ΠΡΟΛΟΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Όταν στις αρχές της σχολικής χρονιάς 2004-2005 ορίμαζε η ιδέα της διοργάνωσης μιας διημερίδας για τα Μαθηματικά στο Λύκειο, δε φανταζόμαστε ποτέ την απήχηση που θα είχε στους συναδέλφους Μαθηματικούς.

Η προσέλευση τόσων πολλών συνέδρων και η πληθώρα των εισηγήσεων μας εξέπληξε όλους ευχάριστα, καταδεικνύοντας:

1. τη μεγάλη προθυμία των συναδέλφων της Δευτεροβάθμιας Εκπ/σης για επιμόρφωση,
2. τη δυνατότητα των σχολείων να διοργανώνουν επιμορφωτικά σεμινάρια, αρκεί να υπάρχει η θέληση αλλά και η βοήθεια από διαφόρους φορείς,
3. την υψηλή ποιότητα και προβληματισμό του υπάρχοντος δυναμικού των καθηγητών των Σχολείων του Τόπου μας.

Θέλουμε λοιπόν στο σημείο αυτό να εκφράσουμε τις ευχαριστίες μας σε όλους εκείνους που βοήθησαν στην επιτυχία της διημερίδας:

- το Υπουργείο Παιδείας και ιδιαίτερα τον Γ.Γ. κ^{ο} Ράμμα για την αγάπη με την οποία περιάβαλε την προσπάθειά μας αυτή,
- το Βαρβάκειο Ίδρυμα και ιδιαίτερα τον Πρόεδρό του Ιωάννη Πισιμίση, για την αμέριστη συμπαράσταση και την οικονομική ενίσχυση που προσέφερε,
- τη Δ/ντρια των Γενικών Αρχείων του Κράτους που ευγενικά μας παραχώρησε την αίθουσα εκδηλώσεων,
- τον Δ/ντή της Β' Διεύθυνσης Αθήνας κ. Μαυρίκιο Γενέθλιο, για την αμέριστη στήριξη της προσπάθειας,
- τους εκπροσώπους του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου κο Παπαδόπουλο Γεώργιο (σύμβουλο Π.Ι.) και κο Πολύζο Γεώργιο (πάρεδρο Π.Ι.) για τη συμμετοχή και τις εισηγήσεις τους,
- τη Δ/ντρια του Βαρβακείου Λυκείου κα Άννα Καραβέλη για τη συμμετοχή, τη συμπαράσταση και το συνεχές ενδιαφέρον κατά την διάρκεια της διημερίδας,
- τους μάχιμους καθηγητές που δέχτηκαν με προθυμία να συμμετάσχουν ως εισηγητές,
- τους καθηγητές της Σχολής μας, κ^{ο} Ιωάννη Κούτσια για την συμπαράσταση στην προετοιμασία και την βοήθεια καθ' όλη τη διάρκεια της διημερίδας, την κ^{α} Κατερίνα Μπαλή για την γραμματειακή υποστήριξη, την υπομονή και την αγάπη της,
- τον Δ/ντη του Βαρβακείου Γυμνασίου κ^{ο} Δασκαλάκη, τον πρόεδρο της ΕΛΜΕ Προτύπων κ^{ο} Θεόδωρο Οτζάκογλου και όλους τους καθηγητές του Βαρβακείου Πειραματικού Λυκείου που μας συμπαραστάθηκαν
- και τη γραμματέα του Βαρβακείου Πειραματικού Λυκείου κα Φιλοθέη Αντωνάκη, αφανή ηρωίδα, στην οποία οφείλουμε πολλά.

Πάνω απ'όλα θέλουμε να ευχαριστήσουμε τους δεκάδες συναδέλφους που γέμισαν την φιλόξενη αίθουσα εκδηλώσεων των Γενικών Αρχείων του Κράτους και τις δύο μέρες, αφήνοντάς μας αισιόδοξους για το μέλλον της Παιδείας, δίνοντας μια απάντηση σε όσους κατά καιρούς παραμερίζουν το έργο, τον ρόλο και την ποιότητα του δασκάλου στη χώρα μας.

Η Επιτροπή

Αισθάνομαι βαθύτατα την ανάγκη να συγχαρώ τους διοργανωτές της διημερίδας με θέμα «Η Διδασκαλία των μαθηματικών στο Λύκειο», που πραγματοποιήθηκε για τους Μαθηματικούς του Νομού Αττικής στις 3 και 4 Μαρτίου 2005, στους φιλόξενους χώρους του Ενιαίου Λυκείου Βαρβακείου Σχολής. Ιδιαίτερα, θέλω να συγχαρώ και να ευχαριστήσω θερμά την κα Σοφία Πιτέρη, Σύμβουλο Μαθηματικών και την κα Άννα Καραβέλη, Διευθύντρια του Λυκείου, για τη στήριξη που παρείχαν στη διοργάνωση, αλλά και τον κ. Βασίλειο Κατσαργύρη, ο οποίος εργάστηκε με αφοσίωση, αφιερώνοντας μεγάλο μέρος από τον ελεύθερο χρόνο του στο εγχείρημα αυτό. Τέλος, συγχαίρω τα υπόλοιπα μέλη της οργανωτικής επιτροπής της διημερίδας - Παναγιώτου Ευάγγελο, Δέμη Απόστολο, Μηλιώνη Χρήστο, Ζάχο Ιωάννη, Λυγάτσικα Ζήνωνα, Καραγκούνη Ελισσάβετ και Καββαδά Ευαγγελία - για τον εμπνευσμένο τρόπο με τον οποίο διαμόρφωσαν το πρόγραμμα και έφεραν εις πέρας τη διαδικασία στο σύνολο της, καθώς και τους εισηγητές, για την προσφορά των γνώσεων και της πολύτιμης μακρόχρονης εμπειρίας τους.

Τη μεγάλη επιτυχία τους εγχειρήματος αυτού αποδεικνύει όχι μόνο η μεγάλη συμμετοχή των συναδέλφων Μαθηματικών από Σχολεία όλης της Αττικής, αλλά και η γενικότερη αποδοχή των εισηγήσεων, οι συζητήσεις που προκλήθηκαν, οι προβληματισμοί που εμφανίστηκαν και τα ερωτήματα που εγέρθηκαν καθ' όλη τη διάρκεια των εργασιών της διημερίδας. Μια επιτυχία που καταδεικνύει σαφώς ότι στην εποχή μας, εποχή ραγδαίων αλλαγών σε όλα τα επίπεδα, είναι ολοένα και πιο έκδηλη η ανάγκη των εκπαιδευτικών για μια συνεχή και επαναλαμβανόμενη επιμόρφωση, που να ανταποκρίνεται στις ανάγκες των καιρών και στις νέες συνθήκες που δημιουργούν το νέο πολυπολιτισμικό περιβάλλον, η εισαγωγή των νέων τεχνολογιών στη σχολική πραγματικότητα και οι αυξανόμενες απαιτήσεις των μαθητών.

Οι ευκαιρίες που δίνονται στους συναδέλφους για επαφή με τις νέες τάσεις και αναζητήσεις στην επιστήμη τους, καθώς και για γόνιμη ανταλλαγή απόψεων με συναδέλφους, με αποτέλεσμα την ανανέωση των επιστημονικών τους γνώσεων και παράλληλα την πληρέστερη παιδαγωγική τους κατάρτιση, είναι πράγματι ελάχιστες. Ως εκ τούτου, πρωτοβουλίες σαν τη συγκεκριμένη διημερίδα, που έχουν ως στόχο να καλύψουν -όσο αυτό είναι δυνατό - το τεράστιο κενό στην επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, χαίρουν της εκτίμησης όλων μας και μας βρίσκουν αρωγούς και συμπαραστάτες.

Εύχομαι η μεγάλη επιτυχία της διημερίδας να δώσει το κουράγιο και τη δύναμη στους εμπνευστές της για επανάληψη της ή το παράδειγμα σε άλλους φορείς για παρόμοιες εκδηλώσεις.

Ο Δ/ΤΝΗΣ Δ.Ε. Β' ΑΘΗΝΑΣ
Γενέθλιος Μαυρίκιος

ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΣΧΟΛΗΣ

ΔΙΗΜΕΡΙΔΑ
"Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ"

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

Πέμπτη 3 Μαρτίου 2005

9.00 – 9.30	**Έναρξη Διημερίδας - Χαιρετισμοί**
1os Κύκλος Συντονίστρια : Σοφία Πιτέρη	
9.45 – 10.15	Γεώργιος Παπαδόπουλος Σύμβουλος Π.Ι. *Τα μαθηματικά στο Λύκειο: τι, πως και γιατί. Η εκπαιδευτική αξία των εκπαιδευτικών λογισμικών Μαθηματικών.*
10.15 – 10.45	Γεώργιος Πολύζος Πάρεδρος Π.Ι. *Ανάλυση με τη βοήθεια των νέων τεχνολογιών.*
10.45 – 11.15	Βασίλης Κατσαργύρης Καθ. Βαρβ. Λυκείου : *Σχήματα που «μιλούν» - προβλήματα που «προκαλούν».*
11.15 – 11.40	Απόστολος Δέμης Καθ. Βαρβ. Λυκείου: *Λύνοντας ένα πρόβλημα ανάλυσης με τη βοήθεια σχήματος.*
11.40 – 12.20	Συζήτηση
12.20 – 12.40	**Διάλειμμα**
2ος Κύκλος Συντονιστής : Βασίλειος Κατσαργύρης	
12.40 – 13.10	Ευάγγελος Παναγιώτου Καθ. Βαρβ. Λυκείου: *Γιατί και πως πρέπει να διδάσκεται η λογαριθμική συνάρτηση πρίν την εκθετική.*
13.10 – 13.30	Μαρία Μπούρικα Καθ. Μαθ. : *Ιστορική εξέλιξη παραγώγου.*
13.30 – 13.50	Χρίστος Μηλιώνης Καθ. Βαρβ. Λυκείου: *Δραστηριότητες για τη προσέγγιση των Μαθηματικών.*
13.50 – 14.10	Γιώργος Γιατίλης Καθ. Μαθ. 1ο Λ. Παπάγου: *Δραστηριότητες στη παραβολή με το The Geometer Scetchpad.*
14.10 – 14.40	Εμμανουήλ Κιουλάφας Καθ. Ε.Π.Λ. Αναβρύτων: *Η έννοια του απείρου και απειροστού στα Μαθηματικά του Λυκείου.*
14.40 – 15.00	Συζήτηση

Παρασκεύη 4 Μαρτίου 2005

3ος Κύκλος Συντονιστής : Ζήνων Λυγάτσικας	
08.00 – 08.45	Ελισσάβετ Καραγκούνη Καθ. Μαθ. Βαρβ. Λυκείου: Δειγματική διδασκαλία στην Κανονική Κατανομή.
9.00 – 9.20	Σοφία Πιτέρη Σχολ. Σύμβουλος Β' Αθήνας : *Από το Γυμνάσιο στο Λύκειο: Δυσκολίες των μαθητών στη κατανόηση της Άλγεβρας και Γεωμετρίας.*
9.20 – 9.40	Ανδρέας Σβέρκος Καθ. 1ο Ε. Λ. Αγ. Παρασκευής: *Στατιστική: Επισυμάνσεις- Προεκτάσεις.*
9.40 – 10.00	Νίκος Καντεράκης 1ο Ε.Λ. Αρσακείου Ψυχικού*: Έυρεση του π με τη βοήθεια με Η/Υ.*
10.00 – 10.20	Χρίστος Μουρατίδης Καθ. Μαθ. Μ. Εκπ/σης: *Διδασκαλία της Στατιστικής με φύλλα εργασίας.*
10.20 – 10.40	Η. Ανδριανός, Π. Κοταρίνου, Α. Μπασιάκου, Κ. Κοντώσης, Φ. Καλαφάτος : *Hobbits και Orcs. Ένα πρόβλημα με τους ήρωες του*

	Tolkien.
10.40 – 11.00	Ελευθέριος Καπετανάς Καθ. 2° Εν Λ. Παπάγου : *Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής: Μια Διδακτική πρόταση.*
11.45 – 12.00	Συζήτηση
12.00 – 12.30	**Διάλειμμα**
4ος Κύκλος Συντονιστής : Απόστολος Δέμης	
12.30 – 12.50	Ιωάννης Ζάχος Καθ. Μαθ. Βαρβ. Σχολής : *Σχεδιάζοντας μια διδακτική μέθοδο με βάση τις αρχές της γνωστικής Ψυχολογίας ή η Γνώση είναι που σε κάνει καλύτερο.*
12.50 – 13.20	Σπύρος Δουκάκης Ερ. Μαθ. Pierce College : *Η Συνεισφορά των Portfolios και των E-Portfolios στη Διδασκαλία Μαθηματικών Εννοιών στο Λύκειο.*
13.20 – 13.40	Νίκος Παπαευστρατίου Καθ. Μαθ. Ε.Π.Λ. Αναβρύτων : *Από τη Μεθοδολογική σκέψη στην κριτική της μεθόδου.*
13.40 – 13.55	Ζήνων Λυγάτσικας Καθ. Μαθ. Βαρβακείου Λυκείου : *Μαθηματικό Trivium.*
13.55 – 14.20	Η. Ανδριανός, Π. Κοταρίνου, Α. Μπασιάκου, Κ. Κοντώσης, Φ. Καλαφάτος : *Προβλήματα μεγίστου και ελαχίστου στη Γεωμετρία.*
14.20 – 14.40	Ευαγγελία Καββαδά Καθ. Μαθ. Βαρβ. Λυκείου : *Ο αριθμός φ.*
14.05 – 15.00	Συζήτηση
14.05 – 15.00	**Συμπεράσματα – Ανοικτή Συζήτηση – Κλείσιμο** Βασίλης Κατσαργύρης.

ΑΠΟ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ: ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Σοφία Πιτέρη, M.Sc., Ph.D.
Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών

Η εισήγηση μου αναφέρεται στο σύνολο των μαθητών της Α΄ Λυκείου, δηλαδή και στους μαθητές που έχουν έφεση και αγάπη για τα Μαθηματικά, δεν έχουν γνωστικά κενά από το Γυμνάσιο, και η επίδοση τους αντικατοπτριζόταν σε υψηλή βαθμολογία στο Γυμνάσιο. Όταν υπάρχουν γνωστικά κενά, μαθησιακές δυσκολίες, ή έχει γεννηθεί δέος και "φοβία" για τα Μαθηματικά από το Γυμνάσιο, οι δυσκολίες είναι πολύ μεγαλύτερες και το αίσθημα αποτυχίας που βιώνουν οι μαθητές είναι έντονο από τα πρώτα κιόλας μαθήματα της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας.

Η Άλγεβρα και η Γεωμετρία μαζί με τη Φυσική θεωρούνται από τους μαθητές τα δυσκολότερα μαθήματα στην Α΄ Λυκείου. Ταυτόχρονα, τα τρία αυτά μαθήματα εμφανίζουν όλο και μεγαλύτερη σημασία στην εποχή μας, αποτελούν υποδομή για τις απαιτήσεις της σύγχρονης ζωής και συνδέονται άμεσα με τη ραγδαία ανάπτυξη της τεχνολογίας. Η ανάπτυξη και οι εφαρμογές της τεχνολογίας που αναμένονται ακόμα ταχύτερες στην τρέχουσα και στις επόμενες δεκαετίες και η κατοχύρωση της επαγγελματικής σταδιοδρομίας ασκούν πίεση στους μαθητές και κατ’ επέκταση στους γονείς τους ώστε να κατακτήσουν οι μαθητές μας αυτά τα εφόδια που θεωρούνται αναγκαία α) για την εισαγωγή τους στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση και β) για την επαγγελματική τους σταδιοδρομία.

Παρόμοια είναι και η επίσημη θέση της Πολιτείας, η οποία α) άλλαξε το σύστημα εισαγωγής με τις Δέσμες, και εισήγαγε τα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας ως εξεταζόμενο μάθημα σε όλες τις κατευθύνσεις και β) μέχρι σήμερα σταθερά αυξάνει την ύλη των αναλυτικών προγραμμάτων στα Μαθηματικά Γυμνασίου και Λυκείου συνολικά, χωρίς όμως να αυξάνει τις ώρες διδασκαλίας των Μαθηματικών.

Υπάρχουν κοινές δυσκολίες για την κατανόηση της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας από μέρους των μαθητών, αλλά και ειδικές δυσκολίες που αφορούν είτε μόνο την κατανόηση της Άλγεβρας, είτε μόνο της Γεωμετρίας.

Οι κοινές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές της Α΄ Λυκείου στα Μαθηματικά είναι οι εξής:

1) Μικρή η μηδενική εξοικείωση με τη γλώσσα δοκιμίου, που κατά κανόνα χρησιμοποιείται στα βιβλία των Μαθηματικών στο Λύκειο, αλλά και στην αυστηρή έκφραση των μαθηματικών προτάσεων. Η μικρή αυτή εξοικείωση μειώνει τις δυνατότητες κατανόησης των Μαθηματικών και καθιστά αδύνατη τη χρήση αυτής της γλώσσας όταν τους ζητείται να εκφράσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις, ειδικά όταν πρόκειται να αξιολογηθούν.

Ο καθηγητής των Μαθηματικών πρέπει:

- να αναμένει την έλλειψη αυτή
- να είναι υπομονετικός στην επανάληψη της ορολογίας και των μαθηματικών εκφράσεων ώσπου να γίνουν κτήμα όλων των μαθητών του
- να μην αποθαρρύνει τους μαθητές όταν δεν εκφράζουν αυτό που έχουν καταλάβει με την αυστηρή γλώσσα που απαιτείται στα Μαθηματικά
- να αξιολογεί στο $1^{ο}$ τετράμηνο της Α΄ Λυκείου τους μαθητές του για τις γνώσεις τους και την προσπάθεια τους και όχι με γνώμονα το αν και πόσο προσεγγίζουν

το πρότυπο του καλού μαθητή που έχει εκείνος στο μυαλό του, που κατανοεί και εξίσου αψογα εκφράζει τις μαθηματικές έννοιες και προτάσεις.

2) Άγνοια της μαθηματικής λογικής και των αποδεικτικών μεθόδων.

Η έννοια της συνεπαγωγής και της ισοδυναμίας είναι συγκεχυμένες στο μυαλό των μαθητών. Παρόλο που η έννοια της ισοδυναμίας εισάγεται πολύ νωρίς στο Γυμνάσιο, όταν αρχίζει η επίλυση εξισώσεων α΄ βαθμού, οι μαθητές λύνουν μηχανικά την εξίσωση χωρίς να αντιλαμβάνονται ότι κάνουν χρήση ισοδύναμων προτάσεων. Όταν η χρήση της ισοδυναμίας γίνεται αυστηρότερη στο Λύκειο, πάλι μηχανικά οι μαθητές την χρησιμοποιούν (παράδειγμα: οι ασκήσεις της παραγράφου 1.5 στην Άλγεβρα στη διάταξη των πραγματικών αριθμών).

Η ευθεία απόδειξη την οποία περιορισμένα έχουν δει στο Γυμνάσιο, είναι αντικείμενο απομνημόνευσης και όχι δημιουργικής σκέψης. Η διαπίστωση αυτή οδήγησε να μην γίνεται αξιωματική θεμελίωση στο βιβλίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και να αφαιρεθούν πολλές από τις αποδείξεις των θεωρημάτων.

Η απαγωγή σε άτοπο, ως αποδεικτική διαδικασία, είναι άγνωστη στους μαθητές από το Γυμνάσιο και δύσκολη στην εφαρμογή της. Το ίδιο και η χρήση αντιθετο-αντίστροφων προτάσεων, και η τέλεια επαγωγή.

Προτείνω στους καθηγητές που διδάσκουν Μαθηματικά στην Α΄ Λυκείου να αφιερώνουν 2 διδακτικές ώρες για έννοιες της μαθηματικής λογικής, όπως η ισοδυναμία, και για τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες αποδεικτικές μεθόδους, όπως η ευθεία απόδειξη και η απαγωγή σε άτοπο. Να χρησιμοποιούν απλά παραδείγματα για κάθε μέθοδο. Και κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, όποτε χρησιμοποιείται αποδεικτική διαδικασία να γίνεται μνεία στο είδος της και στα βήματα που ακολουθούνται.

Τέλος, η διερευνητική διαδικασία που χρησιμοποιείται στην Άλγεβρα από τις πρώτες παραγράφους του Κεφαλαίου 1 (εξίσωση $αx + β = 0$, ανισώσεις $αx + β <> 0$, εξίσωση $x^{ν} = α$) πρέπει να αναλύεται ως βασική μέθοδος που χρησιμοποιείται όταν μια μεταβλητή ή παράμετρος παίρνει τιμές από ένα απειροσύνολο.

3) Καλλιέργεια δέους και φοβίας για τα Μαθηματικά. Πράγματι, οι απαιτήσεις της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας είναι μεγάλες, και ο χρόνος που απαιτείται για εργασία στο σπίτι είναι μεγαλύτερος. Δεν έχει όμως νόημα να επιτύχουμε τη μεγαλύτερη ενασχόληση των μαθητών μας, καλλιεργώντας το φόβο της αποτυχίας στα Μαθηματικά. Η επιλογή των πρώτων τεστ θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε οι μαθητές να μη συναντήσουν μεγάλη δυσκολία και να πάρουν καλό βαθμό, αφού καλως η κακώς έχουν συνδέσει τη βαθμολογία τους με την επίδοση τους.

Οι απαξιωτικές εκφράσεις όταν οι μαθητές δεν είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν την αυστηρή μαθηματική γλώσσα, οδηγούν μόνο στην αποθάρρυνση τους. Σιγά σιγά η προσπάθεια που πρέπει να καταβάλλουν οι μαθητές χάνει κάθε ευχαρίστηση και μετατρέπεται σε αγγαρεία.

Η προσπάθεια του καθηγητή πρέπει στα κεφάλαια της Άλγεβρας 1 και 4(ως το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μια δευτεροβάθμιας εξίσωση) και στα κεφάλαια 2, 3, 4 της Γεωμετρίας να επικεντρώνεται όχι σε δύσκολη ασκησιολογία, αλλά στη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών που έχουν οι μαθητές διδαχθεί στο Γυμνάσιο και στην κατάκτηση των διαδικασιών (αναλυτική σκέψη, δημιουργία εικασιών και υποθέσεων μέσω της διαίσθησης, συνθετική σκέψη, αποδεικτικές μεθόδους, διερευνητική εργασία).

Οι τεχνικές πρέπει βεβαίως να γίνουν κι αυτές κτήμα των παιδιών μέσω των ασκήσεων, αλλά αυτό ας μη γίνεται το άπαν στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Ειδικές δυσκολίες στην ¨Αλγεβρα

Έχω ήδη αναφερθεί στο πρώτο κεφάλαιο. Το πρώτο διαγώνισμα στην Άλγεβρα που θα επηρεάσει και το βαθμό του 1ου τετραμήνου μπαίνει συνήθως στις απόλυτες τιμές. Εκεί εμφανίζονται οι ασκήσεις με τα διπλά απόλυτα, με τις περίεργες εξισώσεις που δεν λύνονται με βοηθητικό άγνωστο, αλλά που για τις διάφορες τιμές του χ, πρέπει ο μαθητής να λύσει 3 η 4 εξισώσεις και να αποκλείσει κάποιες λύσεις. Πολύ συχνά ακούγεται η φράση ακόμα και από πολύ καλούς μαθητές «Δεν τα έγραψα όλα, γιατί δεν πρόλαβα».

Στο 4ο κεφάλαιο που ακολουθεί οι μαθητές δυσκολεύονται μεν να παρακολουθήσουν την απόδειξη που καταλήγει στην επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Είναι προτιμότερο να δείξουμε με παραδείγματα την συμπλήρωση του τετραγώνου και τη δημιουργία της διακρίνουσας. και να μείνουμε περισσότερο στη σημασία της διακρίνουσας για τον αριθμό και το είδος των ριζών.

Στο 2ο κεφάλαιο τα στοιχεία θεωρίας συνόλων είναι σχετικά φιλικό μάθημα στους μαθητές. Ιδιαίτερη σημασία έχει να κατανοήσουν οι μαθητές τη χρησιμότητα της συνάρτησης στην καθημερινή ζωή. Σε ερώτηση μου προς τους μαθητές πως τους φαίνεται το κεφάλαιο των συναρτήσεων, πολλοί μαθητές απάντησαν «είναι κάπως βαρετό, διότι είναι πολύ θεωρητικό». Κι αυτό γιατί στο κεφάλαιο αυτό δεν έχουν να εφαρμόσουν τεχνικές , όπως να λύσουν μια εξίσωση, αλλά έχουν να κατανοήσουν έννοιες όπως η συνάρτηση, η μονοτονία της, κλπ. Οι έννοιες της συμμετρίας και της μονοτονίας γίνονται κατανοητές από πολλές γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Αν προσεγγίσουμε τη μονοτονία μόνο με εφαρμογή των ορισμών, οι μαθητές αντιμετωπίζουν ιδιαίτερη δυσκολία στη χρήση των ανισοτικών σχέσεων που πρέπει να δημιουργηθούν. Κι εδώ ο όγκος και ο βαθμός δυσκολίας των ασκήσεων δεν πρέπει να είναι αποκαρδιωτικός.

