχοτόμου γωνίας γίνεται με την τομή κύκλων των οποίων τα σημεία τομής δεν είναι αλγεβρικώς διακριτά.



Σχήμα 2: Άσκηση Αποδεικτική 1 σελ. 120, χωρίς κατασκευή αριθμητικού μοντέλου.

Αν όμως κατασκευάσετε την διχοτόμο, με κανόνα και διαβήτη όπως στην σύνηθη κλασική κατασκευή, επειδή θα ορίσεται εσείς τα σημεία τομής των κύκλων, το λογισμικό κατασκευάζει το αριθμητικό μοντέλο και συνεχίζει εκ τούτου την απόδειξη. Επίσης, θα δείτε ότι θα χρειασθεί και την κατασκευή ενός επιπλέον σημείου J στο Σχήμα 3.



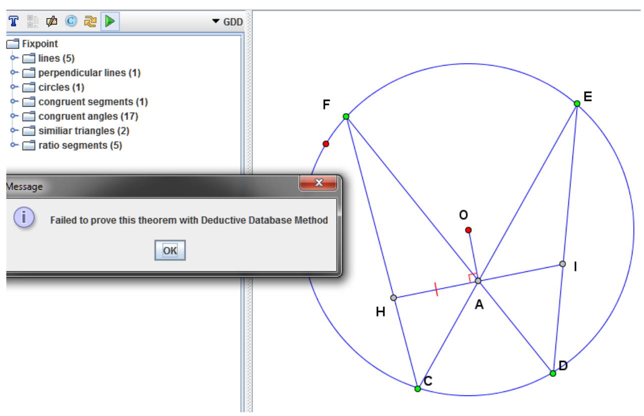
Σχήμα 3: Άσκηση Αποδεικτική 1 σελ. 120, με κατασκευή αριθμητικού μοντέλου.

Παράδειγμα 3 *Αριθμητικό Μοντέλο - Κατασκευή Νέου Σημείου*
Το Θεώρημα της Πεταλούδας

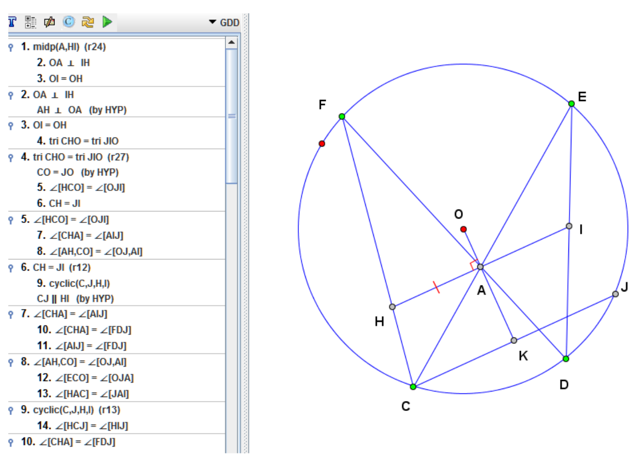
Το θεώρημα αυτό είναι χαρακτηριστική περίπτωση της αλγεβρικής αμφιβολίας προσδιορισμού σημείων τομής ευθείας και κύκλου.

> *Σε κύκλο κέντρου O έχουμε τέσσερα σημεία C, D, E και F, όπως στο Σχήμα 4. Αν A το σημείο τομής των CE και DF και η κάθετος στην OA από το σημείο A τέμνει τις CF και DE στα σημεία H και I, τότε το A είναι το μέσο του HI.*

Το πρόβλημα δημιουργείται επειδή το σημείο E ορίζεται στο αριθμητικό μοντέλο σαν το σημείο τομής της CA και του κύκλου. Αλλά, τα σημεία τομής της CA με τον κύκλο είναι τα C και E. Το σύστημα δεν έχει κάποιον λόγο να θεωρεί το σημείο E και μάλιστα το σημείο C έχει εκ των προτέρων κατασκευασθεί! Έτσι, απορρίπτει το αριθμητικό μοντέλο αφού πλέον τα σημεία είναι αλγεβρικά. Η αλήθεια του συμπεράσματος αποδεικνύεται με την μέθοδο Wu.



Σχήμα 4: Θεώρημα Πεταλούδας χωρίς βοηθητικό σημείο.



Σχήμα 5: Θεώρημα Πεταλούδας με βοηθητικό σημείο.