Στα συστήματα οι μαθητές βρίσκονται πάλι στα γνώριμα νερά των τεχνικών και όχι της θεωρίας. Τα πράγματα δυσκολεύουν όταν πρόκειται να λύσουν πρόβλημα.

Η μελέτη του τριωνύμου γίνεται μάλλον βιαστικά διότι πλησιάζει πια το τέλος της χρονιάς και ο καθηγητής έχει οδηγίες από το σχολικό σύμβουλο να ολοκληρώσει το 4ο κεφάλαιο μέχρι το τέλος των μαθημάτων. Οι μαθητές συναντούν δυσκολίες να καταλάβουν τις μετατοπίσεις θεωρητικά. Είναι πολύ χρησιμότερο να δουν τις γραφικές παραστάσεις πολλών συναρτήσεων με το ίδιο α και να βγάλουν μόνοι τους τα συμπεράσματα για την οριζόντια και την κατακόρυφη μετατόπιση. Πολύ χρήσιμο εποπτικό μέσο είναι εφαρμογές στον Η/Υ που μας δίνουν πολλές τέτοιες γραφικές παραστάσεις προς σύγκριση, με σχεδιαστική ακρίβεια και σε ελάχιστο χρόνο. Δυστυχώς, πολλοί λίγοι συνάδελφοι έχουν την εξοικείωση που απαιτείται με τον Η/Υ για να χρησιμοποιήσουν τις δυνατότητες που έχει.

Το ίδιο θα πρέπει να γίνεται και με το πρόσημο του τριωνύμου. Ο μαθητής πρέπει να καταλάβει μέσω της γραφικής παράστασης που θα βρίσκονται οι τιμές της συνάρτησης όταν το x διατρέχει το R και μέσα από κει να καταλάβει γιατί πρέπει να βρει τη διακρίνουσα και να υπολογίσει τις ρίζες και τέλος να κάνει το πινακάκι με το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του x.

Αν οι μαθητές έχουν καταλάβει το πρόσημο του τριωνύμου, οι ανισώσεις δευτέρου βαθμού, δεν παρουσιάζουν δυσκολία, αν και διδάσκονται με μηχανικό τρόπο, και όχι μέσα από γραφικές παραστάσεις.

Ειδικές δυσκολίες στη Γεωμετρία

Παρόλο που δεν γίνεται αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας, η Γεωμετρία εξακολουθεί να έχει την αυστηρή δομή της. Ο μαθητής δεν το καταλαβαίνει αυτό και πολύ συχνά θα θελήσει να χρησιμοποιήσει θεωρήματα που έχει μάθει

αποσπασματικά στο Γυμνάσιο, που έπονται στη δομή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και που διδάσκονται πολύ αργότερα, π.χ. βρίσκεται στην ισότητα των τριγώνων και θέλει να λύσει μια άσκηση με Πυθαγόρειο θεώρημα. Όταν ο καθηγητής λέει πως δεν μπορεί, ο μαθητής αντιτάσσει πως το έχει μάθει στο Γυμνάσιο. Ο καθηγητής δεν πρέπει να δώσει στο μαθητή την εντύπωση πως ότι έμαθε στο Γυμνάσιο είναι άχρηστο και πως τώρα θα το ξαναμάθει σωστά. Όταν κλονίζουμε την εμπιστοσύνη του μαθητή στις γνώσεις του, τον πείθουμε πως η αναζήτηση της γνώσης και η μάθηση είναι διαδικασία χωρίς νόημα.
Από τα πρώτα κεφάλαια της Γεωμετρίας, οι μαθητές πρέπει να κάνουν μόνοι τους σχήματα. Και να μαθαίνουν την καινούργια ορολογία μέσα από τα σχήματα που κατασκευάζουν οι ίδιοι. Ίσως είναι πιο χρονοβόρα διαδικασία, αλλά πολύ πιο αποδοτική, αφού μόνο έτσι ο μαθητής κατανοεί τις γεωμετρικές έννοιες. Σχεδιάζοντας προσεγγίζει διαισθητικά την πρόταση που του ζητείται να κατανοήσει ή να αποδείξει. Ένα μάθημα γεωμετρίας που ο καθηγητής κάνει όλα τα σχήματα στον πίνακα και ο μαθητής απλώς κοιτάζει και καλείται να απαντήσει σε ερωτήσεις, είναι ένα κακό μάθημα γεωμετρίας. Στη γεωμετρία, ο μαθητής πρέπει να παλέψει με το σχήμα, για να του φανερώσει αυτό, τις εικασίες που πρέπει να κάνει και τα θεωρήματα που πρέπει να χρησιμοποιήσει.
Οι αποδείξεις των θεωρημάτων της Γεωμετρίας –όσες έχουν μείνει- δεν μαθαίνονται από το μαθητή, αν δεν τις αποστηθίσει (παράδειγμα: η απόδειξη του θεωρήματος 5.7 για το βαρύκεντρο τριγώνου). Όμως δεν μπορούμε να κάνουμε Ευκλείδεια Γεωμετρία χωρίς απόδειξη. Οι μαθητές μας έρχονται από το γυμνάσιο με κάποια στερεότυπα γνώσεων, που δεν περιλαμβάνουν αποδεικτικές διαδικασίες. Η απόδειξη πρέπει να διδάσκεται στους μαθητές σαν ένα απαραίτητο στοιχείο, όχι μόνο για την κατανόηση της Γεωμετρίας, αλλά της ανθρώπινης λογικής. Και ο καθηγητής πρέπει να αφιερώσει χρόνο για να δείξει αναλυτικά την απόδειξη, ώστε και οι μαθητές να μπορέσουν σιγά σιγά να κάνουν αποδείξεις μόνοι τους και όχι να τις απομνημονεύουν.
Η ΄Αλγεβρα και η Γεωμετρία εξετάζονταν μέχρι πέρυσι στη Β΄Λυκείου. Έτσι οι μαθητές από την Α’ Λυκείου έδιναν κάποια προσοχή στη Γεωμετρία, αφού όλη η ύλη εξεταζόταν ουσιαστικά στη Β΄ Λυκείου. Τώρα που η Γεωμετρία δεν εξετάζεται στη Β΄ Λυκείου , νομίζω ότι οι μαθητές δεν θα έχουν πια ένα σοβαρό κίνητρο για τη μελέτη της.
Το μήνυμα που λαμβάνω από τα σχολεία που επισκέπτομαι, είναι ότι το ενδιαφέρον των μαθητών της Β΄ Λυκείου έχει μειωθεί εφέτος για όλα τα μαθήματα. Κι αναρωτιέμαι, αν αυτό είναι που πετύχαμε για τα παιδιά μας: Η μάθηση να μην είναι πια δικαίωμα για το οποίο πρέπει να αγωνιστούν, αλλά μια υποχρέωση που επιβάλλουν οι εξετάσεις.

Σας ευχαριστώ.

Λύνοντας ένα πρόβλημα ανάλυσης με την βοήθεια σχήματος.

Απόστολος Κ. Δέμης
Λύκειο Βαρβακείου Σχολής

Ο όρος σχήμα στην ανάλυση έχει ευρύτερο περιεχόμενο από αυτό που του αποδίδεται συνήθως: σχήμα στην ανάλυση μπορεί να είναι

- μια γραφική παράσταση συνάρτησης,
- ένα δενδροδιάγραμμα,
- μια διάταξη στο επίπεδο ή στον χώρο, ακόμη και
- ένας τύπος.

Ένα σχήμα είναι δυνατόν

- να μας οδηγήσει στην ορθή επιλογή στρατηγικής επίλυσης ενός προβλήματος ή
- να συνεισφέρει καθοριστικά στην συγκρότηση μιας απόδειξης.

Η συνεισφορά του σχήματος στην απόδειξη προτάσεων της ανάλυσης νομίζω ότι φαίνεται καθαρά στην ακόλουθη πειραματική προσπάθεια που έγινε σε τμήμα της Θετικής Κατεύθυνσης του σχολείου μας. Οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν την ακόλουθη άσκηση:

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (έχει συνεχή τρίτη παράγωγο.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε
$f(a)\cdot f'(a)\cdot f''(a)\cdot f'''(a)\ \geq\ 0$.[1]

Η επίλυσή της έγινε με τα ακόλουθα βήματα.

1^{ο} βήμα

Μετά από αρκετή συζήτηση καταλήξαμε ότι για να αποδείξουμε την πρόταση αυτή αρκεί να αποδείξουμε την ακόλουθη ισοδύναμη πρόταση:

Αν είναι $\boldsymbol{f(x)\cdot f'(x)\cdot f''(x)\cdot f'''(x)\neq 0}$ ***για κάθε*** $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}}$***,***

τότε υπάρχει $\boldsymbol{a\in\mathbb{R}}$ ***τέτοιο, ώστε*** $\boldsymbol{f(a)\cdot f'(a)\cdot f''(a)\cdot f'''(a)>0}$***.***

Εδώ πρέπει να επισημάνω ότι σε αυτό το βήμα οι μαθητές συνάντησαν τις περισσότερες δυσκολίες, καθώς η ισοδυναμία των δύο προτάσεων δεν έγινε εύκολα κατανοητή.

2^{ο} βήμα

Ξεκινήσαμε την απόδειξη υποθέτοντας ότι είναι $f(x)\cdot f'(x)\cdot f''(x)\cdot f'''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Στο ερώτημα «τι συμπεραίνουμε από αυτήν την υπόθεση;» οι μαθητές απάντησαν ότι:

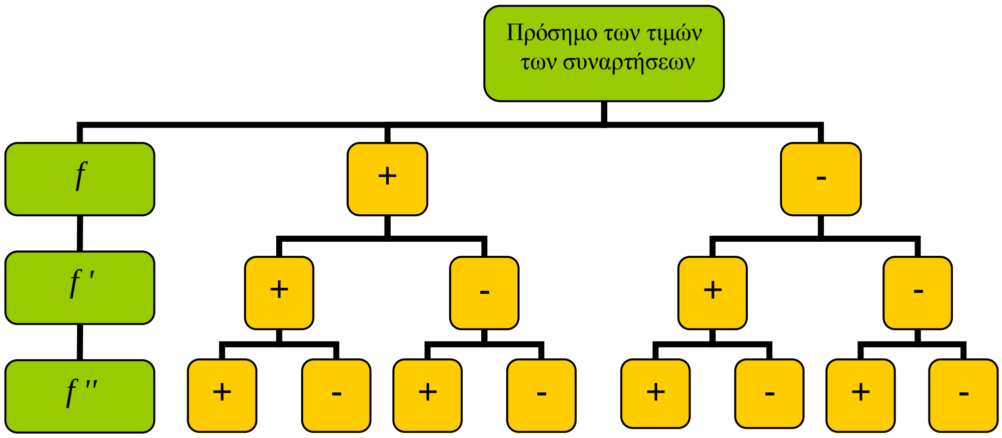
---

[1] The Fifty-Eighth William Lowell Putnam Mathematical Competition Saturday, December 5, 1998

εφόσον οι συναρτήσεις f, f', f'', f'''

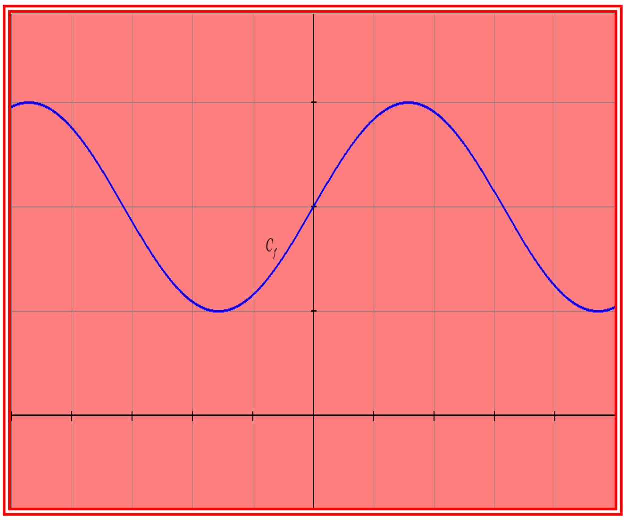
- είναι συνεχείς και
- δεν μηδενίζονται στο $\mathbb{R}$,

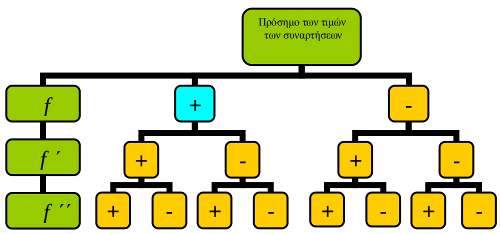
πρέπει να διατηρούν σταθερό πρόσημο σ΄ αυτό.
Τότε κατασκευάσαμε στον πίνακα το ακόλουθο δενδροδιάγραμμα με το πρόσημο των τριών πρώτων συναρτήσεων.



3ο βήμα

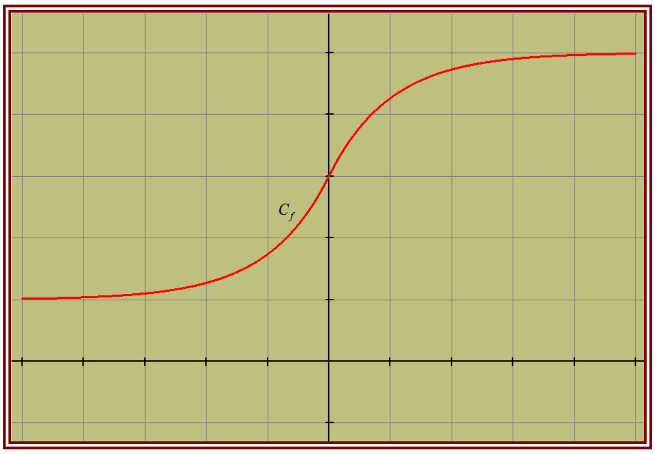
Βάσει του ανωτέρω δενδροδιαγράμματος ξεκινήσαμε την διερεύνηση της μορφής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f σε σχέση με τα πρόσημα των f, f', f''.
Υποθέσαμε ότι η συνάρτηση f έχει θετικές τιμές.
Στο ερώτημα «ποια είναι μια πιθανή μορφή της γραφικής παράστασης C_f της f ένας μαθητής έφτιαξε το ακόλουθο σχήμα.

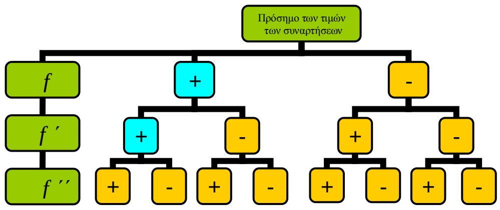




4ο βήμα
Υποθέσαμε ότι οι συναρτήσεις f και $f\,'$ έχουν θετικές τιμές.
Τότε οι μαθητές παρατήρησαν ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και ένας από αυτούς

έφτιαξε το ακόλουθο σχήμα.

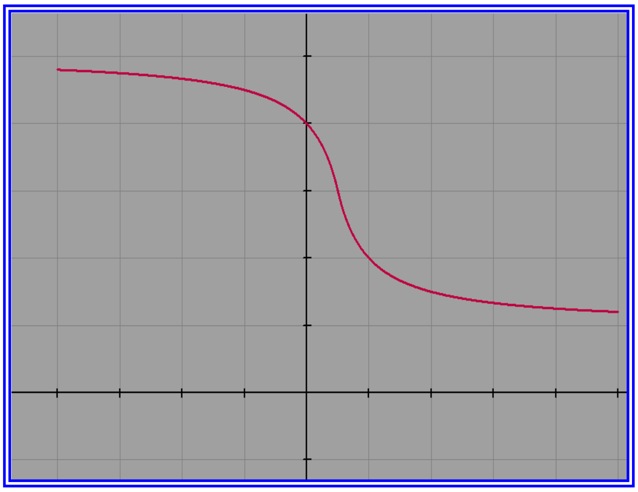


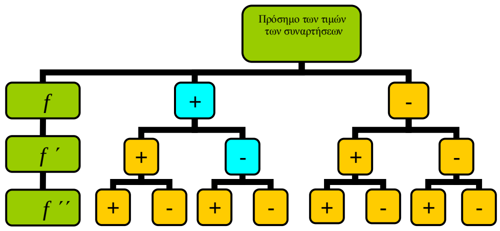


5ο βήμα

Τώρα υποθέσαμε ότι η συνάρτηση f έχει θετικές τιμές και η f' έχει αρνητικές τιμές.

Οι μαθητές παρατήρησαν ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και ένας από αυτούς έφτιαξε το ακόλουθο σχήμα.

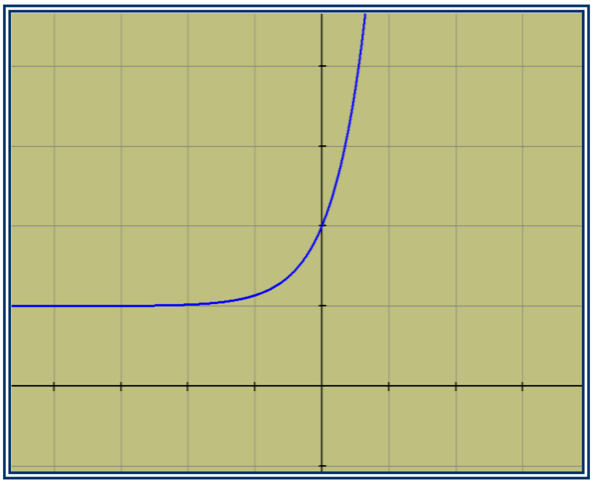


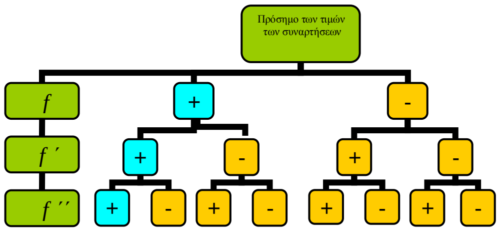


6ο βήμα

Υποθέσαμε ότι οι συναρτήσεις f, f' και f'' έχουν θετικές τιμές.

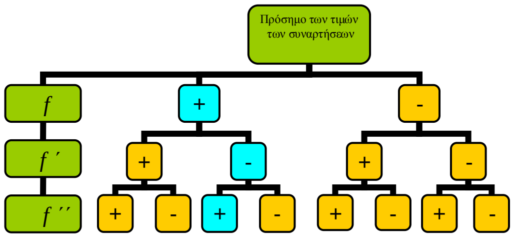
Οι μαθητές παρατήρησαν ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή και φτιάξαμε το ακόλουθο σχήμα.





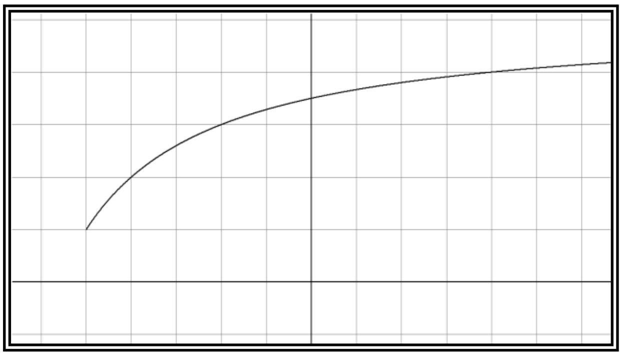
7ο βήμα

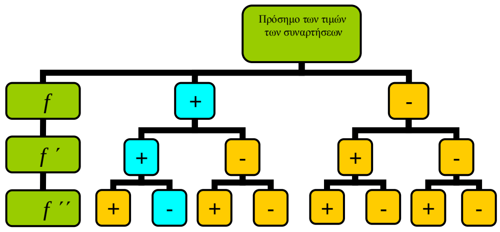
Υποθέσαμε ότι οι συναρτήσεις f και f'' έχουν θετικές τιμές και η συνάρτηση f' έχει αρνητικές τιμές.
Οι μαθητές παρατήρησαν ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή και ένας από αυτούς έφτιαξε το ακόλουθο σχήμα.



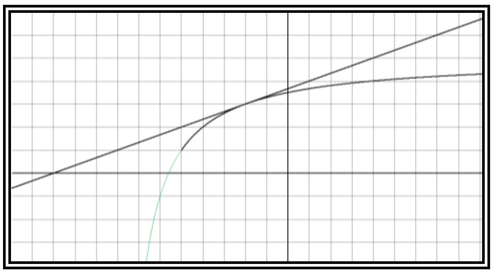
8ο βήμα

Τώρα υποθέσαμε ότι οι συναρτήσεις f και f' έχουν θετικές τιμές και η συνάρτηση f'' έχει αρνητικές τιμές.
Οι μαθητές είπαν ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη και ένας από αυτούς προσπάθησε να φτιάξει το σχήμα.

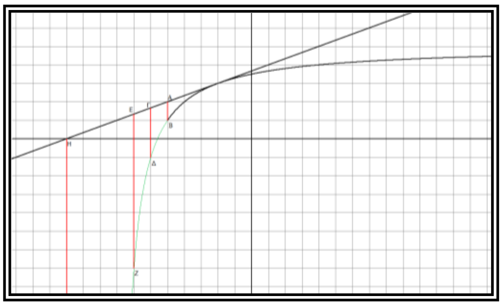




Όλοι διαπιστώσαμε ότι υπάρχει πρόβλημα. Δεν μπορούσαμε να φτιάξουμε την γραφική παράσταση μιας κοίλης και γνησίως αύξουσας συνάρτησης με θετικές τιμές. Στο ερώτημα «γιατί συμβαίνει αυτό;» μια μαθήτρια απάντησε λέγοντας ότι αυτό οφείλεται στο γεγονός πως η γραφική παράσταση μιας κοίλης συνάρτησης βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, εκτός του κοινού τους σημείου.
Τότε έφτιαξε το ακόλουθο σχήμα.

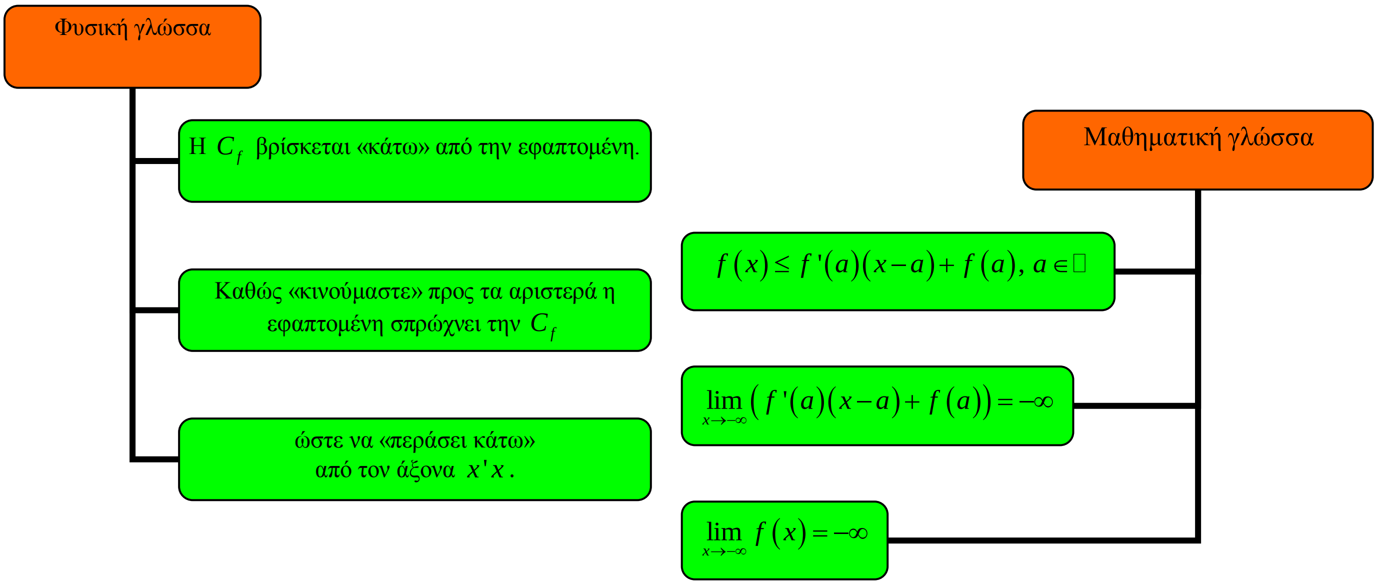


Εμπλουτίσαμε αυτό το σχήμα ως εξής:



9ο βήμα

Βλέποντας το σχήμα αυτό ένας μαθητής είπε: «καθώς η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη, όταν κινούμαστε προς τα αριστερά η εφαπτομένη σπρώχνει την C_f να περάσει κάτω από τον άξονα $x'x$».
Αυτό το γράψαμε στον πίνακα σε κατακόρυφη διάταξη. Οι μαθητές κλήθηκαν να μεταφράσουν την φυσική γλώσσα σε μαθηματική. Έτσι στον πίνακα είχαμε το ακόλουθο σχήμα.



(Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι είναι $f'(a)>0$)

Έτσι καταλήξαμε στο ότι εάν

- οι συναρτήσεις f και f' έχουν θετικές τιμές και
- η f'' έχει αρνητικές τιμές,

τότε η f κοντά στο $-\infty$ είναι αρνητική!

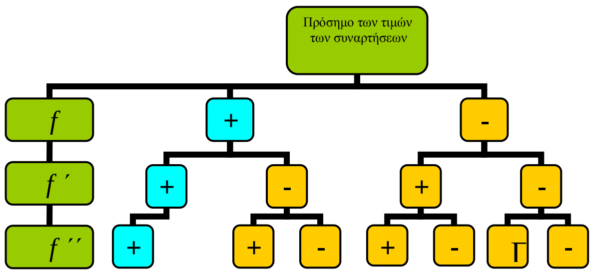
Αυτό όμως είναι άτοπο.

10ο βήμα

Στην συνέχεια βγάλαμε το συμπέρασμα ότι:

εάν οι συναρτήσεις f και f' έχουν θετικές τιμές, τότε

- η f δεν μπορεί να είναι κοίλη και επομένως
- η f'' είναι θετική.

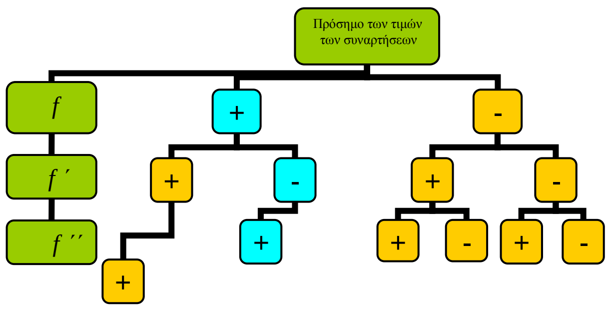


11ο βήμα

Οι μαθητές παρατήρησαν ότι με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι εάν

- η συνάρτηση f έχει θετικές τιμές και
- η f' έχει αρνητικές τιμές,

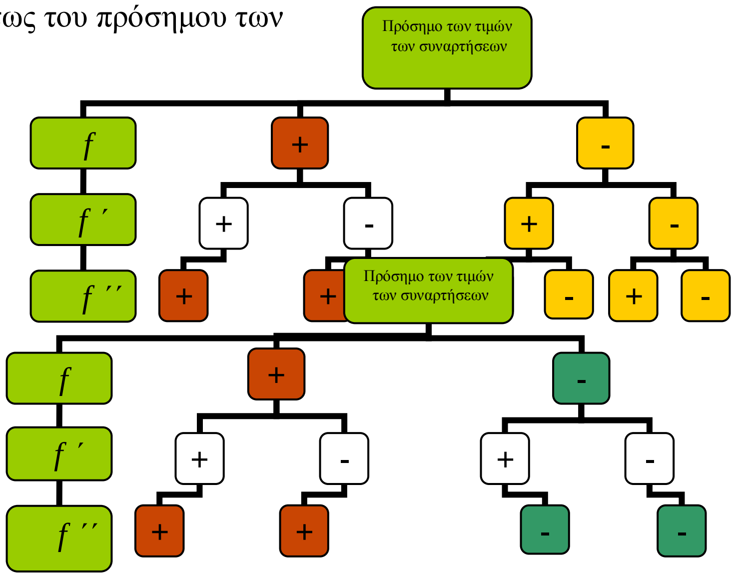
τότε:



- η f δεν μπορεί να είναι κοίλη και επομένως
- η f'' είναι θετική.

12^{o} βήμα

Έτσι καταλήξαμε στο ότι ισχύει πως εάν η συνάρτηση f έχει θετικές τιμές, τότε και η f'' έχει θετικές τιμές ανεξαρτήτως του πρόσημου των τιμών της f'.



13^{o} βήμα

Οι μαθητές παρατήρησαν ότι ομοίως συμπεραίνουμε ότι εάν η συνάρτηση f έχει αρνητικές τιμές, τότε και η f'' έχει αρνητικές τιμές, ανεξαρτήτως του πρόσημου των τιμών της f'.

14^{o} βήμα

Έτσι όλοι διαπιστώσαμε ότι εάν οι συναρτήσεις f και f'' δεν μηδενίζονται, τότε είναι «ομόσημες» και επομένως και οι συναρτήσεις f' και f''' αν δεν μηδενίζονται, είναι επίσης «ομόσημες».

Άρα αποδείξαμε (την ισχυρότερη από την ζητούμενη) πρόταση:

Εάν η έκφραση $f(x)\cdot f'(x)\cdot f''(x)\cdot f'''(x)$ δεν μηδενίζεται για κάποια τιμή του x, τότε για κάθε $x\in$ είναι $f(x)\cdot f'(x)\cdot f''(x)\cdot f'''(x) > 0$.

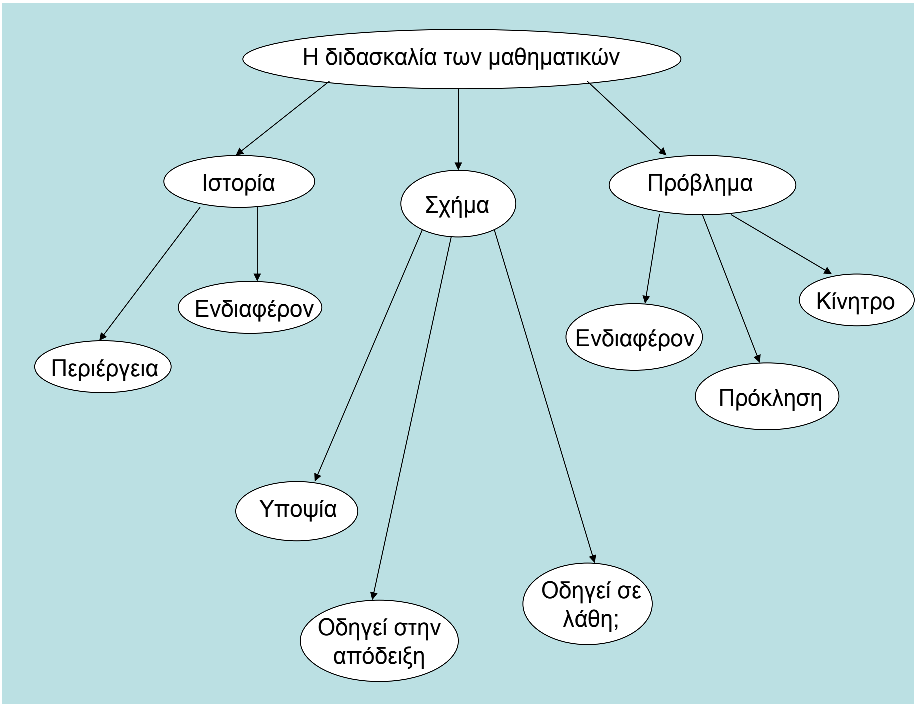
Σχήματα που «μιλούν», προβλήματα που «προκαλούν»

Εισηγητής : Βασίλης Κατσαργύρης
Καθηγητής στο Βαρβάκειο Πειραματικό Λύκειο

Στη εισήγησή μου θα αναπτύξω κάποιους από τους παράγοντες οι οποίοι κατά τη γνώμη μου πρέπει να λαμβάνονται σοβαρά υπόψη στη διαμόρφωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών γιατί κάνουν τη διδασκαλία τους ελκυστική.

Μεταξύ αυτών των παραγόντων είναι:

- **Η Ιστορική αναδρομή και προσέγγιση του θέματος**
- **Το Σχήμα (Σκίτσο-Δενδροδιάγραμμα)**
- **Η ανάδειξη της χρησιμότητας αυτών που διδάσκουμε μέσα από κατάλληλα προβλήματα.**



Στην συνέχεια θα προσπαθήσω με επιλεγμένα παραδείγματα να αναδείξω το ρόλο και τη συμβολή καθενός από τους τρεις αυτούς παράγοντες στην καλύτερη οργάνωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών.

• Η Ιστορική αναδρομή και προσέγγιση του θέματος

Όταν ξεκινάμε να διδάξουμε μια νέα ενότητα , ένα μεγάλο «Ιστορικό θεώρημα», ή να εισάγουμε μια νέα έννοια, τότε μια μικρή Ιστορική αναφορά μπορεί να διαμορφώσει ένα κλίμα περιέργιας ή να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών. Αυτό το μέρος της διδασκαλίας όμως απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή. Το ιστορικό σημείωμα, δεν πρέπει να περιέχει δύσκολες Μαθηματικές προσεγγίσεις και αναφορές γιατί τότε θα πετύχουμε το αντίθετο ακριβώς αποτέλεσμα από αυτό που προσδοκούμε. Θα φοβίσουμε τους μαθητές.

Ένα σύντομο Ιστορικό σημείωμα προκαλεί **περιέργεια** και ανεβάζει το **ενδιαφέρον** του μαθητή για βαθύτερη μελέτη του θέματος.

Έχω πειραματιστεί κατά καιρούς για το αποτέλεσμα που μπορεί να επιφέρει η διήγηση μιας *«Ιστορίας»* σχετικής με το αντικείμενο που θέλουμε να διδάξουμε. Έτσι για παράδειγμα διδάσκοντας το Ορισμένο Ολοκλήρωμα σε δύο παράλληλα τμήματα της ίδιας περίπου δυναμικότητας έκανα την εξής δοκιμή.

Στο πρώτο τμήμα ξεκίνησα την διδασκαλία κατευθείαν , ενώ στο δεύτερο έκανα μια σύντομη Ιστορική Αναδρομή.

«Ξεκινώντας από τον **Εύδοξο** (408-355π.χ.) και τη **μέθοδο της εξάντλησης** πέρασα στον **Αρχιμήδη** (287-212 π.χ.) για να καταλήξω μιλώντας γενικά για το ***διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό*** στον **Isaac Newton** (1642-1723 μ.χ.) και τον **Gottfried Leibniz** (1648-1716 μ.χ.)»

Το αποτέλεσμα ήταν το εξής:

Στο πρώτο τμήμα οι μαθητές προσπαθούσαν με κόπο να παρακολουθήσουν την πορεία του μαθήματος με όλα εκείνα τα αθροίσματα.

Στο δεύτερο τμήμα οι μαθητές παρακολουθούσαν με σαφώς μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Διατύπωναν μάλιστα και ερωτήσεις όπως:

- « Μέχρι ποιο σημείο έφθασαν οι μελέτες του **Αρχιμήδη** ; » ,
- «Τί έγινε στους ενδιάμεσους αιώνες μέχρι να φτάσουμε στους **Newton** και **Leibniz ; »**

• Το Σχήμα (Σκίτσο-Δενδροδιάγραμμα)

Από την αρχαία Ελλάδα μέχρι σήμερα το σχήμα έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών.

✓ ***Αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί:*** «Πάτησαν» γερά πάνω στο σχήμα για να μπορέσουν να διατυπώσουν Μαθηματικές έννοιες και να αποδείξουν Μαθηματικές προτάσεις.

✓ ***Αρχιμήδης:*** «Ορισμένα πράγματα αρχικά γίνονται φανερά σε μένα μέσα από το σχήμα ή με τη βοήθεια μιας μηχανικής μεθόδου, αν και αυτά πρέπει στη συνέχεια να αποδειχθούν με γεωμετρικό τρόπο, διότι η έρευνα με την παραπάνω μέθοδο δεν δίνει την πραγματική απόδειξη»

✓ ***Isaac Barrow:*** Δάσκαλος του I. Newton στο Cambridge, διατύπωσε πρώτος και απέδειξε ένα Γεωμετρικό Ισοδύναμο (ανάλογο) του ***Θεμελιώδους Θεωρήματος***. Την απόδειξη μπορούμε να την βρούμε στο έργο του: ***«Lectiones Opticae et Geometricae».***

✓ ***Robert Ellis*** *και* ***Denny Gulick:*** Στα παιδαγωγικά χαρακτηριστικά ***(Pedagogical Features)*** του βιβλίου τους με τίτλο ***«Calculus and Analytic Geometry»*** γράφουν:

«Όπου είναι δυνατόν χρησιμοποιούμε **το σχήμα** για να εισάγουμε έννοιες ή να οδηγηθούμε σε αποδείξεις έτσι ώστε ο αναγνώστης να μπορεί εύκολα **να απορροφήσει** τους ορισμούς και τα θεωρήματα».

✓ ***Michael Spivak:*** **«*Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*»**

«Από τότε που ο λογισμός πρόσφερε το πεδίο στο οποίο αναπτύχθηκαν οι σύγχρονοι τρόποι της Μαθηματικής Σκέψης, φάνηκε η ανάγκη να **ενισχυθεί η σχέση** της **διαίσθησης** με τη **λογική,** κατά την εξέταση των όμορφων εννοιών της Ανάλυσης.»

- ✓ ***G. Polya: " How To Solve It " E****πισημαίνει την αξία του σχήματος στην επίλυση προβλημάτων. «Τα μαθηματικά θεωρούνται ως η επιστήμη της απόδειξης. Αυτό όμως είναι η μία πλευρά τους. Πρέπει να μαντέψεις, να εικάσεις ένα Μαθηματικό θεώρημα. Πρέπει να μαντέψεις την ιδέα της απόδειξής του πριν το αποδείξεις. Πρέπει να συνδυάσεις παρατηρήσεις και να ακολουθήσεις αναλογίες . Ένα *σχήμα* ή ένα *διάγραμμα* βοηθάει στο να διατυπώσουμε μια εικασία,να *οπτικοποιήσουμε (visualize)*, να οργανώσουμε και να αναλύσουμε τις συνθήκες ενός προβλήματος ή ενός θεωρήματος».

- ✓ ***Gauss:*** « Γνώριζα τις λύσεις εδώ και πολύ καιρό, αλλά δεν ήξερα ακόμη πως να φτάσω σε αυτές ».

- ✓ ***Newton:*** « Είναι φανερό σε μένα και δεν θα αναλάβω να το αποδείξω στους άλλους »

- ✓ ***Galileo Galilei (IL SAGGIATORE)*** « Η φιλοσοφία είναι καταγεγραμμένη σε αυτό το τεράστιο βιβλίο-εννοώ το Σύμπαν- που βρίσκεται συνέχεια ανοικτό μπροστά μας , δεν μπορούμε όμως να το κατανοήσουμε, εκτός αν καταλάβουμε τη γλώσσα του και ερμηνεύσουμε τα στοιχεία με τα οποία έχει γραφεί. Είναι γραμμένο στη γλώσσα των Μαθηματικών, και τα στοιχεία του είναι τα *τρίγωνα,* οι *κύκλοι* και τα άλλα *Γεωμετρικά Σχήματα*, χωρίς τα οποία είναι ανθρωπίνως αδύνατο να γίνει κατανοητή έστω και μια του λέξη »..

- ✓ Όροι όπως ***"Visual Calculus"*** (By **David Schnider**-University of Maryland), ***"Visual Thinking"*** και ***"Proofs Without Words"*** (By **Roger B. Nelsen**) έχουν πλέον τη θέση τους στη διεθνή βιβλιογραφία.

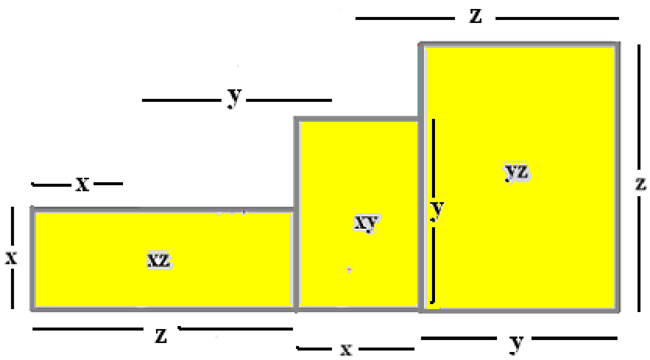
Μετά την παράθεση των παραπάνω απόψεων αναρωτιόμαστε :
Πόσο καθοριστικός μπορεί να είναι ο ρόλος του σχήματος στη διδασκαλία των Μαθηματικών;
Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε την απάντηση στο ερώτημα αυτό μέσα από κατάλληλα επιλεγμένα θέματα των Μαθηματικών.

Θέματα από το Λύκειο

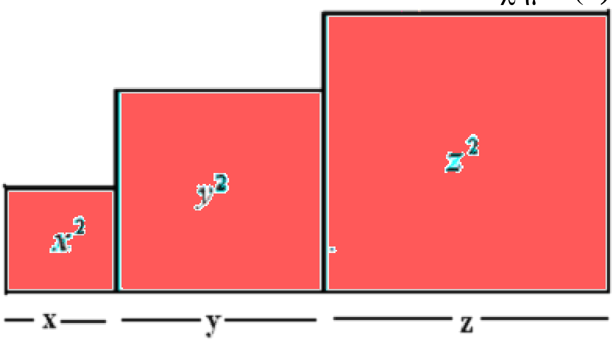
1) Τα σχήματα (1),(2)και (3) αποδίδουν γραφικά, για τους θετικούς αριθμούς x ,y, z την «απόδειξη» της ανισότητας

$$\mathrm{xy} + yz + zx \le x^2 + y^2 + z^2, \qquad \textbf{(1)}$$

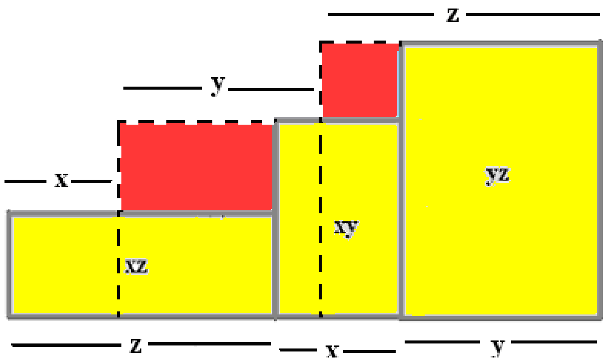
Το πρώτο μέλος της ανισότητας (1) αντιπροσωπεύεται από το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων του σχήματος (1) ενώ το δεύτερο μέλος της από το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων του σχήματος (2). Αν σχεδιάσουμε τα σχήματα (1) και (2) σε δύο διαφορετικές διαφάνειες και σύρουμε τη μία πάνω στην άλλη, λόγω της ισότητας $x+y+z=z+x+y$, θα προκύψει το σχήμα (3), από το οποίο φαίνεται καθαρά ότι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων είναι μικρότερο ή ίσο από το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων.



Σχήμα (1)



Σχήμα (2)

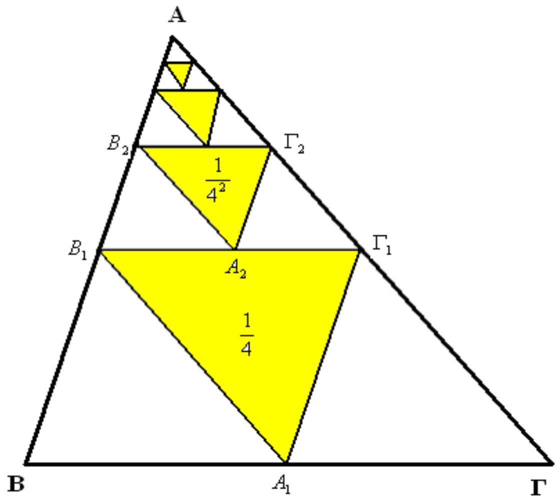


Σχήμα (3)

ΣΧΟΛΙΟ : *Κάθε φορά που χρησιμοποιούμε σχήμα για να «δικαιολογήσουμε» μια Μαθηματική Αλήθεια πρέπει να επισημαίνουμε στους μαθητές ότι η «δικαιολόγηση» αυτή δεν αποτελεί αυστηρή μαθηματική απόδειξη και ότι συνήθως αναφέρεται σε* ***ειδικές μόνο περιπτώσεις****. Στην προκειμένη περίπτωση «δικαιλογήσαμε» την ανισότητα μόνο για x, y, z θετικούς αριθμούς, ενώ όπως είναι γνωστό η ανισότητα αυτή ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς.*

2) Εδώ μπορούμε να ζητήσουμε από τους μαθητές να δοκιμάσουν με τη βοήθεια του σχήματος (4) να «δικαιολογήσουν» την ισότητα

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots=\frac{1}{3}, \quad (1)$$



Σχήμα (4)

Ισχύουν

$$(A_1B_1\Gamma_1)=\frac{1}{4}(\text{ΑΒΓ})$$

$$(A_2B_2\Gamma_2)=\frac{1}{4}(\text{ΑΒ}_1\Gamma_1)=\frac{1}{4^2}(\text{ΑΒΓ})$$

……………………………………

οπότε το άθροισμα των εμβαδών των γραμμοσκιασμένων τριγώνων είναι

$$\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+....\right].(AB\Gamma)\ , \quad (2)$$

Χωρίζουμε το σχήμα σε ορζόντιες λωρίδες, όπου κάθε γραμμοσκιασμένο τρίγωνο έχει εμβαδόν το $1/3$ του εμβαδού της αντίστοιχης λωρίδας. Δηλαδή ισχύουν

$$(A_1B_1\Gamma_1)=\frac{1}{3}(\text{ΒΓΓ}_1\text{Β}_1)$$

$$(A_2B_2\Gamma_2)=\frac{1}{3}(\text{Β}_1\Gamma_1\Gamma_2\text{Β}_2)$$

…………………………

οπότε το άθροισμα των εμβαδών των γραμμοσκιασμένων τριγώνων είναι

$$\frac{1}{3}(\text{ΒΓΓ}_1\text{Β}_1)+\frac{1}{3}(\text{Β}_1\Gamma_1\Gamma_2\text{Β}_2)+\ldots=\frac{1}{3}(AB\Gamma)\ , \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) « προκύπτει» η (1).

ΣΧΟΛΙΟ: Τα παραπάνω δεν αποτελούν αυστηρή μαθηματική απόδειξη γιατί δεν μπορούμε να προσθέτουμε κατά μέλη άπειρο πλήθος ισοτήτων. Εδώ βρίσκεται κρυμμένη η έννοια του ορίου, ωστόσο με το σχήμα επιτυγχάνουμε μια οπτικοποίηση του προβλήματος η οποία «πείθει» για την αλήθεια της ισότητας και απαντάει στο ερώτημα ***γ ι α τ ί   ε ί ν α ι   έ τ σ ι ;*** *Μένει όμως αναπάντητο το ερώτημα* ***π ώ ς ;*** *Στο ερώτημα αυτό απαντάμε με την απόδειξη, όταν η διδακτική πράξη το απαιτεί.*

4) *Στη Γ΄Λυκείου πολύ συχνά εμφανίζονται θέματα που περιέχουν τον αριθμό e. Στην ερώτηση των μαθητών ποιος είναι αυτός ο μαγικός αριθμός απαντάμε ότι είναι το όριο*

$$e = \lim_{\nu \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\nu} \right)^{\nu} \qquad (1)$$

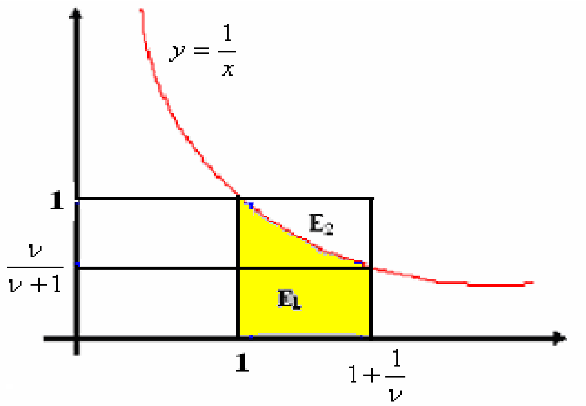
Στο ερώτημα « ***πως αποδεικνύεται;*** » δεν μπορούμε να τους απαντήσουμε γιατί η απάντηση βρίσκεται έξω από τους σκοπούς αυτής της τάξης.

Στο ερώτημα όμως « ***γιατί είναι έτσι;***» μπορούμε εύκολα να απαντήσουμε με τη βοήθεια του σχήματος (5), το οποίο «πείθει» για την αλήθεια της ισότητας και ικανοποιεί την **περιέργεια** του μαθητή

Από το σχήμα. (5) φαίνεται να «ισχύει»:

$$E_1 \le \int_1^{1+\frac{1}{\nu}} \frac{1}{x} dx \le E_2$$

Οπότε διαδοχικά έχουμε:



σχήμα (5)

$$\frac{1}{\nu} \cdot \frac{\nu}{\nu+1} \le \ln\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \le \frac{1}{\nu}.1$$

$$\frac{\nu}{\nu+1} \le \nu \ln\left(\nu + \frac{1}{\nu}\right) \le 1$$

$$\frac{\nu}{\nu+1} \le \ln\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \le 1$$

$$e^{\frac{\nu}{\nu+1}} \le \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \le e.$$

Εξάλλου ισχύει $\lim_{\nu \to \infty} e^{\frac{\nu}{\nu+1}} = e$, οπότε από την τελευταία ανισότητα και το κριτήριο της παρεμβολής προκύπτει η ισότητα (1).

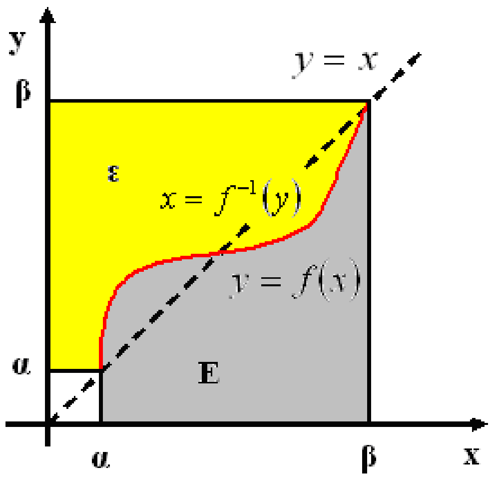
ΣΧΟΛΙΟ:

Η επιλογή της συνάρτησης $y = \frac{1}{x}$ *εικάζεται από την ισότητα* $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

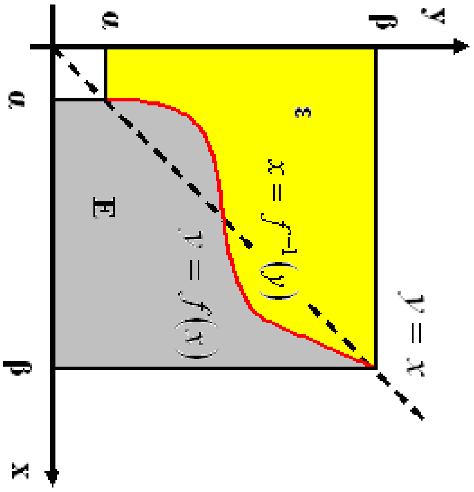
5) *Για οποιαδήποτε γνησίως αυξουσα και συνεχή συνάρτηση* f ***, με*** $f(x) \ge 0$***, ισχύει η ισότητα:***

$$\int_a^{\beta} \left(f(x) + f^{-1}(x) \right) dx = \beta^2 - \alpha^2$$

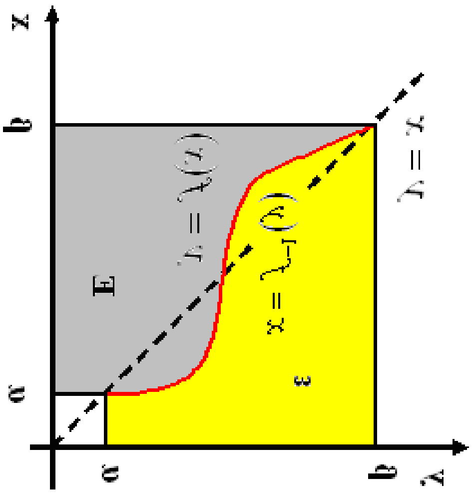
Από το σχήμα (6) με στροφή 90^0 κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού παίρνουμε το σχήμα (7) και με ανάκλαση (συμμετρία) ως προς τον άξονα y΄y παίρνουμε το σχήμα (8).



Σχήμα 6.



Σχήμα 7.



Σχήμα 8.

Είναι φανερό ότι $E=\int_{a}^{\beta} f(x)dx$ (από σχήμα 6) και $\varepsilon=\int_{a}^{\beta} f^{-1}(y)dy=\int_{a}^{\beta} f^{-1}(x)dx$ (από σχήμα 8). Από το σχήμα (6) εξάλλου έχουμε

Ε+ε = (Τετράγωνο πλευράς β) – (Τετράγωνο πλευράς α)

Οπότε είναι

$$\int_{a}^{\beta}\left(f(x)+f^{-1}(x)\right)dx=\int_{a}^{\beta} f(x)dx+\int_{a}^{\beta} f^{-1}(x)dx=\mathrm{E}+\varepsilon=\beta^2-\alpha^2 .$$

Από τα σχήματα 6, 7, και 8 προκύπτει ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1}

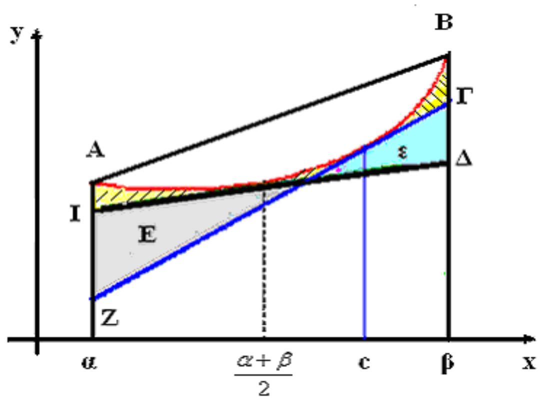
αντιπροσωπεύονται από την ίδια γραμμή αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η $x = f^{-1}(y)$ έχει ως πεδίο ορισμού της υποσύνολο του άξονα y΄y σε αντίθεση με την $y = f(x)$ της οποίας το πεδίο ορισμού είναι υποσύνολο του άξονα x΄x .

Έτσι στη συνέχεια για καλύτερη ***«οπτικοποίηση»*** θεμάτων στα οποία εμφανίζονται οι C_f και $C_{f^{-1}}$, θα μπορούμε να θεωρούμε μία μόνο γραφική παράσταση, η οποία θα αντιπροσωπεύει και τις δύο συναρτήσεις όπως φαίνεται στο σχήμα (6).

Όσα περιγράψαμε παραπάνω (στροφή και ανάκλαση) μπορούν να δικαιολογήσουν την διαδικασία που ακολουθούμε για να προσδιορίσουμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης $y = f(x)$ και συγκεκριμένα για να δικαιολογήσουμε γιατί όταν βρίσκουμε την $x = f^{-1}(y)$ θέτουμε όπου x το y και αντίστροφα.

6) Η συμβολή του σχήματος στην αποδεικτική διαδικασία.

α)Προσέγγιση εμβαδού με τις εφαπτόμενες της καμπύλης



σχήμα (9)

Στο σχήμα (9) φαίνεται η γραφική παράστσαση C_f μιας κυρτής συνάρτησης f. Η ΓΖ είναι μια τυχαία εφαπτομένη και η ΙΔ είναι η εφαπτομένη στο μέσον $c = \frac{\alpha+\beta}{2}$ του διαστήματος $[a, \beta]$. Από το σχήμα φαίνεται να ισχύει

$$\varepsilon \leq \mathrm{E}$$

που σημαίνει ότι

$$(\mathrm{AB\Delta I}) \leq (\mathrm{AB\Gamma Z})$$

Με άλλα λόγια το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f, τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ και την εφαπτομένη της C_f στο τυχόν σημείο $\mathrm{M}(c, f(c))$ *φαίνεται* να παίρνει την ***ελάχιστη τιμή του,*** όταν $c = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Επειδή όμως ότι *φαίνεται* δεν είναι πάντοτε αληθές, καλό είναι να μάθουμε τους μαθητές μας να επιβεβαιώνουν τις εικασίες , που προκύπτουν από το σχήμα, με μια απόδειξη. Διατυπώνουμε λοιπόν με τη βοήθεια του σχήματος εικασίες σε μορφή προτάσεων, τις οποίες στη συνέχεια προσπαθούμε να αποδείξουμε . Έτσι για παράδειγμα το σχήμα (9) μας οδηγεί στο να διατυπώσουμε την παρακάτω πρόταση και στη συνέχεια να την αποδείξουμε.

Πρόταση: ***Έστω μια συνάρτηση*** f ***για την οποία ισχύει*** $f''(x) > 0, x \in [\alpha, \beta]$. ***Να βρεθεί σημείο c του*** $[\alpha, \beta]$ ***τέτοιο ώστε το εμβαδόν που***

περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη της στο σημείο Μ (c , f(c)) και τις ευθείες χ=α και χ=β να είναι ελάχιστο.

Απόδειξη: Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Μ (c , f(c)) είναι
(ε) : $y = f(c) - f'(c)(x-c)$.
Τότε, αν λάβουμε υπόψη μας ότι στην κυρτή συνάρτηση τα σημεία της εφαπτομένης, εκτός από το σημείο επαφής, βρίσκονται κάτω από τα σημεία της C_f, τότε για το παραπάνω εμβαδόν έχουμε

$$E(c) = \int_a^\beta f(x)dx - \int_a^\beta [f(c) - f'(c)(x-c)]dx$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x)dx - f'(c)\frac{\beta^2}{2} + cf'(c)\beta - f(c)\beta + f'(c)\frac{a^2}{2} - cf'(c)\alpha + f(c)\alpha$$

οπότε είναι $$E'(c) = (\beta-\alpha)f''(c)\left[c - \frac{a+\beta}{2}\right], \quad f''(c) > 0.$$

Από το πρόσημο του $E'(c)$ προκύπτει ότι το *E(c)* γίνεται *ελάχιστο* στη θέση

$$c = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

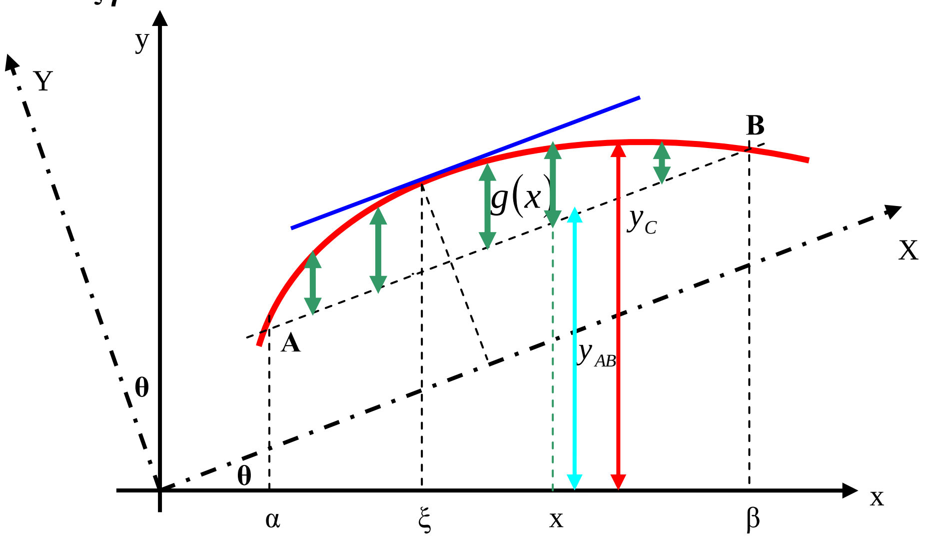
β) Για την περίπτωση που η συμβολή του σχήματος στην αποδεικτική διαδικασία δεν έγινε ακόμη φανερή θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια με συγκεκριμένα παραδείγματα να ενισχύσουμε την άποψη αυτή. Για παράδειγμα με τη βοήθεια κατάλληλου σχήματος μπορούμε εύκολα να οδηγηθούμε στην απόδειξη του θεωρήματος Μέσης Τιμής

Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.)

Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'(\xi)$$

Απόδειξη:



Σχήμα (10)

Οι άξονες ΟΧ και ΟΥ που προκύπτουν από την στροφή των αξόνων Οx και Oy κατά γωνία **θ** παραπέμπουν στο *Θεώρημα Rolle* . Αν επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην 3η υπόθεση του θεωρήματος του *Rolle,* $f(\alpha)=f(\beta)$, η οποία απουσιάζει από τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. εικάζουμε ότι πρέπει να αναζητήσουμε μια βοηθητική συνάρτηση g που να ικανοποιεί την υπόθεση αυτή. Δηλαδή μια συνάρτηση για την οποία να ισχύει $g(a)=g(\beta)$. Μια τέτοια συνάρτηση, όπως φαίνεται στο σχήμα, μπορεί να είναι η ***διαφορά***

$$g(x)=y_C-y_{AB}$$

που στο στο σχήμα 10 αντιπροσωπεύεται από τα διπλά βελάκια και για την οποία ισχύουν:

$$g(\alpha)=g(\beta)=0$$

$$y_C=f(x) \qquad \text{και} \qquad y_{AB}=f(a)+\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\alpha)$$

Είναι δηλαδή

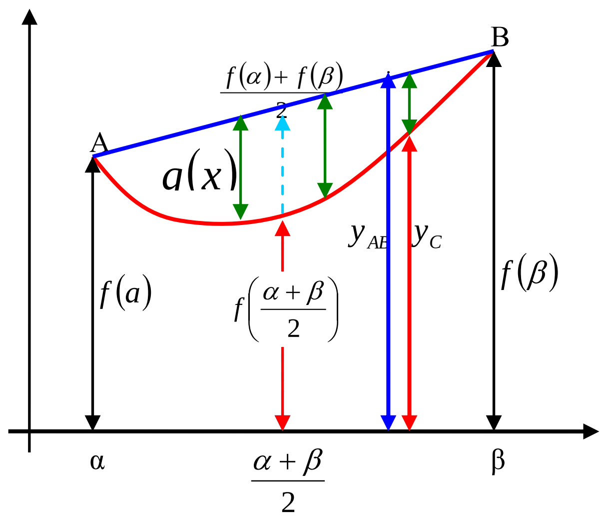
$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\alpha) \ .$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα *Rolle* στη συνάρτηση αυτή έχουμε την απόδειξη του Θ.Μ.Τ. Μπορεί κανείς να φανταστεί ότι θα μπορούσε να φτάσει στη συνάρτηση g χωρίς τη συμβολή του σχήματος;

γ) Ένα ακόμη χαρακτηριστικό παράδειγμα, την απόδειξη του οποίου μπορούμε εύκολα να διαπραγματευτούμε με τη βοήθεια του σχήματος, είναι η γνωστή μας ανισότητα ***Jensen.***

Έστω η κυρτή συνάρτηση f ***στο διάστημα*** $[\alpha,\beta]$***. Να δειχθεί ότι ισχύει***

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{f(a)+f(\beta)}{2} \qquad \textit{(ανισότητα Jensen)}$$



Σχήμα (11).

Αν παρατηρήσουμε το σχήμα 11 η ανισότητα φαίνεται να είναι προφανής. Επειδή όμως, όπως και σε προηγούμενα παραδείγματα επισημάναμε, ότι «βλέπουμε» δεν είναι πάντοτε αληθές, η επιβεβαίωση της αλήθειας ενός ισχυρισμού θα γίνεται πάντοτε με την απόδειξή του. Ας σημειώσουμε ακόμη μια φορά εδώ ότι η αδυναμία του σχήματος να δώσει μια καθαρή Μαθηματική Απόδειξη δεν μειώνει καθόλου το ρόλο του στην αποδεικτική διαδικασία. Θα αποδείξουμε την ***ανισότητα Jensen*** με το σχήμα 11 να μας οδηγεί. Όπως φαίνεται στο σχήμα αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε σημείο της χορδής ΑΒ βρίσκεται «***πάνω»*** από κάθε σημείο της C_f με την ίδια τετμημένη. Δηλαδή ότι για τη συνάρτηση $g(x)=y_{AB}-y_C$ ισχύει

$$g(x)=y_{AB}-y_C>0, \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\beta].$$

Με συλλογισμούς ανάλλογους με αυτούς που κάναμε στο προηγούμενο θέμα, από το σχήμα προκύπτει ότι :

$$g(x)=f(a)+\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\alpha)-f(x)$$

οπότε

$$g'(x)=\frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-\alpha}-f'(x)$$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[a,\beta]$ διότι η f είναι κυρτή στο $[a,\beta]$. Άρα η g' είναι γνησίως φθίνουσα $[a,\beta]$. Γεννιέται το ερώτημα

(και τώρα τί;)

Αν παρακολουθήσουμε τις τιμές της $g(x)$, (η οποία αντιπροσωπεύται στο σχήμα από τα διπλά βελάκια), καθώς το x κινείται στο διάστημα $[a,\beta]$ βλέπουμε ότι ισχύει

$$g(a)=g(\beta)=0$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του ***Rolle*** υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)\ :\ g'(\xi)=0$.
Εξάλλου η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a,\beta]$. Επομένως έχουμε τον πίνακα:

x	α	ξ	β
$g'(x)\downarrow$	+	0	–
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Από τη μονοτονία της g και τη συνθήκη $g(a)=g(\beta)=0$ προκύπτει ότι το 0 είναι ελάχιστη τιμή της g στο $[a,\beta]$, οπότε ισχύει $g(x)>0$, για κάθε $x\in(a,\beta)$.

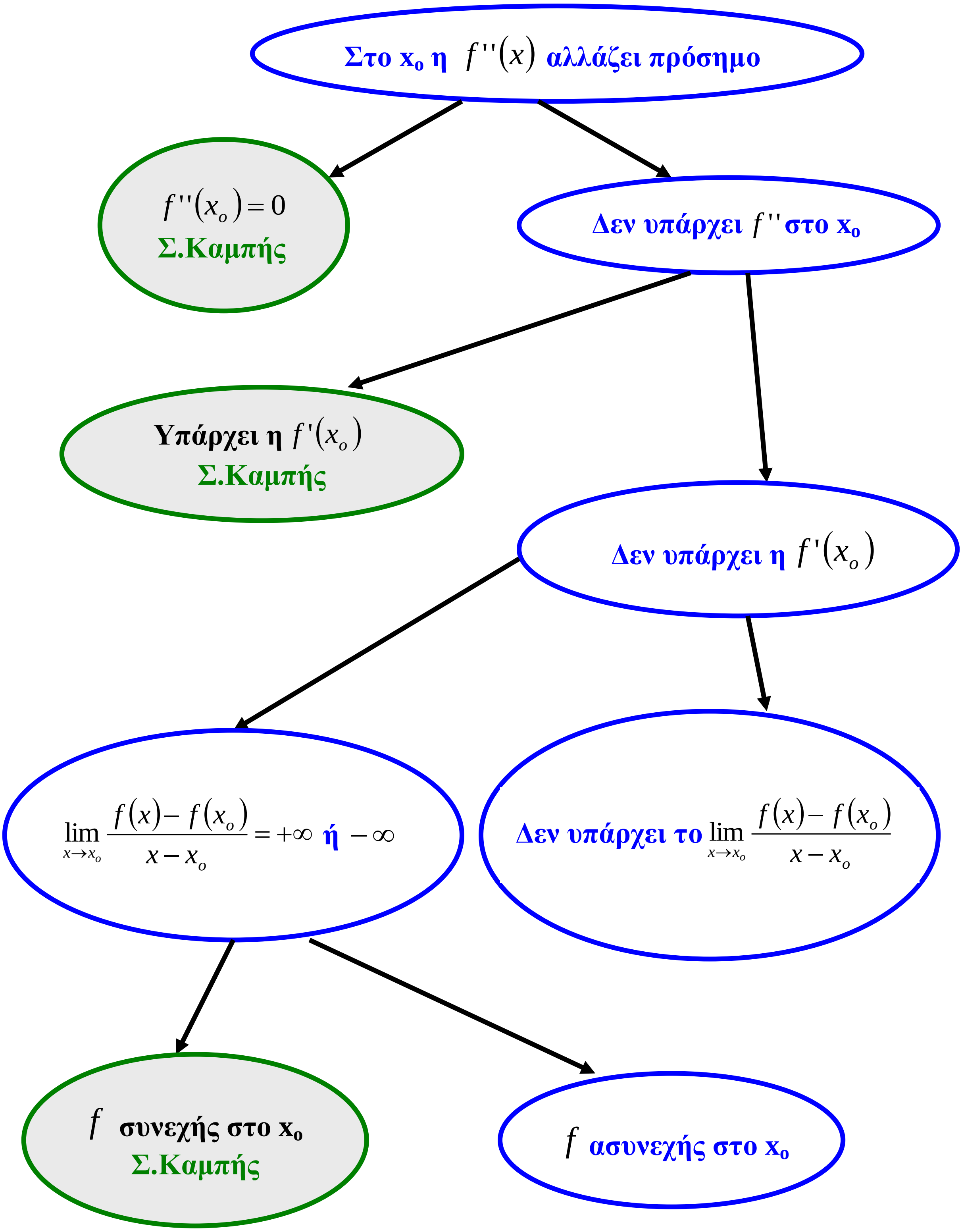
ΣΧΟΛΙΟ 1: *Για την κυρτή συνάρτηση χρησιμοποιούμε τον ορισμό που δίνεται στο σχολικό βιβλίο «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ» Γ΄Λυκείου Ο.Ε.Δ.Β.*

ΣΧΟΛΙΟ 2 : *Παρατηρούμε ότι η βοηθητική συνάρτηση την οποία χρησιμοποιήσαμε στα δύο τελευταία παραδείγματα **β)** και **γ)** προκύπτει από το σχήμα με τον ίδιο τρόπο. Αυτό σημαίνει ότι στην **ανισότητα Jensen** βρίσκεται κρυμμένο το Θεώρημα Μέσης Τιμής. Πράγματι υπάρχει εναλλακτική απόδειξη της ανισότητας η οποία βασίζεται στο Θ.Μ.Τ και την οποία μπορούμε να βρούμε στο Σχολικό βιβλίο της Ανάλυσης της Α΄Δέσμης έκδοση Ο.Ε.Δ.Β 1998 σελίδα224 (Β.Κατσαργύρης, Κ.Μεντής, Γ.Παντελίδης, Κ. Σουρλάς).*

7) Δεντροδιαγράμματα.

Πολλές φορές ένα δεντροδιάγραμμα διευκολύνει στην οργάνωση , στην επανάληψη ή ακόμη και στην κατανόηση του μαθήματος. Το δεντροδιάγραμμα που ακολουθεί αναφέρεται στην επανάληψη και οργάνωση της ενότητας των σημείων καμπής.

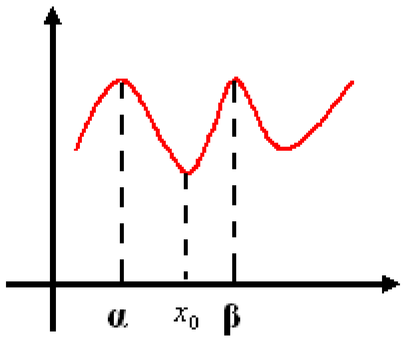
ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ



8) Το σχήμα αποτελεί απόδειξη τελικά;

Στις προηγούμενες σελίδες προσπαθήσαμε να ανδείξουμε την θετική συμβολή του σχήματος στη διατύπωση εικασιών αλλά και στην αποδεικτική διαδικασία των εικασιών αυτών. Είναι πλέον ώριμο το ερώτημα *« Μ π ο ρ ο ύ μ ε π ά ν τ ο τ ε ν α ε μ π ι σ τ ε υ ό μ α σ τ ε τ ο σ χ ή μ α ; »* . Εδώ είναι απόλυτη ανάγκη να επισημάνουμε στους μαθητές μας ότι η ***εντύπωση-διαίσθηση*** που διαμορφώνεται, μέσα από ένα σχήμα, δεν οδηγεί πάντοτε στην αλήθεια. Για παράδειγμα:

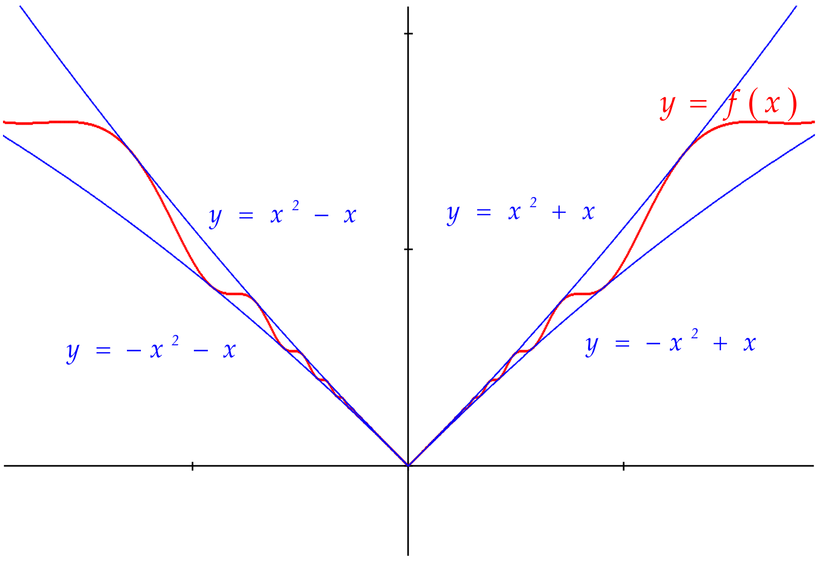
Α) Αν ζητήσουμε από τους μαθητές να μας σχεδιάσουν μια συνάρτηση που παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο .



Σχήμα 12.