2 Η Απόδειξη

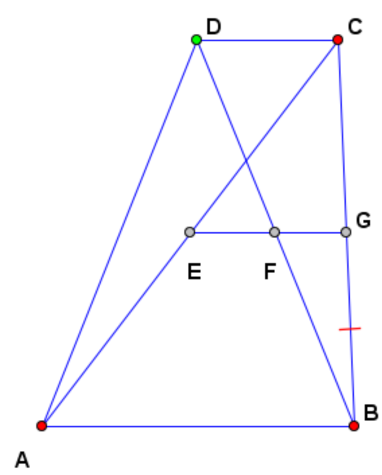
Αφού σχηματισθεί μια βάση ιδιοτήτων μπορούμε να περάσουμε στην απόδειξη. Η διαδικασία δεν είναι απλή γιατί χρησιμοποιεί την βάση κάπως περίπλοκα. Γενικά το σχήμα μιας απόδειξης είναι το εξής:

$$(R)\ \ C:\ -P_1,\ldots,P_k$$

όπου C είναι το συμπέρασμα που θέλουμε να καταλήξουμε και $P_1,\ldots,P_k$ μαι σειρά από απλές προτάσεις, έχουν συγκεκριμμένη μορφή στο λογισμικό. Η διαδικασία επιλογής είναι η εξής:
Αν P_i είναι μια απλή πρόταση τότε ψάχνουνε στην βάση και βρίσκουμε την πρώτη πρόταση που συνεπάγεται την P_i, αν δεν είναι απλή ψάχνουμε στην βάση για να βρούμε μια απλή που συνεπάγεται από την P_i και είναι σχετική με την (R). Το σύστημα έχει τρείς κανόνες για να ελέγχει αν οι διαδιακασίες P_i έχει επαναληθφεί ή μπορεί να συντομευθεί κλπ.

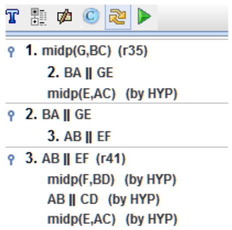
Παράδειγμα 4 *Στο παρακάτω παράδειγμα θα φανεί το σχήμα R που κατασκευάζει στην έξοδο το JGEX.*

Αν $ABCD$ τραπέζιο με $AB \parallel CD$, και E μέσο της AC, F μέσο της BD, τότε η EF διέρχεται από το μέσο της BC.



Σχήμα 6: EF διέρχεται από το μέσο της BC.

Η απόδειξη από το JGEX είναι η εξής:



The Machine Proof
1. midp[E, BC] :– (2)para[CD, EN], (hyp)midp[N, BD].
2. para[CD, EN] :– (3)coll[$ENMA_0$], (4)para[CD, MA_0].
3. coll[$ENMA_0$] :– (hyp)line[MNE], (5)line[MNA_0].
4. para[CD, MA_0] :– (hyp)midp[M, AC], (hyp)midp[A_0, DA].
5. line[MNA_0] :– (6)para[A_0M, A_0N].
6. para[A_0M, A_0N] :– (7)para[A_0M, AB], (8)para[A_0N, AB].
7. para[A_0M, AB] :– (4)para[CD, MA_0], (hyp)para[AB, CD].
8. para[A_0N, AB] :– (hyp)midp[N, BD], (hyp)midp[A_0, DA].

Αναφορές

[1] Robinson, A.: *Proving a theorem (as done by Man, Logician, or Machine)*, in J. Siekmann and G. Wrightson (eds), Automation of Reasoning, Springer-Verlag, (1983), pp. $74-78$.

[2] Chou S.-C.: *Proving Elementary Geometry Theorems Using Wu's Algorithm*, in Automated theorem proving after 25 years-Contemporary mathematics Vol. 29-Bledsoe and Loveland editors -Denver (1984).

[3] Chou S.-C., Gao X., Zhang J.:*A Deductive Database Approach to Automated Geometry Theorem Proving and Discovering*, Journal of Automated Reasoning 25: 219-246, (2000).

[4] Chou S.-C.: *Mechanical Geometry Theorem Proving*, D. Reidel publishing company-Dordecht (1988).

[5] Chou S.-C., Schelter W.F.: *Proving geometry theorems with rewrite rules*. Journal of automated Reasoning $\sharp$ 2 (1986).

[6] Cox D., Little J., O'Shea D.: *Ideals, Varieties and Algorithms*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, (1991).

[7] Λυγάτσικας Z.: Gröbner Bases στο GB, (2007).

[8] Λυγάτσικας Z.: Αυτόματες Αποδείξεις στην Γεωμετρία με την Μέθοδο Wu, Μαθηματική Επιθεώρηση 79-80, σελ. 3-30, (2013).

[9] Prasolov V. V.: *Polynomials*. Algorithms and Computation in Mathematics, vol. 11, Springer (2004).

[10] Reiter, R.: *A semantically guided deductive system for automatic theorem proving*, IEEE Trans. on Computers C-25(4) (1976), $328-334$.

[11] Ritt J.F.: *Differential Algebra*, Amer. Mat. Soc., New York, (1950).

[12] Wu Wen-Tsün: *On the decision problem and the mechanization of theorem-proving in elementary geometry*. Scienta Sinica, 21 (1978).

[13] Wu Wen-Tsün: *Some recent advances in mechanical theorem-proving of geometries*, in Automated theorem proving after 25 years-Contemporary mathematics Vol. 29-Bledsoe and Loveland editors -Denver (1984).

[14] Wu Wen-Tsün: *Mechanical Theorem Proving in Geometries* Texts and Monographs in Symbolic Computation, Springer-Verlag/Wien (1994).

[15] Wu Wen-Tsün: *Basic principles of mechanical theorem proving in elementary geometries*. Journal of automated reasoning $\sharp$ 2 (3) pp. $221-252$, (1986).