Θα διαπιστώσουμε ότι σχεδόν όλοι θα χαράξουν κάτι σαν αυτό που φαίνεται στο σχήμα 12. Αν τους ρωτήσουμε για τη μονοτονία της συνάρτησης εκατέρωθεν του x_0 θα μας απαντήσουν ότι είναι γνησίως φθίνουσα αριστερά του x_0 π.χ. σε διάστημα $[\alpha, x_0]$ και γνησίως αύξουσα δεξιά του x_0 π.χ. σε διάστημα $[x_0, \beta]$. Αυτό όμως δεν είναι αληθές, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε με τη βοήθεια της συνάρτησης f (σχ.13), με τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \eta\mu \dfrac{1}{x} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x = 0 \\ -x - x^2 \eta\mu \dfrac{1}{x} & , \ x < 0 \end{cases}$$



Σχήμα 13

για την οποία αποδεικνύεται ότι ισχύει :

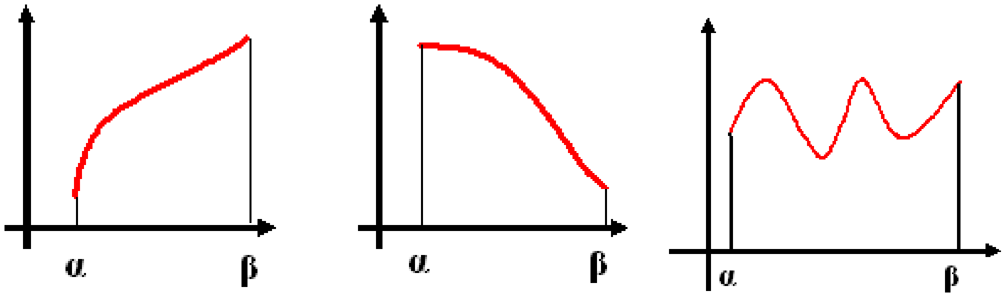
$$f(x) \geq f(0), \text{ για } x \in [-1,1],$$

δηλαδή το $f(0)$ είναι τοπικό ελάχιστο,

Ωστόσο δεν υπάρχουν διαστήματα της μορφής $(a,0)$ ή $(0,b)$ όπου η συνάρτηση να είναι γνησίως μονότονη (Βλέπε. και σχήμα 13). Εδώ παρατηρούμε ότι ενώ το απλό σχήμα 12 μας οδηγεί σε λανθασμένα συμπεράσματα το σχήμα 13 μας επαναφέρει στην πραγματικότητα και αποκαθιστά κατά κάποιο τρόπο την αλήθεια.

Β) Αν ρωτήσουμε τους μαθητές μας αν τα άκρα κλειστού διαστήματος του πεδίου ορισμού είναι πάντοτε θέσεις τοπικών ακρότατων;

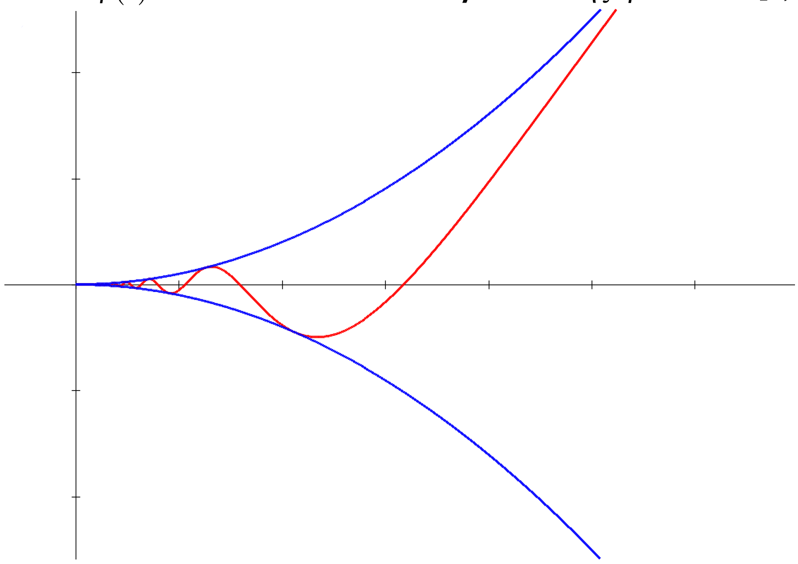
Θα μας απαντήσουν «ναι», έχοντας στο νου τους κάποιο από τα προφανή σχήματα 14



Σχήμα 14.

Όμως, αυτό δεν είναι αληθές, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε με τη βοήθεια της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} & , \ x>0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$

(φαίνεται και στο σχήμα 15), για την οποία αποδεικνύεται ότι είναι συνεχής στο $A=[0,+\infty)$ ενώ το $f(0)$ ***δεν αποτελεί τοπικό ακρότατο*** της f στο $A=[0,+\infty)$.



Σχήμα 15.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Το πρόβλημα μπορεί να αποτελέσει ένα από τα ισχυρότερα ***κίνητρα*** για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, γιατί μεταξύ των άλλων απαντάει πειστικά στο ερώτημα που συχνά διατυπώνεται από τους μαθητές ***«Γιατί μαθαίνω τα Μαθηματικά;».*** Αναδεικνύει τη ***χρησιμότητα*** των Μαθηματικών στη ζωή και τη συμβολή τους στην ανάπτυξη άλλων επιστημών. Η ανάδειξη της χρησιμότητας αυτών που διδάσκουμε μπορεί και πρέπει να γίνεται μέσα από κατάλληλα προβλήματα. Η διατύπωση ενός προβλήματος κατά τη διδασκαλία «ανεβάζει» το ***ενδιαφέρον*** της τάξης και δημιουργεί κλίμα κατάλληλο για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Το πρόβλημα, όταν είναι καλά επιλεγμένο, μπορεί :

- Να αποτελέσει ανοικτή ***πρόκληση*** για το μαθητή
- Να κάνει τη διδασκαλία των Μαθηματικών πιο ***ελκυστική*** και
- Να βοηθήσει το μαθητή στην προσπάθειά του να μάθει Μαθηματικά.

"We learn by doing. We learn mathematics by doing problems. And we learn more mathematics by doing more problems." *(W. J. Kaczor and M .T. Nowak)*
που σε ελεύθερη μετάφραση σημαίνει:

«Μαθαίνουμε Μαθηματικά λύνοντας προβλήματα . Μαθαίνουμε περισσότερα Μαθηματικά λύνοντας περισσότερα προβλήματα».

Για να διαπιστώσουμε την αλήθεια των παραπάνω δεν έχουμε παρά να δώσουμε στην τάξη μας ένα πρόβλημα και να παρακολουθήσουμε τις αντιδράσεις και τις προσπάθειες των μαθητών. Για παράδειγμα, αν δώσουμε το πρόβλημα

Πρόβλημα: Ένας πεζοπόρος ξεκινάει στις 8π.μ.και φθάνει στην κορυφή ενός βουνού στις 2μ.μ. Διανυκτερεύει στο καταφύγιο και την άλλη μέρα στις 8π.μ. ξεκινάει να κάνει την αντίστροφη πορεία και φτάνει εκεί από όπου ξεκίνησε στις 2μ.μ. Να αποδείξετε τι κάποια χρονική στιγμή στο διάστημα $[8,14]$ ***ο πεζοπόρος θα βρίσκεται στο ίδιο σημείο της διαδρομής και τις δύο μέρες.***

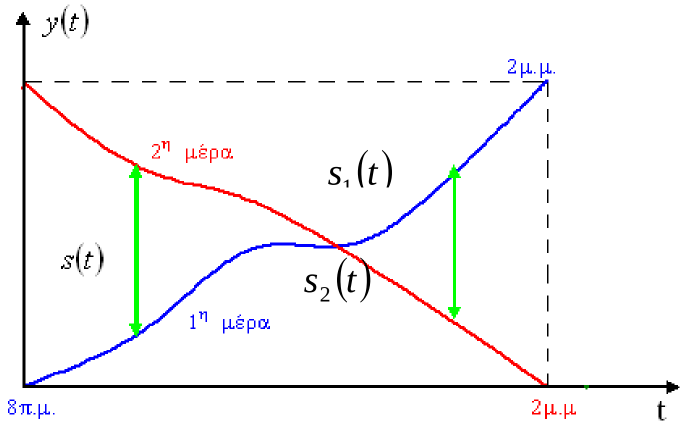
θα διαπιστώσουμε αμέσως ότι η τάξη ζωντανεύει. Όλοι σχεδόν οι μαθητές ανασκουμπώνονται και αρχίζουν να ψάχνουν , να σκέπτονται και να συσκέπτονται , να αναζητούν λύση. Αυτό και μόνο είναι ικανό να μας πείσει για το θετικό ρόλο που μπορεί να παίξει το πρόβλημα στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Το συγκεκριμένο πρόβλημα δόθηκε σε τμήμα της Β΄ τάξης του Λυκείου. Οι απαντήσεις που δόθηκαν από τους μαθητές με τη μορφή ερωτήσεων είναι οι παρακάτω.

1η   Απάντηση-Ερώτηση:

Αν θεωρήσουμε ότι τη δεύτερη μέρα ένας δεύτερος πεζοπόρος ξεκινάει την ίδια ώρα να ανεβαίνει το βουνό κινούμενος με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που κινήθηκε ο πρώτος πεζοπόρος την προηγούμενη μέρα δεν θα συναντηθούν οι δύο πεζοπόροι κάποια στιγμή κατά τη διάρκεια της διαδρομής; Αυτός ο συλλογισμός δεν λύνει το πρόβλημα;

2η Απάντηση-Ερώτηση:

Αν χαράξουμε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων δύο πρόχειρες γραφικές παραστάσεις (σχήμα 1) κάθε μια από τις οποίες να αντιπροσωπεύει την πορεία του πεζοπόρου (ύψος συναρτήσει του χρόνου) στις δυο ημέρες , τότε αυτές δεν θα τέμνονται; Μήπως αυτή η παρατήρηση « δείχνει » τη λύση του προβλήματος ;»



Σχήμα 1.

3η Απάντηση:

Το ίδιο πρόβλημα δόθηκε και σε τμήμα της Γ΄ Λυκείου.
Οι αντιδράσεις και το ενδιαφέρον των μαθητών ήταν και εδώ παρόμοιες μόνο που η απάντηση που δόθηκε αυτή τη φορά ήταν με τη βοήθεια του θεωρήματος του Bolzano και της συνάρτησης

$$s(t) = s_1(t) - s_2(t).$$

Όπου $s_1(t)$, αντιπροσωπεύει την απόσταση του πεζοπόρου από το αρχικό σημείο εκκίνησης τη χρονική στιγμή t της πρώτης μέρας και $s_2(t)$ αντιπροσωπεύει την απόσταση του πεζοπόρου από το αρχικό σημείο εκκίνησης τη χρονική στιγμή t της δεύτερης μέρας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ανδρεαδάκης Σ. Κατσαργύρης Β. Μέτης Σ. Μπουρχούτας Κ. Παπασταυρίδης Σ. Πολύζος Γ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ Λυκείου
2. Anton Howard : Calculus (Wiley).
3. Boyce E.W- Diprima C.R. : Calculus 1988 (Wiley).
4. Eduards and Penney : Calculus and Analytic Geometry.
5. Gupta.S.L.-Nisha Rami : Fudamental Real Analysis.
6. Hewitt Edwin- Stromberg Karl : Real and Abstract Analysis (Springer-Verlag)
7. Κατσαργύρης Β. Μεντής Κ. Παντελίδης Γ. Σουρλάς Κ. Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου – Ανάλυση Α΄Δέσμης Ο.Ε.Δ.Β. 1998
8. Kaufmann J. : Algebra and Trigonometry 1989.
9. Kaczor W.J. – Nowak M.T. : Problems in Mathematical Analysis
10. Kolman B.- Denlinger C. G. : Applied Calculus H.B.J.
11. Larson/Hostetler : Precalculus D.C.Heath and Company 1989.
12. Larson C.L. : Problem- Solving Through Problems , Springer
13. Nelsen B. R. : Proofs Without words.
14. Nelsen B. R. : Αποδείξεις χωρίς λόγια (Εκδόσεις Σαββάλα)
15. Παντελίδης Γ. : Μαθηματική Ανάλυση 1981.
16. Polya G. : How To Solve It 1945.
17. Priestley W. M. : Calculus : An Historical Approach (Springer-Verlag New York) 1978.
18. Salas/Hille : Calculus one variable 6th edition 1990 (wiley).
19. Saltz Daniel : A Sort Calculus (An Applied Approach)
20. Spivak M. : Διαφορικός Και Ολοκληρωτικός Λογισμός (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).
21. Stewart. J. : Calculus 2nd Edition.
22. Zeitz Paul : The Art And Craft Of Problem Solving 1999.
23. Zill G. D. : Calculus with Analytic Geometry 2nd Edition (Pws-Kent).
24. Goldstein L.-Lay D.- Schneider D. Calculus and Its Applications (Visual Calculus)- Tenth Edition – PEARSON.

«ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ».

Γεώργιος Χαρ. Πολύζος
Πάρεδρος ε.θ. του Π.Ι.

Εισαγωγή

Η συνάρτηση είναι έννοια θεμελιώδους σημασίας για τη μελέτη των Μαθηματικών και ειδικότερα για τη μελέτη της Ανάλυσης. Επομένως, ο τρόπος με τον οποίο ένας μαθητής του Λυκείου θα κατανοήσει τη συγκεκριμένη έννοια επηρεάζει σημαντικά τον τρόπο με τον οποίο θα κατανοήσει και τις υπόλοιπες έννοιες της Ανάλυσης (όριο, συνέχεια, παράγωγος και ολοκλήρωμα συνάρτησης). Ο Eisenberg [10] υποστηρίζει ότι:

> *«Η ιδέα της ανάπτυξης στους μαθητές μιας σε βάθος κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης θα πρέπει να είναι από τους πλέον βασικούς σκοπούς του προγράμματος σπουδών της Δευτεροβάθμιας και της Κολεγιακής εκπαίδευσης» (σ. 174).*

Όμως, η επίτευξη του σκοπού αυτού δε φαίνεται να είναι και τόσο εύκολη, λόγω της ποικιλίας των αναπαραστάσεων της συνάρτησης και των δυσκολιών που παρουσιάζονται κατά τη διαδικασία της σύνδεσης αυτών και της μετάβασης από τη μια μορφή αναπαράστασης στην άλλη (βλ. [14]).

Έχει αποδειχτεί, από έρευνες των τελευταίων ετών, ότι οι περισσότεροι από τους τελειόφοιτους μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και αρκετοί φοιτητές Κολεγίων και Πανεπιστημίων έχουν μια *περιορισμένη γνώση*, δηλαδή μια *αδύναμη «εικόνα» (concept image)* (βλ. [27]) της έννοιας της συνάρτησης. Επιπλέον, έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές, στην πλειονότητά τους δείχνουν ιδιαίτερη προτίμηση στις συναρτήσεις που εκφράζονται με τύπους και είναι ιδιαίτερα διστακτικοί και αρκετές φορές αδυνατούν να ασχοληθούν με άλλου είδους αναπαραστάσεις των συναρτήσεων, όπως είναι, για παράδειγμα, τα γραφήματα, οι πίνακες τιμών, οι αντιστοιχίσεις κτλ. (βλ. [5], [7], [15], [16], [19], [20],[21], [23], [27] και [28]).

Οι Tall & Vinner [27], μάλιστα, θεωρούν ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και οι σπουδαστές με τη μελέτη και την ερμηνεία των γραφημάτων των συναρτήσεων οφείλονται βασικά στις *παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας*. Οι συγκεκριμένοι ερευνητές πιστεύουν ότι η διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης με τον παραδοσιακό τρόπο – ο οποίος δίνει έμφαση κυρίως στις συναρτήσεις που ορίζονται από αλγεβρικούς τύπους και ασχολείται ελάχιστα με τις συναρτήσεις που ορίζονται από γραφήματα – οδηγεί στην ανάπτυξη μιας περιορισμένης γνώσης, δηλαδή μιας περιορισμένης «*εικόνας*» *(concept image)*, της έννοιας της συνάρτησης.

Παρόμοια προβλήματα με αυτά που αναφέραμε παραπάνω αντιμετωπίζουν οι μαθητές και με την κατανόηση – ιδιαίτερα μάλιστα με τη γεωμετρική ερμηνεία – των εννοιών της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο, της παραγώγου (ως συνάρτησης), του ορισμένου ολοκληρώματος και της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, καθώς επίσης και με την επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με τις συγκεκριμένες έννοιες (βλ. [2], [3], [9], [12], [16], [17], [20], και [22]).

Οι Breidenbach et al. [5], η Sfard [24] και άλλοι ερευνητές πιστεύουν (και επιχειρηματολογούν για αυτό) ότι οι μαθητές, προτού κατανοήσουν ως *«αντικείμενο»* της έννοιας της συνάρτησης, θα πρέπει να έχουν κατανοήσει σε βάθος την έννοια αυτή και ως *«διαδικασία»*. Οι συγκεκριμένοι ερευνητές αποδίδουν τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων της Ανάλυσης κυρίως στην παντελή έλλειψη ή στην έλλειψη μιας σε βάθος κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης ως διαδικασίας. Για παράδειγμα, οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές για τον υπολογισμό με τη βοήθεια του ορισμού της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο οφείλονται κυρίως στην έλλειψη κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης ως διαδικασίας. Οι ίδιοι, όμως, συγγραφείς δίνουν μεγάλη βαρύτητα και στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης ως αντικειμένου, δηλαδή μιας ολότητας που είναι προϊόν *«ενθυλάκωσης» (encapsulation)* (βλ. [5]) ή *«αντικειμενοποίησης» (reification)* (βλ. [24]) κάποιων διαδικασιών. Αυτό βεβαίως είναι δύσκολο να επιτευχθεί, αλλά είναι αναγκαίο για την εκτέλεση διαδικασιών ανώτερου επιπέδου (βλ. [24]), όπως είναι, για παράδειγμα, η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων ή των παραμετρικών εξισώσεων συναρτήσεων.

Για να πετύχουμε όμως οι μαθητές μας να κατανοήσουν πρώτα ως *διαδικασία* και έπειτα ως *αντικείμενο* την έννοια της συνάρτησης, αλλά και όλες τις έννοιες της Ανάλυσης που σχετίζονται με την έννοια της συνάρτησης, χρειάζεται να δώσουμε ιδιαίτερη βαρύτητα στη μελέτη όσο το δυνατόν περισσότερων μορφών αναπαραστάσεων των εννοιών αυτών αλλά και στη μετάβαση από τη μια μορφή αναπαράστασης στην άλλη (βλ. [11]).

Στην επίτευξη του παραπάνω σκοπού μπορούν να συμβάλλουν και οι νέες τεχνολογίες. (βλ. [1], [4], [8], [18], [26] και [29]).

Η Artigue [1], αναφερόμενη στη χρησιμότητα των νέων τεχνολογιών διατυπώνει την ακόλουθη άποψη:

> *«Ο Ηλεκτρονικός Υπολογιστής (Η/Υ) προσφέρει τέτοιες δυνατότητες που η δυναμική οπτικοποίηση μπορεί να κάνει τα γεωμετρικά και τα γραφικά πλαίσια πολύ περισσότερο προσιτά και αν, επιπλέον, εκμεταλλευτούμε τις δυνατότητές του, μπορεί να βοηθηθούμε να ανακαλύψουμε τις αναγκαίες σχέσεις ανάμεσα στις αλγεβρικές και γεωμετρικές αναπαραστάσεις*..
> *Ωστόσο ο ηλεκτρονικός υπολογιστής δεν είναι εργαλείο το οποίο λύνει με θαυμαστό τρόπο τα προβλήματα της διδασκαλίας της Ανάλυσης. Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής μπορεί, χωρίς καμία αμφιβολία, να βοηθήσει να ξεπεράσουμε τις συγκεκριμένες δυσκολίες, αλλά διάφορες έρευνες έδειξαν καθαρά ότι αυτό είναι αποτελεσματικό μόνο μέσα σε ένα συνεκτικό πλαίσιο διδασκαλίας και μάθησης.» (σ. 197).*

Ανάλογες απόψεις διατυπώνονται και στο πρόγραμμα σπουδών του NCTN [18]. Συγκεκριμένα στην παράγραφο με τίτλο *“The Technology Principle” (σ. 24-25)* οι συντάκτες του προγράμματος διατυπώνουν την ακόλουθη άποψη:

> *«Οι μαθητές μπορούν να μάθουν περισσότερα μαθηματικά και σε μεγαλύτερο βάθος με κατάλληλη χρήση των νέων τεχνολογιών»*..
> *Όμως, οι νέες τεχνολογίες δεν πρέπει να υποκαταστήσουν τις βασικές κατανοήσεις και διαισθήσεις, αλλά να χρησιμοποιούνται κυρίως για να τις ενισχύσουν».*

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω κατασκευάσαμε, με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού λογισμικού *“The Geometer's Sketchpad 4.03”*, δραστηριότητες που θα βοηθήσουν κατά τη γνώμη μας τους μαθητές να ξεπεράσουν τα εμπόδια τα οποία σχετίζονται με την εννοιολογική κατανόηση(2) (βλ. [13] και [25]) των εννοιών της

(2) Κατά τον R. Skemp [25] έχουμε δύο είδη κατανόησης: την ***εννοιολογική κατανόηση*** *(Relational understanding)* και την ***εργαλειακή κατανόηση*** *(Instrumental understanding).* Η πρώτη βασίζεται στην κατανόηση των εννοιών και στη διασύνδεσή τους, έτσι που οι μαθητές να γνωρίζουν τι κάνουν

Ανάλυσης. Στην εισήγησή μας αυτή θα παρουσιάσουμε μερικές από τις δραστηριότητες αυτές και συγκεκριμένα τις δραστηριότητες που αναφέρονται στις έννοιες: "*Παράγωγος Συνάρτησης σε Σημείο*", "*Παράγωγος Συνάρτησης*", "*Παράγωγος της Εκθετικής Συνάρτησης*" και "*Ορισμένο Ολοκλήρωμα Συνάρτησης*".

Παράγωγος Συνάρτησης σε Σημείο

Για να βοηθήσουμε τους μαθητές να ξεπεράσουν τα εμπόδια που σχετίζονται με την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο *προτείνουμε* κατά τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο να γίνει, αν είναι δυνατόν, χρήση *δυναμικών λογισμικών*, όπως είναι π.χ. το *Sketchpad 4.03*, το *MathCAD*, το *Maple,* το *Derive 6.0* κα. Από τα συγκεκριμένα λογισμικά περισσότερο προσφέρονται το *Sketchpad 4.03* και το *Derive 6.0,* διότι παρέχουν τη δυνατότητα δημιουργίας υποστηρικτικού υλικού που θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν ως *διαδικασία* την έννοια της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο.

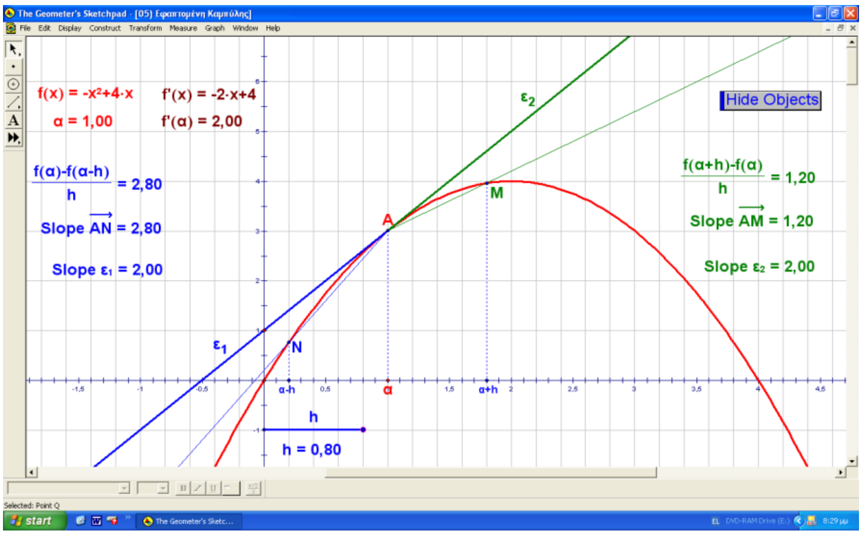
Το *σχήμα 1* που ακολουθεί είναι η εικόνα της επιφάνειας εργασίας μιας δραστηριότητας που δημιουργήσαμε με τη βοήθεια του λογισμικού *Sketchpad 4.03* για τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο α του πεδίου ορισμού της. Για τη δημιουργία της συγκεκριμένης δραστηριότητας ακολουθήσαμε με τη σειρά τα παρακάτω βήματα:

1ο Επιλέξαμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=-x^2+4x$ και χαράξαμε το γράφημα αυτής. Μπορούμε όμως να αλλάξουμε ανά πάσα στιγμή τον τύπο της f.

2ο Επιλέξαμε το σημείο α=1 του άξονα $x'x$ και ορίσαμε το σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ του γραφήματος της συνάρτησης f. Μπορούμε όμως να μετακινήσουμε το α και να το τοποθετήσουμε σε οποιαδήποτε άλλη θέση πάνω στον άξονα $x'x$.

3ο Κατασκευάσαμε μια ολισθαίνουσα μπάρα της οποίας το μήκος h μπορούμε να το αυξομειώσουμε, με κατάλληλη ολίσθηση του δεξιού άκρου της.

4ο Ορίσαμε τα σημεία $M(x+h, f(x+h))$ και $N(x-h, f(x-h))$ του γραφήματος της f και υπολογίσαμε τις κλίσεις των ημιευθειών AM και AN, δηλαδή τους μέσους ρυθμούς μεταβολής $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ και $\dfrac{f(\alpha)-f(\alpha-h)}{h}$ της συνάρτησης f στα διαστήματα $[\alpha, \alpha+h]$ και $[\alpha-h, \alpha]$ αντιστοίχως.



Σχήμα 1

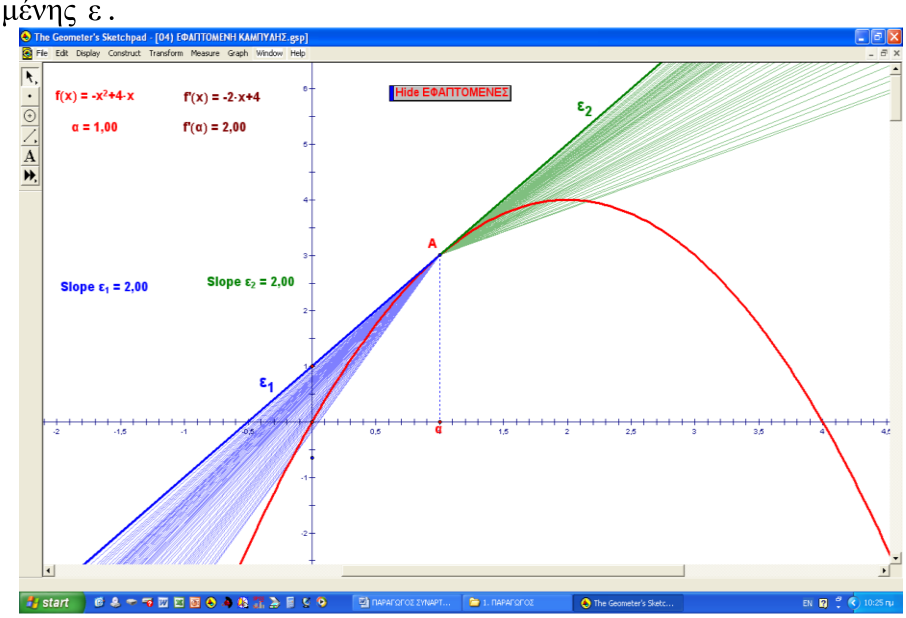
και γιατί το κάνουν *("κανόνες μαζί με αιτιολογήσεις"),* ενώ η δεύτερη βασίζεται στη μηχανιστική εφαρμογή κανόνων και αλγοριθμικών διαδικασιών ("*κανόνες χωρίς αιτιολόγηση*").

Αν τώρα, με τη βοήθεια της ολισθαίνουσας μπάρας, αρχίσουμε να μειώνουμε συνεχώς την τιμή του h, θα παρατηρήσουμε ότι, όταν το h τείνει να γίνει ίσο με το μηδέν, τότε:

α) Οι ημιευθείες AM και AN τείνουν να σχηματίσουν μια ευθεία γραμμή και

β) Οι λόγοι $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ και $\dfrac{f(\alpha)-f(\alpha-h)}{h}$, δηλαδή οι κλίσεις των ημιευθειών AM και AN, τείνουν να πάρουν την τιμή 2 (*σχ. 2*).

Η ευθεία ε που σχηματίζουν η οριακή θέση ε_1 της ημιευθείας AM με την οριακή θέση ε_2 της ημιευθείας AN είναι η εφαπτομένη ε του γραφήματος της συνάρτησης f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$, ενώ ο αριθμός 2, που είναι η κοινή οριακή τιμή των παραπάνω λόγων, δηλαδή η κοινή οριακή τιμή των κλίσεων των ημιευθειών AM και AN αντιστοίχως, είναι η παράγωγος της f στο σημείο α, δηλαδή η κλίση της εφαπτομένης ε.



Σχήμα 2.

Αν τώρα, αντί της παραπάνω συνάρτησης f, πάρουμε τη συνάρτηση με τύπο

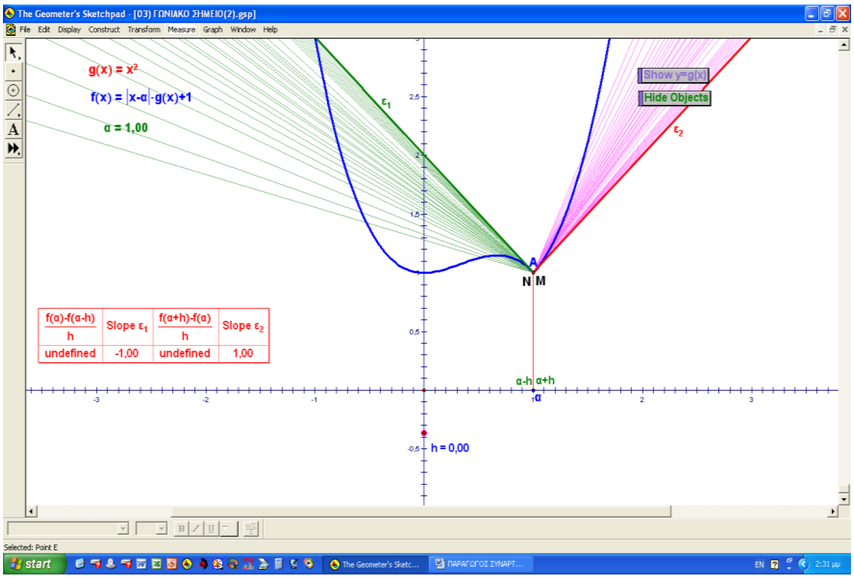
$$f(x) = g(x)\cdot|x-\alpha|+1, \text{ όπου } g(x) = x^2$$

και α τυχαίο σημείο του άξονα των x και θελήσουμε να εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \alpha$, με $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$, θα παρατηρήσουμε ότι:

α) Η οριακή θέση ε_1 της ημιευθείας AM και η οριακή θέση ε_2 της ημιευθείας AN σχηματίζουν γωνία (*σχ.3*) και

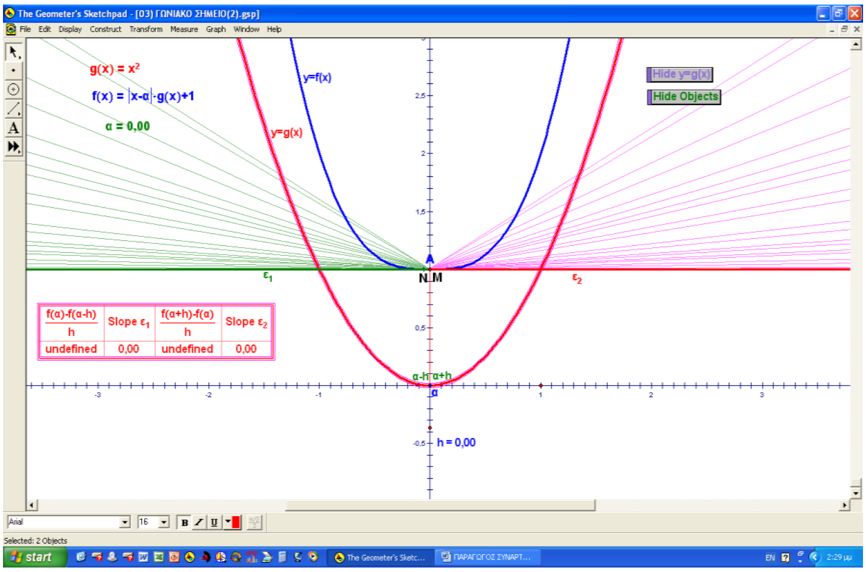
β) Η οριακή τιμή του λόγου $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ (δηλαδή η οριακή τιμή της κλίσης της ημιευθείας AM) είναι διαφορετική από την οριακή τιμή του λόγου $\dfrac{f(\alpha)-f(\alpha-h)}{h}$ (δηλαδή από την οριακή τιμή της κλίσης της ημιευθείας AN).

Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι, για $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$ η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \alpha$ (Στο *σχ.3* πήραμε $\alpha = 1$).



<u>Σχήμα 3</u>

Αν όμως πάρουμε $\boldsymbol{\alpha = 0}$, που είναι ρίζα της συνάρτησης g, θα διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \alpha$ (*<u>σχ. 4</u>*).



<u>Σχήμα 4</u>

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \alpha$, <u>μόνο όταν</u> το α είναι ρίζα της συνάρτησης g. Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήξουμε, αν στη θέση της g πάρουμε οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση, για παράδειγμα αν πάρουμε $g(x)=\eta\mu x$.

Το παραπάνω συμπέρασμα θα πρέπει, κατά τη γνώμη μας, να επιβεβαιωθεί και αναλυτικά με τη βοήθεια του ορισμού της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο. Γι αυτό *<u>προτείνουμε</u>* να ζητηθεί από τους μαθητές να αποδείξουν ότι η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = g(x)\cdot|x-\alpha|+1, \qquad \text{όπου g συνεχής συνάρτηση,}$$

είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \alpha$, μόνο όταν το α είναι ρίζα της συνάρτησης g.

Με τέτοιου είδους ασκήσεις θα βοηθήσουμε τους μαθητές να φτάσουν σιγά-σιγά στο στάδιο *<u>της σύλληψης ως διαδικασίας</u>* της έννοιας της παράγωγου συνάρτησης σε σημείο, αφού θα χρειαστεί να εφαρμόσουν τον ορισμό της συγκεκριμένης έννοιας, προκειμένου να υπολογίσουν την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = \alpha$, εκατέρωθεν του οποίου η f αλλάζει τύπο.

Παράγωγος Συνάρτησης

Για να βοηθήσουμε τους μαθητές να φτάσουν στο στάδιο *της σύλληψης ως διαδικασίας* της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης και να κατανοήσουν διαισθητικά τα κριτήρια μονοτονίας, ακροτάτων, κυρτότητας και σημείων καμπής *προτείνουμε* κατά τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης, αλλά και των αντίστοιχων θεωρημάτων, να γίνει, αν είναι δυνατόν, χρήση δυναμικών λογισμικών (ο.π.). Το παρακάτω *σχήμα 5* είναι η εικόνα της επιφάνειας εργασίας μιας δραστηριότητας που δημιουργήσαμε με τη βοήθεια του λογισμικού *Sketchpad 4.03* με σκοπό να μπορούμε, όταν μας δίνεται το γράφημα μιας συνάρτησης, να χαράσσουμε το γράφημα της παραγώγου της. Για τη δημιουργία της συγκεκριμένης δραστηριότητας ακολουθήσαμε με τη σειρά τα παρακάτω βήματα:

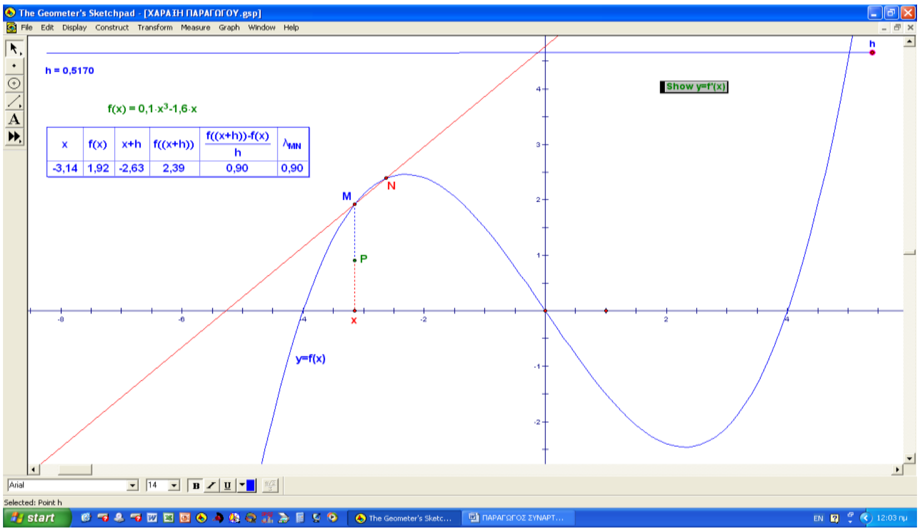
1ο Επιλέξαμε τη συνάρτηση $f(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}6x$ και χαράξαμε το γράφημα αυτής. Μπορούμε όμως να αλλάξουμε ανά πάσα στιγμή τον τύπο της f.

2ο Επιλέξαμε τυχαίο σημείο x του άξονα x΄x και ορίσαμε το σημείο $M(x, f(x))$ του γραφήματος της συνάρτησης f.

3ο Κατασκευάσαμε μια ολισθαίνουσα μπάρα της οποίας το μήκος h μπορούμε να το αυξομειώνουμε, με κατάλληλη ολίσθηση του δεξιού άκρου της.

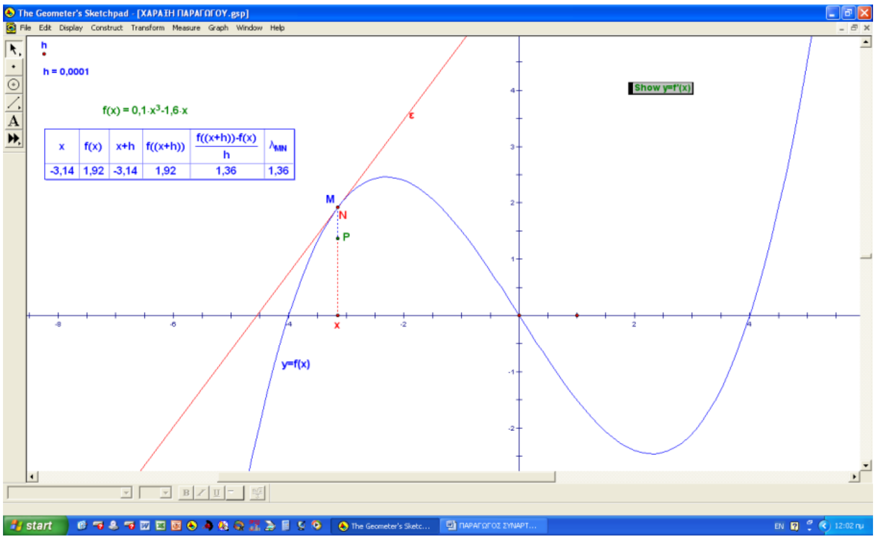
4ο Ορίσαμε το σημείο $N(x+h, f(x+h))$ και, αφού χαράξαμε την τέμνουσα MN, υπολογίσαμε την κλίση της και τέλος

5ο Ορίσαμε το σημείο $P(x, \lambda_{MN})$ *(σχ. 5)*.



Σχήμα 5

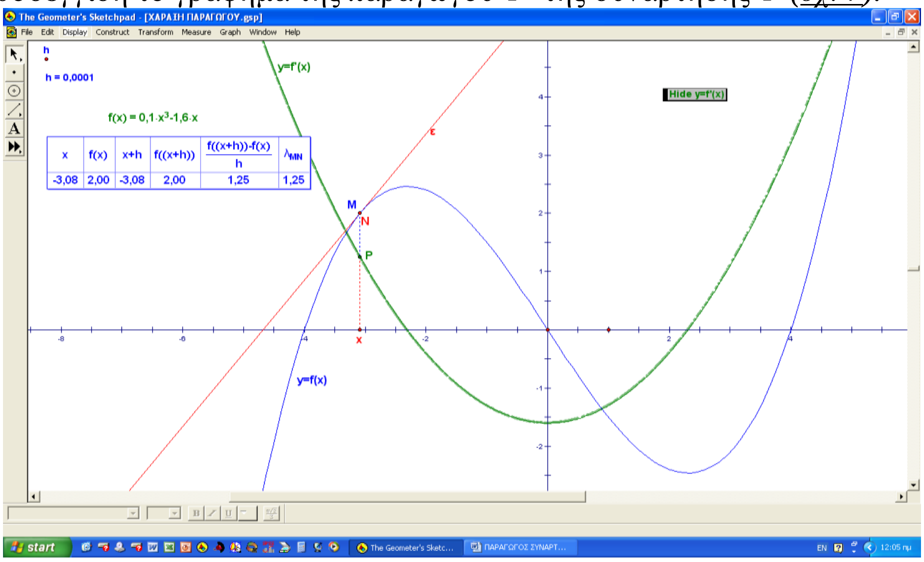
Μειώνουμε τώρα, με τη βοήθεια της ολισθαίνουσας μπάρας, την τιμή του h, ώστε να φέρουμε το σημείο N όσο γίνεται πιο κοντά στο M, χωρίς όμως να συμπέσει με αυτό, διότι τότε θα εξαφανιστεί η τέμνουσα MN. Στην προκειμένη περίπτωση πήραμε h=0,0001 *(σχ. 6.)*.



Σχήμα 6

Έτσι, η τέμνουσα MN θα πάρει μια θέση που θα είναι κατά προσέγγιση η θέση της εφαπτομένης ε του γραφήματος της συνάρτησης f . Επομένως, η κλίση της τέμνουσας MN θα γίνει κατά προσέγγιση ίση με την κλίση της εφαπτομένης ε , δηλαδή ίση με την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x και, συνεπώς, το σημείο P θα βρίσκεται κατά προσέγγιση πάνω στο γράφημα της παραγώγου f' της συνάρτησης f .

Αν τώρα μετακινήσουμε το σημείο x από τα αριστερά προς τα δεξιά, ώστε να διαγράψει τον άξονα x'x, τότε το σημείο P θα χαράξει μια καμπύλη που θα είναι κατά προσέγγιση το γράφημα της παραγώγου f' της συνάρτησης f *(σχ. 7)*.



Σχήμα 7

Με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα μπορούμε:

α) Να χαράξουμε το γράφημα της παραγώγου οποιασδήποτε συνάρτησης, αρκεί να αλλάζουμε κάθε φορά τον τύπο της f και να ακολουθούμε το τελευταίο από τα βήματα που περιγράψαμε προηγουμένως.

Αν με αυτόν τον τρόπο χαράξουμε τα γραφήματα των παραγώγων των συναρτήσεων

$$y = c,\quad y = x,\quad y = x^2,\quad y = \eta\mu x,\quad y = \sigma\upsilon\nu x,\quad y = e^x \text{ και } y = \ln x,$$

θα διαπιστώσουμε ότι αυτά είναι τα γραφήματα των συναρτήσεων

$$y=0,\quad y=1,\quad y=2x,\quad y=\sigma\upsilon\nu x,\quad y=-\eta\mu x,\quad y=e^x \text{ και } y=\frac{1}{x},$$

αντιστοίχως, και θα συμπεράνουμε έτσι ότι

$$c'=0,\quad (x)'=1,\quad (x^2)'=2x,$$

$$(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x,\quad (\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x,\quad (e^x)'=e^x \text{ και } (\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

Βρίσκουμε δηλαδή με τη βοήθεια των γραφημάτων τους τύπους των παραγώγων των βασικών συναρτήσεων, τους οποίους όμως θα πρέπει να αποδείξουμε στη συνέχεια.

β) Να ανακαλύψουμε διαισθητικά και να διατυπώσουμε τα κριτήρια μονοτονίας, ακροτάτων, κυρτότητας και σημείων καμπής. Πράγματι, αν παρατηρήσουμε τη θέση της εφαπτομένης ε και την κίνηση του σημείου P, καθώς το M κινούμενο από τα αριστερά προς τα δεξιά διαγράφει την καμπύλη της f, θα διαπιστώσουμε ότι:

β_1**)** Όταν το σημείο M ανέρχεται, δηλαδή όταν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η κλίση της εφαπτομένης ε είναι πάντα θετική και μερικές φορές μηδέν. Γι αυτό το σημείο P βρίσκεται συνεχώς πάνω από τον άξονα των x, οπότε η f' είναι θετική και μερικές φορές μηδέν.

β_2**)** Όταν το σημείο M κατέρχεται, δηλαδή όταν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε η κλίση της εφαπτομένης ε είναι πάντα αρνητική και μερικές φορές μηδέν. Γι αυτό το σημείο P βρίσκεται συνεχώς κάτω από τον άξονα των x, οπότε η f' είναι αρνητική και μερικές φορές μηδέν.

β_3**)** Όταν το M διέρχεται από μια τοπικά υψηλή ή μια τοπικά χαμηλή θέση του γραφήματος της f, δηλαδή όταν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε η κλίση της εφαπτομένης ε είναι μηδέν. Γι αυτό, τη στιγμή εκείνη, το σημείο P συναντά τον άξονα των x και συνεπώς η f' παίρνει την τιμή μηδέν.

β_4**)** Όταν το σημείο M διαγράφει τα κυρτά τμήματα του γραφήματος της f, τότε το σημείο P ανέρχεται, οπότε η κλίση της εφαπτομένης ε αυξάνεται και συνεπώς η f' είναι γνησίως αύξουσα.

β_5**)** Όταν το σημείο M διαγράφει τα κοίλα τμήματα του γραφήματος της f, τότε το σημείο P κατέρχεται, οπότε η κλίση της εφαπτομένης ε συνεχώς μειώνεται και συνεπώς η f' είναι γνησίως φθίνουσα.

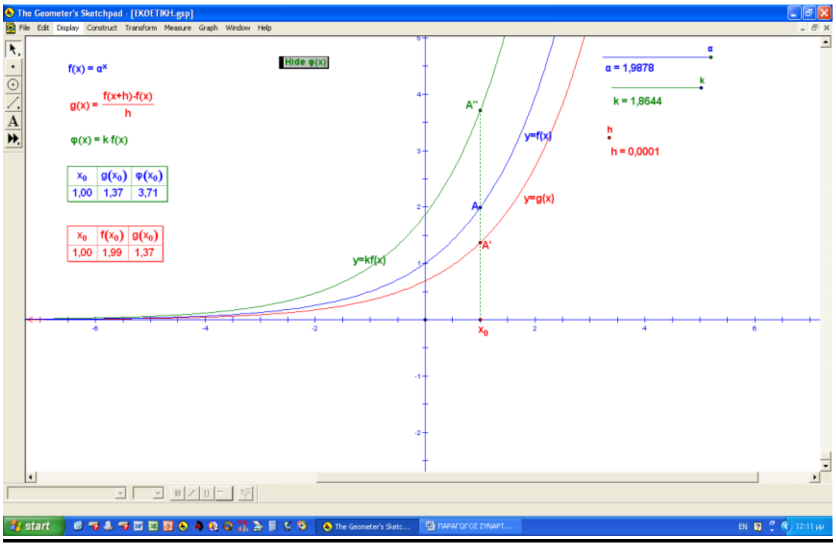
β_6**)** Όταν το σημείο M διέρχεται από τα σημεία καμπής του γραφήματος της f, τότε η εφαπτομένη ε διαπερνά το γράφημα της f και το σημείο P διέρχεται από μια τοπικά υψηλή ή τοπικά χαμηλή θέση του γραφήματος της f' και συνεπώς η f' παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

Παράγωγος της Εκθετικής συνάρτησης

Το *σχήμα 8* που ακολουθεί είναι η εικόνα της επιφάνειας εργασίας μιας δραστηριότητας που δημιουργήσαμε με τη βοήθεια του λογισμικού *Sketchpad 4.03* για τη μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$. Για τη δημιουργία της συγκεκριμένης δραστηριότητας ακολουθήσαμε με τη σειρά τα παρακάτω βήματα:

1ο Κατασκευάσαμε τρεις ολισθαίνουσες μπάρες με αλγεβρικές τιμές **α**, h και k, αντιστοίχως.

2ο Χαράξαμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και φ με τύπους $f(x)=\alpha^x$, $g(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ και $\varphi(x)=k\cdot f(x)$.



Σχήμα 8

Αν τώρα αποκρύψουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και φ και αυξομειώσουμε τις τιμές της παραμέτρου α, ολισθαίνοντας το δεξιό άκρο της αντίστοιχης μπάρας, θα διαπιστώσουμε ότι

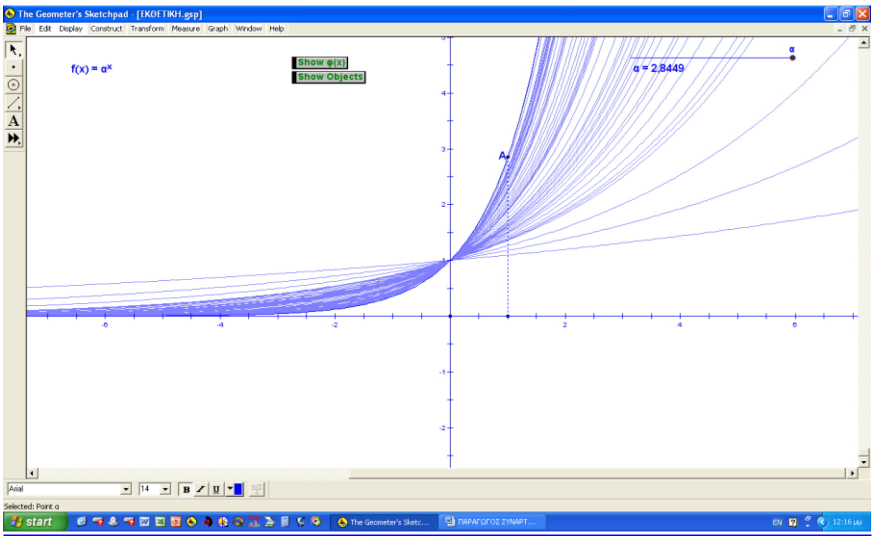
α) Η f είναι κυρτή στο **R** και η γραφική της παράσταση περνάει από το σημείο Α(0,1) για όλες τις τιμές του α *(Σχ. 9 &10)* και

β) Αν α>1 *(Σχ. 9)*, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα και ισχύουν:

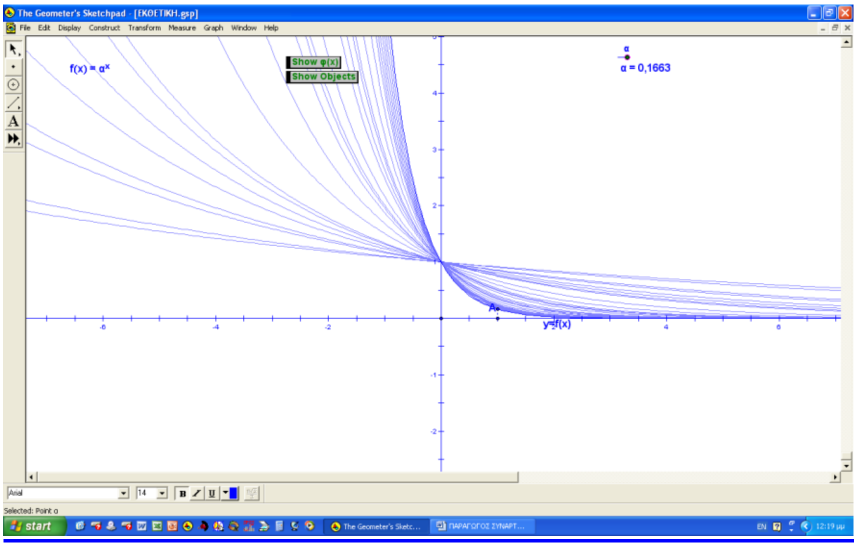
$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = 0 \ \text{ και } \ \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty \ ,$$

ενώ, αν 0<α<1 *(Σχ. 10)*, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύουν:

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0,$$



Σχήμα 9



<u>Σχήμα 10</u>

Επανεμφανίζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και φ και μετακινούμε προς τα αριστερά το μεταβλητό άκρο της μπάρας h έτσι, ώστε το h να πάρει μια τιμή πολύ κοντά στο 0 (Εδώ πήραμε h=0,0001). Τότε, όπως είναι γνωστό, θα ισχύει

$$g(x) \approx f'(x)$$

και, επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης g θα είναι κατά προσέγγιση η γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης f.

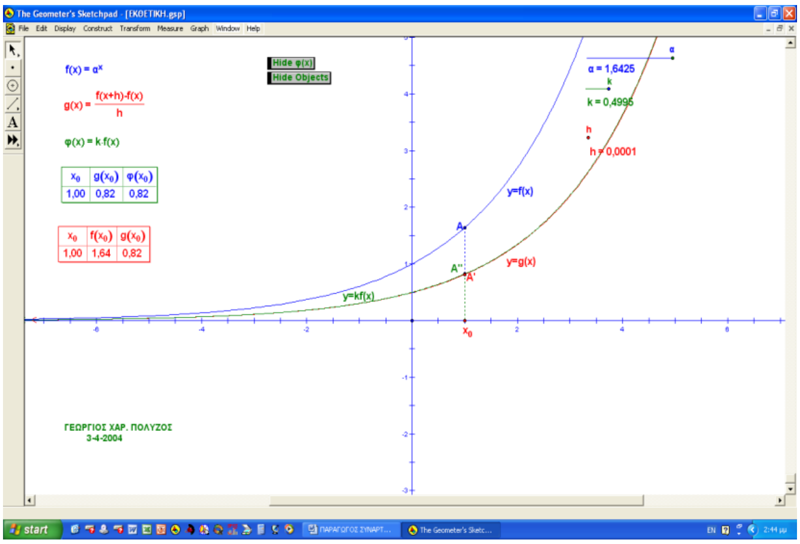
Αν, τώρα, μετακινήσουμε το μεταβλητό άκρο της μπάρας k, θα διαπιστώσουμε ότι υπάρχει τιμή του k για την οποία οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων φ και g συμπίπτουν (<u>*Σχ. 11*</u>). Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι:

$$f'(x) = k \cdot f(x)$$

δηλαδή ότι:

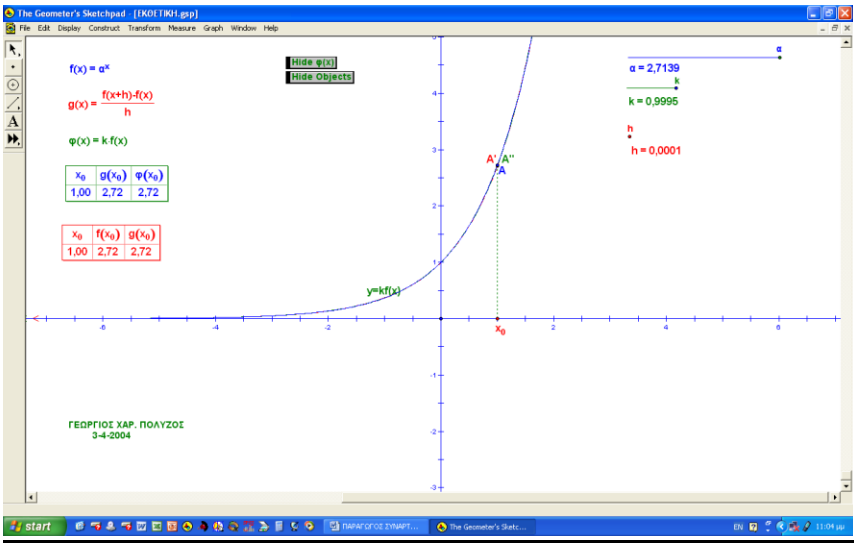
$$\left(\alpha^x\right)' = k \cdot \alpha^x$$

Η τιμή της μεταβλητής k για την οποία οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων φ και g $\approx f'$ συμπίπτουν, είναι, όπως γνωρίζουμε από την Ανάλυση ο αριθμός $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\alpha^h-1}{h} = \ln\alpha$ (Στην προκειμένη περίπτωση είναι $\ln\alpha \approx 0.4995$).



<u>Σχήμα 11</u>

Αν, τώρα, αυξομειώσουμε τις τιμές της παραμέτρου α, ολισθαίνοντας το δεξιό άκρο της αντίστοιχης μπάρας, θα διαπιστώσουμε ότι υπάρχει τιμή του α για την οποία οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και φ συμπίπτουν. Αυτό θα συμβεί, όταν $\alpha \simeq 2{,}71$ και $k=1$ *(Σχ. 12)*, δηλαδή όταν $\ln\alpha = 1$ ή, ισοδύναμα, όταν $\alpha = e$.



Σχήμα 12

Μια μη τυπική απόδειξη του παραπάνω συμπεράσματος είναι η εξής:

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \approx \frac{\alpha^{x+h}-\alpha^{x}}{h} \approx \alpha^{x}\,\frac{\alpha^{h}-1}{h} \text{ ,για πολύ μικρά h.}$$

Άρα:

$$f'(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{\alpha^{h}-1}{h} \approx 1 \Leftrightarrow \alpha^{h} \approx 1+h \Leftrightarrow \alpha \approx (1+h)^{\frac{1}{h}} \text{ , για πολύ μικρά h}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \approx \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} \text{, για πολύ μεγάλα t}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e.$$

Ολοκλήρωμα Συνάρτησης

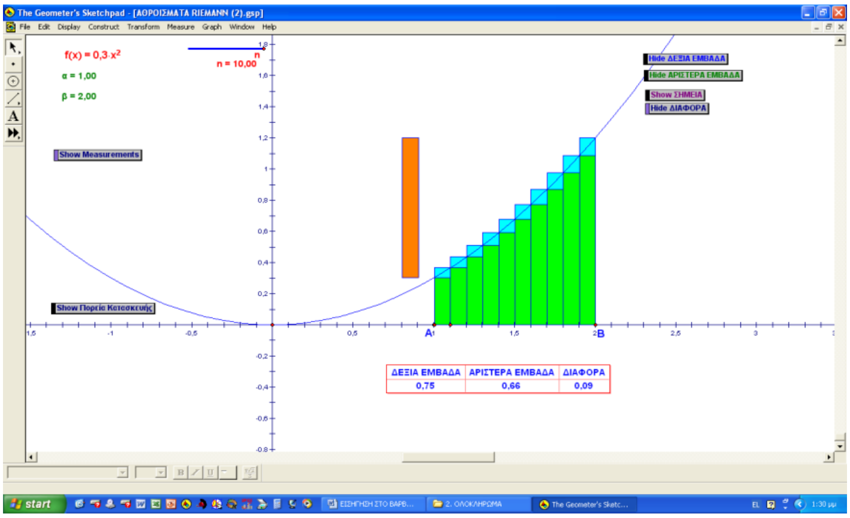
Για να βοηθήσουμε τους μαθητές να φτάσουν στο στάδιο *της σύλληψης ως διαδικασίας* της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος *προτείνουμε* κατά τη διδασκαλία της συγκεκριμένης έννοιας να γίνει (αν είναι δυνατόν) χρήση δυναμικών λογισμικών (ο.π.). Το παρακάτω *σχήμα 13* είναι η εικόνα της επιφάνειας εργασίας μιας δραστηριότητας που δημιουργήσαμε με τη βοήθεια του λογισμικού *Sketchpad 4.03* ακολουθώντας με τη σειρά τα ακόλουθα βήματα:

1ο Επιλέξαμε τη συνάρτηση $f(x)=0{,}3x^2$ και χαράξαμε το γράφημα αυτής. Μπορούμε όμως να αλλάξουμε ανά πάσα στιγμή τον τύπο της f.

2ο Επιλέξαμε τα σημεία $\alpha=1$ και $\beta=2$ του άξονα $x'x$. Μπορούμε όμως να αλλάξουμε τις τιμές των α και β, μετακινώντας τα σημεία $A(\alpha,0)$ και $B(\beta,0)$ πάνω στον άξονα $x'x$.

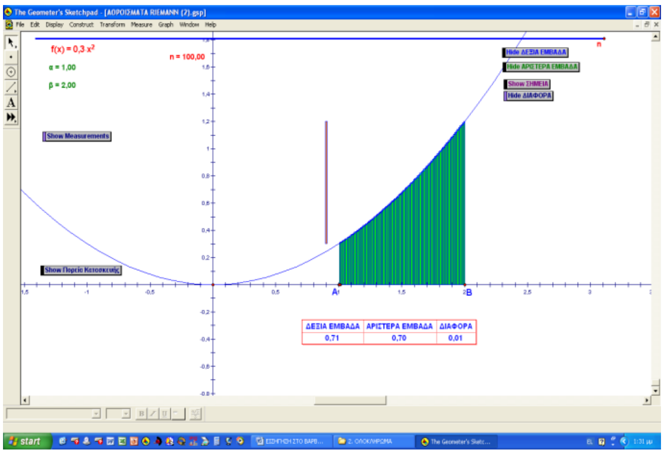
3ο Χωρίσαμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ίσα ν υποδιαστήματα, των οποίων το πλήθος ν καθορίζουμε κάθε φορά με τη βοήθεια μιας ολισθαίνουσας μπάρας.

4ο Κατασκευάσαμε τα αριστερά (ε_ν) και τα δεξιά (E_ν) αθροίσματα Riemann της συνάρτησης f στο διάστημα [α,β] και υπολογίσαμε τη διαφορά τους $\Delta_\nu = E_\nu - \varepsilon_\nu$, η οποία παριστάνει το εμβαδόν του αποκομμένου ορθογωνίου.



Σχήμα 13

Αν, τώρα, αυξήσουμε απεριόριστα το ν, τότε θα παρατηρήσουμε ότι η διαφορά $\Delta_\nu = E_\nu - \varepsilon_\nu$, που παριστάνει το εμβαδόν του αποκομμένου ορθογωνίου *(σχ. 14)*, τείνει να μηδενιστεί και συνεπώς το χωρίο που ορίζουν τα του δεξιού αθροίσματος Riemann τείνει να συμπέσει με το χωρίο που ορίζουν τα ορθογώνια του αριστερού αθροίσματος Riemann της συνάρτησης f . Επομένως, τα παραπάνω χωρία τείνουν να συμπέσουν με το χωρίο που ορίζεται από το γράφημα της f τον άξονα των x και τις ευθείες x=1 και x=2. Ως εκ τούτου, το εμβαδόν τους τείνει να γίνει ίσο με το εμβαδόν του συγκεκριμένου χωρίου, το οποίο κατά προσέγγιση είναι ίσο με 0,70



Σχήμα 14

Με την παραπάνω διαδικασία υπολογίσαμε κατά προσέγγιση το $\int_1^2 0,3x^2 dx$. Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε κατά προσέγγιση και το ολοκλήρωμα οποιασδήποτε άλλης συνάρτησης f σε οποιοδήποτε διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της, αλλάζοντας μόνο τον τύπο της f και τις τιμές των α και β.

Τροποποιώντας κατάλληλα την παραπάνω δραστηριότητα, μπορούμε να βοηθήσουμε τους μαθητές να διαπιστώσουν εποπτικά τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος και να συμβάλουμε, έτσι, στην αποφυγή λαθών που σχετίζονται με τη συγκεκριμένη έννοια.

<u>Επίλογος</u>

Με τις δραστηριότητες που παρουσιάσαμε παραπάνω θελήσαμε να αναδείξουμε τη συμβολή των νέων τεχνολογιών στην διδασκαλία και κατανόηση εννοιών της Ανάλυσης. Θα πρέπει, όμως, κλείνοντας την εισήγησή μας αυτή, να τονίσουμε για άλλη μια φορά ότι:

> *«Οι νέες τεχνολογίες δεν πρέπει να υποκαταστήσουν τις βασικές κατανοήσεις και διαισθήσεις, αλλά να χρησιμοποιούνται κυρίως για να τις ενισχύσουν».(NCTN [18], σ.24-25)*

και επιπλέον ότι:

> *«Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής δεν είναι εργαλείο που λύνει με θαυμαστό τρόπο τα προβλήματα της διδασκαλίας της Ανάλυσης. Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής μπορεί, χωρίς καμία αμφιβολία, να βοηθήσει να ξεπεράσουμε τις συγκεκριμένες δυσκολίες, αλλά διάφορες έρευνες έδειξαν καθαρά ότι αυτό είναι αποτελεσματικό μόνο μέσα σε ένα συνεκτικό πλαίσιο διδασκαλίας και μάθησης.» (βλ. [1], σ. 197).*

ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ – ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1]. Artigue, M. (1991). "Analysis". In D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking (pp. 167-198).* Dordrecht: Kluwer Academic Press.

[2]. Asiala, M., Cottril, J., Dubinsky, E., & Schwingerdof, K.E. (1997). "The development of students' graphical understanding of the derivative". *Journal of Mathematical Behavior, 16 (pp. 399-431).*

[3]. Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeng, N.c. (1997). "Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative". *Educational Studies in Mathematics. 33 (pp. 301-317).*

[4]. Berry, J. & Nyman, M. (2003). "Promoting students' graphical understanding of calculus". *Journal of Mathematical Behavior, article in press.*

[5]. Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). "Development of the process conception of function". *Educational Studies in Mathematics, 23 (pp. 247-285).*

[6]. Czarnocha, B., Prabhu, V. & Vidacovic, D. (2000). "The concept of definite integral: Coordination of two schemas".

[7]. Dreyfus, T. & Vinner, S. (1989). "Images and definitions for the concept of function". *Journal for Research in Mathematics Education, 20, 4 (pp. 356-366).*

[8]. Dubinsky, E. (1989) "Visualisation in mathematics learning". *In the 13th International Conference for the psychology of Mathematics Education.* Paris, University of Paris.

[9]. Eisenberg, T. (1991). "Functions and associated learning difficulties". In D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking (pp. 140-152).* Dordrecht: Kluwer Academic Press.

[10]. Eisenberg, T. (1992). "On the development of a sense for functions". In Ed Dubinsky & G.Harel (Eds.). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA notes 25 (pp. 153-174).* Mathematical Association of America, Washington, DC.

[11]. Even, R. (1998). "Factors Involved in Linking Representations of Functions". *Journal of Mathematical Behavior. 17 (1) (pp. 105-121).*

[12]. Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. (1991). "Research in calculus learning: understanding limits, derivatives, and integrals". In E. Dubinsky & J. Kaput (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning (pp. 19-26).* Mathematical Association of America, Washington, DC.

[13]. Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). "Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis". In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 1-23).* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

[14]. Janvier, C. (1987). “Representation and understanding: The notion of function as an example”. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (*pp. 67-71).* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

[15]. Lauten, A. D., Graham, K. & Ferrini-Mundy, J. (1994). “Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator”. *Journal of Mathematical Behavior, 13 (pp. 225-237).*

[16]. Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). “Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching”. Review of Educational Research, 60, 1-64. Orton, Alex. (1983). Student's understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14 (pp. 235-250).*

[17]. McDermott, L. C., Rosenquist, M. L., & van Zee, E. H. (1987). “Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics”. *American Journal of Physics, 55 (pp. 503-513).*

[18]. NCTM (2000). *Principles and Standards for school Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

[19]. Orton, A. (1983a). “Students’ understanding of integration”. *Educational Studies in Mathematics, 14 (pp 1-18).*

[20]. Orton, A. (1983b). “Students’ understanding of differentiation”. *Educational Studies in Mathematics 14 (pp 235-250).*

[21]. Πολύζου Γ. (2004). “Η διδασκαλία της Ανάλυσης στο Λύκειο και μια διδακτική της προσέγγιση (Η σημασία της οπτικοποίησης στην κατανόηση της παραγώγου και του ολοκληρώματος)”. *Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα 2004.*

[22]. Rasslan, S. & Tall, D. (2002). “Definitions and Images for the Definite Integral Concept”. In Anne D. Cockburn & Elena Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group* for the Psychology of Mathematics Education, 4, (pp. 89–96), (Norwich, UK)

[23]. Selden, J., Selden, A., & Mason, A. (1994). “Even good calculus students can’t solve non-routine problems”. In E. Dubinsky & J. Kaput *(*Eds.*). Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning (pp.31-45).* Mathematical association of America, Washington, DC.

[24]. Sfard, A. (1991). “On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin”. *Educational Studies in Mathematics, 22 (pp. 1-36).*

[25]. Skemp, R. (1976) “Relational Understanding and Instrumental Understanding”. *Mathematics Teaching, 77 (pp.20-26)*

[26]. Tall, D. (1991). “Intuition and rigor: The role of visualization in the calculus”. In W. Zimmermann and S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics (pp. 105-119),* Mathematical Association of America, Washington, DC,

[27]. Tall, D., & Vinner, S. (1981). “Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and permanence”. *Educational Studies in Mathematics, 12, 2 (pp. 151-169).*

[28]. Vinner, S. (1989). “The avoidance of visual considerations in calculus students”. *Focus on Learning Problems in Mathematics 11(2) (pp.149—156).*

[29]. Zimmermann, W. (1991). “Visual thinking in calculus”, in W. Zimmermann and S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics (pp. 127-137).* Mathematical Association of America, Washington, DC

Εναλλακτικές προσεγγίσεις των μαθηματικών μέσα από δραστηριότητες

Χρίστος Μηλιώνης
Ενιαίο Πειραματικό Λύκειο Βαρβακείου Σχολής

1. Εισαγωγή

Το πλαίσιο της εισήγησης καθορίζεται κυρίως από τις απαντήσεις που ενδεχομένως θα δίναμε σε ερωτήματα, όπως:

- Μπορούμε να διδάξουμε τα μαθηματικά με τρόπο διαφορετικό από τον καθιερωμένο;
- Υπάρχουν τρόποι προσέγγισης της μαθηματικής γνώσης, απαλλαγμένοι από την απολυτότητα του καθαρού «διδακτικού» μαθηματικού λόγου;
- Είναι δυνατόν να καλλιεργηθούν στους μαθητές θετικά συναισθήματα για τα μαθηματικά και τη μαθηματική γνώση;

Ερωτήματα σαν τα παραπάνω, τα οποία συχνά τίθενται, τόσο από διδάσκοντες, όσο και από διδασκόμενους, έχουν οδηγήσει τη μαθηματική εκπαίδευση στην αναζήτηση εναλλακτικών μορφών και μέσων προσέγγισης και διδασκαλίας[3], ώστε να γίνουν τα μαθηματικά προσπελάσιμα και κατανοητά από τους μαθητές, παρά τη δεδομένη –και σε αρκετές περιπτώσεις μεγάλη- δυσκολία κατανόησης των μαθηματικών εννοιών.

Θεωρώντας τα προηγούμενα ερωτήματα σημαντικά, θα παρουσιάσουμε ορισμένες προτάσεις που θα μπορούσαν να δοθούν ως απαντήσεις.

2. Αλληλεπιδράσεις μεταξύ γνωστικών και συγκινησιακών λειτουργιών

Από την ψυχολογία γνωρίζουμε ότι η μάθηση δε λαμβάνει χώρα ανεξάρτητα από τα συναισθήματα των μετεχόντων στη μαθησιακή διεργασία, αλλά επηρεάζεται από ψυχολογικούς και συναισθηματικούς παράγοντες, οι οποίοι επιδρούν δυναμικά στη λογική σκέψη και επηρεάζουν τη λειτουργία της. Η συνάφεια μεταξύ των γνωστικών και συναισθηματικών διεργασιών παρέχει ενδείξεις ότι οι μεταβολές στη διάθεση του ατόμου επηρεάζουν την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων [4] και οδηγεί στη διαπίστωση ότι «μια σειρά από διαδικασίες, οι οποίες σχετίζονται άμεσα με τη λύση προβλήματος, έχουν ταυτόχρονα μια συνδεδεμένη συναισθηματική συνιστώσα»[5].

Εξάλλου, είναι πλέον γενικά παραδεκτό, ότι η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών είναι μια πολύπλευρη διεργασία της ανθρώπινης νόησης, η οποία προϋποθέτει την ικανότητα αφαίρεσης, κριτικής σκέψης και στοχασμού και παρουσιάζει αρκετές αντικειμενικές δυσκολίες.

Οι δυσκολίες αυτές αυξάνονται και από *φοβίες, άγχος, παρανοήσεις, προκαταλήψεις, πεποιθήσεις, «πιστεύω» και εσφαλμένες αντιλήψεις των μαθητών*

[3] Ενδεικτικά αναφέρουμε τις διαθεματικές προσεγγίσεις, τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων, την επίλυση προβλήματος, τη χρήση των ΤΠΕ κλπ.
[4] Ντάβου Μ. *(2000) Οι διεργασίες της σκέψης στην εποχή της πληροφορίας.*
[5] Φιλίπου Γ. –Χρίστου Κ. *(2001) Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των Μαθηματικών.*

για τα μαθηματικά και τη φύση της μαθηματικής γνώσης, που επηρεάζουν την σχέση των μαθητών με αυτά και δυσχεραίνουν την κατανόησή τους.

Όμως, αυτές οι αντιλήψεις και προκαταλήψεις για τα μαθηματικά διαμορφώνονται κυρίως από τις εμπειρίες, τις μεθόδους και τα βιώματα που αποκτούν οι μαθητές μέσα στη σχολική τάξη, αλλά και από τις αντιλήψεις για τα μαθηματικά που επικρατούν στο κοινωνικό περιβάλλον και τις οποίες μεταφέρουν και μεταδίδουν οι ενήλικες (γονείς εκπαιδευτικοί κ. α.) και οι οποίες είναι αποτέλεσμα των δικών τους εμπειριών κλπ.

Είναι παραδεκτό επίσης, ότι η θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά αποτελεί καθοριστικό και ευνοϊκό παράγοντα για την προσέγγισή τους και ασκεί δυναμική επίδραση στη διδασκαλία τους.

3. Μερικά σημαντικά ερωτήματα …

Συχνά τίθενται και ζητούν απάντηση τα ερωτήματα:

- *Τι είναι τα μαθηματικά;*
- *Πού υπάρχουν, πού εφαρμόζονται και σε τι χρησιμεύουν τα μαθηματικά;*
- *Γιατί πρέπει να μαθαίνουμε μαθηματικά;*
- *Γιατί είναι δύσκολα τα μαθηματικά;*
- *Πώς πρέπει να προσεγγίζουμε τα μαθηματικά;*

Τα ερωτήματα αυτά είναι πολύ σημαντικά για τη μαθηματική εκπαίδευση, καθόσον από την απάντησή τους εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά και έχουν τεθεί ακόμη και από κορυφαίους μαθηματικούς. Θα αναφέρουμε δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις.

Στο αξιόλογο έργο τους Η Μαθηματική Εμπειρία, οι συγγραφείς P.J. Davis και R. Hersh, βρίσκουν ότι «τα μαθηματικά είναι ένας άπειρα πολύπλοκος και μυστήριος κόσμος» και διερωτώνται θέτοντας ορισμένα βασικά ερωτήματα: «Τι είναι αριθμός; Τι είναι σύνολο; Τι είναι απόδειξη; Τι γνωρίζουμε στα μαθηματικά και πώς το γνωρίζουμε;…». Διατυπώνοντας αυτές τις ερωτήσεις αντιλαμβάνονται πως δε γνώριζαν τις απαντήσεις και συνεχίζουν: «Πού είναι η θέση των μαθηματικών; Πού υπάρχουν; Τι είναι η γνώση η μαθηματική ή οποιαδήποτε άλλη;»[6].

Ο Ούγγρος μαθηματικός *A. Renyi,* συγγραφέας των «Διαλόγων για τα Μαθηματικά», σημείωνε: *«Ενώ μιλούσα για τα μαθηματικά σε μη μαθηματικούς, αντιμετώπισα ένα μεγάλο αριθμό προκαταλήψεων, παρεξηγήσεων και εσφαλμένων αντιλήψεων, όχι μόνο μεταξύ ανθρώπων των οποίων τα κύρια ενδιαφέροντα και δραστηριότητες είναι μακριά από τα μαθηματικά αλλά και μεταξύ εκείνων που μέσω του επαγγέλματός τους έχουν μια κάποια γνώση σε κάποιον τομέα του μαθηματικού πεδίου… …Αυτές οι περιστάσεις με έπεισαν ότι υπάρχει πραγματική ανάγκη για μια συζήτηση των βασικών ζητημάτων των μαθηματικών και των εφαρμογών τους με ένα τρόπο, που ενώ θα τα κάνει προσιτά στους μη ειδικούς, θα παρουσιάζει αυτά τα προβλήματα στην πλήρη τους πολυπλοκότητα. Αναγνώρισα ότι δε θα ήταν έργο εύκολο να κάνεις τέτοια θέματα κατανοητά στο πλατύ κοινό, γι' αυτό το λόγο έψαξα για μια ειδική μέθοδο, για να φέρω αφηρημένα προβλήματα πιο κοντά στον κοινό άνθρωπο»,* για να καταλήξει: *«Υπάρχει πραγματική ανάγκη για μια συζήτηση των βασικών ζητημάτων των μαθηματικών και των εφαρμογών τους … Τι πράγματι είναι τα μαθηματικά; Θεωρώ τη συζήτηση αυτού του θέματος ιδιαίτερα σημαντική γιατί η*

[6] Davis P.J. - Hersh R. *(1981) Η Μαθηματική Εμπειρία.*

διδασκαλία των μαθηματικών στη στοιχειώδη και τη μέση εκπαίδευση βρίσκεται ακόμα μακριά από το να δίνει μια ξεκάθαρη σωστή και εμπεριστατωμένη απάντηση.»[7].

4. **… ορισμένες απαντήσεις**

Ας σταχυολογήσουμε ορισμένες απαντήσεις στα ερωτήματα της προηγούμενης ενότητας, ενδεικτικές του τρόπου με τον οποίο κορυφαίοι μαθηματικοί του καιρού μας αντιμετωπίζουν το πρόβλημα και των λύσεων που προτείνουν:

Ο γνωστός Γάλλος μαθηματικός και συγγραφέας Serge Lang, στο έργο του *«Η γοητεία των μαθηματικών»* σημειώνει: *«Ίσως νοιώθατε έκπληξη αν κάποιος ισχυριζόταν ότι τα μαθηματικά είναι κάτι εξαιρετικά όμορφο… Πολλοί άνθρωποι αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά με προκατάληψη η οποία αναπτύσσεται ήδη από τις πρώτες τάξεις της στοιχειώδους εκπαίδευσης…»* και συνεχίζει στις *«Μαθηματικές Συναντήσεις»*: *«Πήγα σε σχολεία προκειμένου να συζητήσω για τα μαθηματικά με μαθητές… Ήθελα να τους δείξω όμορφα μαθηματικά, ιδωμένα όμως με τον τρόπο ενός μαθηματικού. Η γνώμη μου είναι ότι στα περισσότερα σχολικά βιβλία τα μαθηματικά θέματα αντιμετωπίζονται με τρόπο που δεν έχει συνοχή. Η μια λεπτομέρεια στοιβάζεται πάνω στην άλλη, συχνά χωρίς ρυθμό ή λογική… Μεγάλο τμήμα του αναλυτικού προγράμματος στη στοιχειώδη και τη μέση εκπαίδευση είναι εξαιρετικά στεγνό… κάτι εντελώς διαφορετικό ελπίζω να σας εμπνεύσει και ίσως κάνοντας μαθηματικά καταλήξετε να τα αγαπήσετε όπως αγαπάτε τη μουσική. … Τα μαθηματικά υπάρχουν, είναι ζωντανά, όχι κάτι στερεότυπο, παλιό και μουχλιασμένο. … Κάθε δάσκαλος πρέπει να πορευτεί σύμφωνα με το δικό του τρόπο, τη δική του όσφρηση. Καθένας πρέπει να χρησιμοποιήσει τα δικά του μέσα για να συγκινήσει τους μαθητές. Χρειαζόμαστε τα πάντα, χωρίς αποκλεισμούς.»*[8]

Ο M. Kline παρατηρεί ότι *«στα σχολεία τα μαθήματα και τα βιβλία παρουσιάζουν τα μαθηματικά σαν μια σειρά τεχνικών διαδικασιών χωρίς κανένα νόημα»* και σημειώνει την άποψη του B. Russel ότι *«τα μαθηματικά, αν κοιταχτούν σωστά, χαρακτηρίζονται… από την ύψιστη ομορφιά»*[9].

Για τη σημασία της φαντασίας και του τρόπου με τον οποίο προσεγγίζουμε τη γνώση, ο A. Einstein ισχυριζόταν ότι: *"η φαντασία είναι πιο σημαντική από τη γνώση"*. Ο Lewis Carroll, μαθηματικός και συγγραφέας του 19ου αιώνα, στο γνωστό παιδικό βιβλίο «Τι βρήκε η Αλίκη μέσα στον καθρέπτη», μέσα από τα λόγια της Αλίκης σημείωνε: *«Θα έβλεπα τον κήπο πολύ καλύτερα» μονολόγησε η Αλίκη, «αν μπορούσα να φτάσω στην κορυφή αυτού του λόφου: και να ένα μονοπάτι που οδηγεί κατ' ευθείαν εκεί…»*[10]. Χρειαζόμαστε λοιπόν φαντασία, αλλά και καλύτερη και πιο σφαιρική θέαση του κόσμου προκειμένου να τον κατανοήσουμε καλύτερα.

Οι P.J. Davis και R. Hersh, συγγραφείς του έργου «Η Μαθηματική Εμπειρία», θεωρούν ότι *«Τα μαθηματικά είναι ένας άπειρα πολύπλοκος και μυστήριος κόσμος. Η εξερεύνησή του είναι μια έξη από την οποία ελπίζω να μη θεραπευτώ ποτέ…»* και σημειώνουν: *«για να κατανοήσουμε τα μαθηματικά μιας προηγούμενης περιόδου χρειάζεται να διεισδύσουμε στην ατομική και συλλογική συνείδηση της εποχής τους»*[11].

---

[7] Renyi A. *(1979) Διάλογοι για τα Μαθηματικά.*
[8] Lang S., *(1997) Η γοητεία των μαθηματικών* και *(1998) Μαθηματικές Συναντήσεις.*
[9] Kline M., *Τα Μαθηματικά στο Δυτικό Πολιτισμό.*
[10] Carroll L. *(1991) Τι βρήκε η Αλίκη μέσα στον καθρέπτη*, εκδ. ερμείας, σελ.29.
[11] Davis P.J. - Hersh R., *(1981) Η Μαθηματική Εμπειρία.*

Χρειαζόμαστε επιπλέον, την περιέργεια και το πάθος του εξερευνητή, αλλά και την γνώση της Ιστορίας προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα τα μαθηματικά.

Αναφερόμενος στη σημασία του τρόπου με τον οποίο προσεγγίζουμε και διδάσκουμε τα μαθηματικά ο *D. Guedj,* στο *«Θεώρημα του παπαγάλου»* πολύ χαρακτηριστικά σημειώνει: *«Οι επιστημονικές αλήθειες χρειάζονται ωραίες ιστορίες για να τραβήξουν τους ανθρώπους. Εδώ ο μύθος δεν ανταγωνίζεται την πραγματικότητα, αλλά τη συνδέει μ' αυτά που οι άνθρωποι αγαπούν και που τους κάνουν να ονειρεύονται.»*[12]. Πρέπει λοιπόν να αναζητούμε πάντα τον καλύτερο τρόπο με τον οποίο θα προσεγγίσουμε τη μαθηματική γνώση.

Για το ίδιο θέμα, αναφερόμενος στον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών, ο *J. Garofalo* σημειώνει: *«η διδασκαλία των μαθηματικών θάπρεπε να δίνει έμφαση σε δραστηριότητες που ενθαρρύνουν τους μαθητές να εξερευνούν τα μαθηματικά θέματα, να αναπτύσσουν και να εξελίσσουν τις δικές τους ιδέες, στρατηγικές και μεθόδους και να αντανακλά και να εξετάζει από διαφορετικές οπτικές γωνίες τις μαθηματικές έννοιες και τις διαδικασίες. ...Η τάξη των μαθηματικών πρέπει να έχει ζωντάνια, συνεργασία και μια ατμόσφαιρα έρευνας, εξερεύνησης και ανακάλυψης. Προωθώντας μια τέτοια προσέγγιση στα σχολικά μαθηματικά θα εισάγουμε τους μαθητές σε περισσότερο ενδιαφέρουσες και αντιπροσωπευτικές πλευρές των μαθηματικών και της μαθηματικής σκέψης»*[13].

5. … και ορισμένες επιπλέον συνιστώσες

Για να διευρύνουμε το πλαίσιο μέσα από το οποίο κατανοούμε την προσέγγιση των μαθηματικών, στις παραπάνω διατυπωμένες θέσεις και προτάσεις μπορούμε να προσθέσουμε ότι τα μαθηματικά ως κατ' εξοχήν προϊόν της ανθρώπινης δραστηριότητας , βρίσκονται σε αλληλεπίδραση με όλους τους τομείς της κοινωνικής ζωής και «ως σχολικό μάθημα υπόκεινται σε μια σειρά κοινωνικών και πολιτισμικών καθορισμών, οι οποίοι διαμορφώνουν αντίστοιχα τους στόχους, το περιεχόμενο, τις διδακτικές πρακτικές, τα μέσα διδασκαλίας, τις τεχνικές αξιολόγησης και γενικότερα το σύνολο των δραστηριοτήτων της μάθησης και της διδασκαλίας τους»[14]. Εξ' άλλου, η αισθητική και ιστορική συνιστώσα των μαθηματικών και η ιδιαίτερη σχέση τους με την τέχνη και τον πολιτισμό αφενός[15], το πλήθος των εφαρμογών τους και το σύνολο των επιστημών που χρησιμοποιούν τα μαθηματικά αφετέρου, προσφέρουν στη διδασκαλία τους αρκετές *δυνατότητες προσεγγίσεων με πρακτική και κοινωνική αναφορικότητα.*

Από την κοινωνική και παιδαγωγική σκοπιά επίσης, είναι ιδιαίτερα σημαντικό και ένα πρόσθετο δεδομένο. Ότι το σχολείο πρέπει να προσφέρει στα παιδιά τη δυνατότητα:

- *να μαθαίνουν να δουλεύουν ομαδικά* –όταν σήμερα κυριαρχεί ο ανταγωνισμός σε όλα τα επίπεδα της κοινής τους ζωής- και
- *να σκέφτονται*- ενώ σήμερα καλούνται να καλύπτουν την ύλη για να αποκτούν συγκριτικά πλεονεκτήματα στην αγορά εργασίας.

Μια επίσης σημαντική θέση είναι ότι τα παιδιά μαθαίνουν καλύτερα όταν η έμφαση δεν δίνεται στο αποτέλεσμα, αλλά στην ίδια τη διαδικασία. Γι' αυτό, όπως σημειώνει η Α. Γιαννικοπούλου, η επαφή με τη γνώση είναι αποτελεσματικότερη

[12] *Guedj D. (1999) Το θεώρημα του παπαγάλου,* μεταφρ. Τ. Μιχαηλίδης, Αθήνα: Πόλις, σελ. 604.
[13] Garofalo J. *(1994)* Οι πεποιθήσεις και πως αυτές επηρεάζουν την επίδοση στα Μαθηματικά.
[14] Χασάπης Δ. *(2005) Κοινωνικές και πολιτιστικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης.*
[15] Φίλη Χ. *(1987) Αμφίδρομα Παράλληλες Αναζητήσεις Επιστήμης και Τέχνης.*

όταν τα διάφορα διδακτικά αντικείμενα αναμειγνύονται.[16] Στο πλαίσιο αυτό, η χρήση της λογοτεχνίας μπορεί να λειτουργήσει ως ένας φυσικός καταλύτης στην ενοποίηση των διδακτικών αντικειμένων, που στο χώρο του σχολείου όχι μόνο εξετάζονται χωριστά, αλλά μερικές φορές δείχνουν να αντιμάχονται το ένα το άλλο.

Μια επιπλέον συνιστώσα της εκπαίδευσης αναφέρει ο *F. Savator,* ο οποίος θεωρεί ότι το πιο αξιοσημείωτο αποτέλεσμα της καλής εκπαίδευσης είναι *«να ανοίγει την όρεξη για περισσότερη εκπαίδευση, για νέα μαθήματα, νέες παραδόσεις»*[17]. Μέσα από μια τέτοια αντίληψη για την εκπαίδευση, οι μαθητές καλούνται *να κατανοήσουν σημασίες και όχι απλώς να επεξεργαστούν πληροφορίες.*

6. Ενδεικτικές δραστηριότητες

Η αναζήτηση της αλήθειας πρέπει να είναι ο σκοπός της δραστηριότητάς μας
H. Poincaré, Η αξία της επιστήμης

Θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε ορισμένες δραστηριότητες, οι οποίες μπορούν να υλοποιηθούν στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών και οι οποίες προσφέρουν δυνατότητες εναλλακτικών προσεγγίσεων των μαθηματικών. Μέσα από τις δραστηριότητες αυτές, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ξεπεράσουν τις προκαταλήψεις και εσφαλμένες αντιλήψεις που συχνά επικρατούν για τα μαθηματικά και το περιεχόμενό τους και να αποκτήσουν θετική στάση απέναντί τους. Επιδίωξή μας είναι, οι μαθητές να διευκολύνονται στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και τα μαθηματικά να γίνουν προσπελάσιμα και λιγότερο δύσκολα για τους μαθητές.

Ενδεικτικά θα αναφερθούμε στις εξής δραστηριότητες τις οποίες και προτείνουμε:

- *Μαθηματικά και Λογοτεχνία*
- *Θεατρικές παραστάσεις*
- *Θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών*
- *Εκθέσεις (οργάνωση ή επίσκεψη)*
- *Εκδηλώσεις διάφορες, μαθηματικού περιεχομένου*
- *Εκδοτικές δραστηριότητες*
- *Φιλοτελισμός*

Όλες οι δραστηριότητες προσφέρουν στον εκπαιδευτικό τη δυνατότητα για *διαφοροποιημένες και εξατομικευμένες διδακτικές παρεμβάσεις* και οφείλουν να προσαρμόζονται στις ιδιαίτερες συνθήκες και δεδομένα που επικρατούν σε κάθε σχολείο ή τάξη, ώστε να επιτυγχάνεται το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Σε καμία περίπτωση δεν αποτελούν πανάκεια για τη λύση των προβλημάτων της μαθηματικής εκπαίδευσης, ενώ υπάρχει κίνδυνος να εμφανιστούν διάφορα προβλήματα κατά την εφαρμογή τους. Για το λόγο αυτό απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή κατά την υλοποίησή τους και πρέπει να αποφεύγεται η κατάχρησή τους. Είναι προφανές ότι οι δραστηριότητες αυτές *δεν υποκαθιστούν τη διδασκαλία των μαθηματικών, απλά την υποστηρίζουν* και πως όταν μιλάμε για τα μαθηματικά δε σημαίνει ότι κάνουμε μαθηματικά.

Μαθηματικά και Λογοτεχνία

Με το μηδέν και το άπειρο να συμφιλιωθούμε,

Κ. Καρυωτάκης

---

[16] Γιαννικοπούλου, Α. *(2002)* Λογοτεχνία και Μαθηματικά.
[17] Savator F. *(2004) Η αξία του εκπαιδεύειν.*

Όταν η λογοτεχνία διαπραγματεύεται θέματα ιστορίας, φιλοσοφίας, επιστημολογίας, έρευνας, εφαρμογών και διδακτικής των μαθηματικών, χαρακτηρίζεται ως *μαθηματική λογοτεχνία*. Η αξιοποίηση της μαθηματικής λογοτεχνίας στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών μπορεί να επιτευχθεί με ποικίλους τρόπους,[18] όπως:

- η ανάγνωση και παρουσίαση στην τάξη ενός μαθηματικού λογοτεχνικού έργου, (ή αποσπασμάτων του) με μαθηματικό περιεχόμενο,
- η διεξαγωγή συζήτησης πάνω στο περιεχόμενο ενός μαθηματικού λογοτεχνικού έργου,
- η συγγραφή μιας απλής ή συνθετικής εργασίας για το περιεχόμενο ενός μαθηματικού λογοτεχνικού έργου κ. α.

Οι δραστηριότητες αυτές μπορούν να διεξαχθούν, είτε σε συνεργασία με τον καθηγητή των μαθηματικών ή σε συνεργασία με το φιλόλογο ή άλλο καθηγητή της τάξης (διαθεματική- διεπιστημονική προσέγγιση) και οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να εργαστούν ατομικά ή ομαδικά.

Σημειώνουμε ότι η μαθηματική λογοτεχνία:

- *Προσφέρεται ως μέσο για την προσέγγιση των μαθηματικών, την εξοικείωση των μαθητών με τις μαθηματικές έννοιες, την αντιμετώπιση αρνητικών στάσεων, πεποιθήσεων, προκαταλήψεων και άγχους για τα μαθηματικά και για τη διαμόρφωση θετικής στάσης απέναντι τους.*
- Απαλλαγμένη από την απολυτότητα του καθαρού μαθηματικού λόγου, αναμειγνύει μυθοπλασία και μαθηματικά και επιδιώκει την προσέλκυση του ενδιαφέροντος και της φαντασίας των αναγνωστών, ώστε το ταξίδι στον κόσμο των μαθηματικών να εξελιχθεί σε συναρπαστική περιπέτεια και να προσφέρει μια μοναδική εμπειρία.
- Ο μύθος δε χρησιμοποιείται ανταγωνιστικά προς τις μαθηματικές αλήθειες, αλλά έχει σκοπό να τις κάνει περισσότερο θελκτικές και να προκαλέσει το ενδιαφέρον για την αναζήτησή τους.
- Τα μέσα που χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών είναι η λογική αλλά και το συναίσθημα, η φαντασία αλλά και η παρατήρηση του πραγματικού κόσμου, ο στοχασμός και η κριτική σκέψη.

Τόσο η ενσωμάτωση μαθηματικών εννοιών σε λογοτεχνικά κείμενα, όσο και η δραματοποίηση μαθηματικών κειμένων παρουσιάζουν ιδιαίτερες δυσκολίες. Παρόλα αυτά, τα τελευταία χρόνια κυκλοφορούν αρκετά έργα μαθηματικής λογοτεχνίας και δραματικοί διάλογοι που καλύπτουν όλες τις ηλικίες των μαθητών (από το Νηπιαγωγείο και το Δημοτικό σχολείο μέχρι το Γυμνάσιο και το Λύκειο), ανταποκρίνονται σε όλα τα επίπεδα κατανόησης των μαθηματικών και προσφέρονται για διδακτική αξιοποίηση. Ενδεικτικά αναφέρουμε ορισμένα από τα πεζά και τα θεατρικά κείμενα, τα οποία είναι αντιπροσωπευτικά των τάσεων που υπάρχουν στο χώρο της λογοτεχνίας και της δραματουργίας.

Για παιδιά της προσχολικής και της πρωτοσχολικής ηλικίας έχουν γραφεί παιδικά έργα από τον Ε. Τριβιζά *(Η πριγκίπισσα Δυσκολούλα, Τα 88 ντολμαδάκια κ.α.),* με τα οποία εισάγονται βασικές μαθηματικές έννοιες (αριθμοί, σύγκριση μεγεθών, κλπ.). Αναφέρουμε επίσης τις *Ιστορίες από το τηλέφωνο* του G. Rodari, τις *Περιπέτειες της*

[18] Μηλιώνης Χ. *(2001) Μαθηματική λογοτεχνία: Ένα εργαλείο για τη διδασκαλία των μαθηματικών,* Μιχαηλίδης Τ. (2002) *Μαθηματική Λογοτεχνία: μια πρόκληση* και Μπαλής, Σ. *(2002) Διαθεματικές δραστηριότητες. Από τα μαθηματικά στην ποίηση-πεζογραφία -αρχαία ελληνική γραμματεία.*

Αλίκης στη χώρα των θαυμάτων και το *Μέσα από τον καθρέπτη και τι βρήκε η Αλίκη εκεί* του L. Carroll.

Για τις μεγαλύτερες ηλικίες (παιδιά Γυμνασίου ή Λυκείου) αναφέρουμε τα έργα: *Ο Άνθρωπος που μετρούσε* του M. Tahan, *Flatland η επιπεδοχώρα* του E. Abbott, *Το πειραχτήρι των Αριθμών* του H. M. Enzensberger, *Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ* του Α. Δοξιάδη, *Το θεώρημα του παπαγάλου,* και *Το μέτρο του κόσμου* του D. Guedj, *Φλάτερλαντ η περιπέτεια των πολλών διαστάσεων* του I. Stewart, *Ο Μυστικός Δείπνος* του J. Casti, *Το χαμόγελο του Τούρινγκ* του Χ. Παπαδημητρίου, *Η Ράβδος του Ευκλείδη* του J.-P. Luminet, *Η σιωπή της καμηλοπάρδαλης* και *Ο αλγόριθμος της μελαγχολίας* του Κ. Φραμπέτι, Η αρχαιολογία του μηδενός του Α. Ναντώ, *Ο Γάλλος μαθηματικός* του T. Petsinis κ.α., όπως και το έργο του Σ. Μπαλή *Μαθηματικά και Ποίηση από τον Αρχιμήδη στον Ελύτη,* στο οποίο ο συγγραφέας ανθολογεί ποιήματα ελλήνων ποιητών, στα οποία η ομορφιά των μαθηματικών συναντιέται την ομορφιά της ποίησης.

Θεατρικές παραστάσεις

Η αξιοποίηση του εκπαιδευτικού δράματος στη διδασκαλία των μαθηματικών στηρίζεται στην παιδευτική διάσταση του θεάτρου, η οποία, διαπιστωμένη από την πρώτη στιγμή της εμφάνισής του στην αρχαία Ελλάδα, αποτέλεσε βασικό ζητούμενο στη διαχρονική παρουσία και εξέλιξή του μέχρι σήμερα[19]. Η εισαγωγή της θεατρικής τέχνης στην εκπαίδευση και η αξιοποίησή της για διδακτικούς-εκπαιδευτικούς σκοπούς γίνεται κυρίως με τη μορφή του εκπαιδευτικού δράματος[20].

Η παρουσία των μαθηματικών σε θεατρικά κείμενα και δραματοποιημένους διαλόγους είναι αξιοσημείωτη. Από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα γράφονται έργα, τα οποία έχουν θεατρική μορφή και μαθηματικό περιεχόμενο. Είτε πρόκειται για έργα του κλασικού ή σύγχρονου δραματολογίου, είτε για ειδικά γραμμένα ή διασκευασμένα για σχολική χρήση θεατρικά έργα ή δραματοποιημένους διαλόγους, η διδακτική αξιοποίησή τους συμβάλλει στην ανάπτυξη δυναμικής αλληλεπίδρασης ανάμεσα στους μαθητές, τον εκπαιδευτικό και την διδασκόμενη μαθηματική γνώση και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέσο προσέγγισης και εξοικείωσης των μαθητών με τα μαθηματικά.

Η θεατρική εμπειρία επιδρά θετικά και στην *κοινωνικοποίηση* και τη *διαμόρφωση ταυτότητας* των παιδιών. Ως καλλιτεχνική δραστηριότητα προσφέρει στους μαθητές ένα τρόπο ολοκληρωμένης εμπειρίας και ενισχύει τη φαντασία τους, η οποία συμβάλλει στην ανάπτυξη της λογικής σκέψης και τους προσφέρει τη δυνατότητα να οραματίζονται πραγματικότητες και δυνατότητες, οι οποίες δεν εμφανίζονται κάτω από φυσιολογικές συνθήκες αντίληψης μέσω των αισθήσεων[21].

Με τη διαμόρφωση της *δυναμικής επικοινωνιακής ατμόσφαιρας* που προσφέρει η δραματοποιημένη εμπειρία, αναδεικνύεται και αξιοποιείται ο καθοριστικής σημασίας ρόλος της επικοινωνίας και της κοινωνικής αλληλεπίδρασης στη διαδικασία της μάθησης, διευκολύνεται η ενεργητική συμμετοχή των μαθητών σε αυτή, ενισχύεται η προσληπτική ικανότητά τους και αναπτύσσεται η συλλογικότητα στη γνώση.

---

[19] Γραμματάς Θ. *(1987) Το Θέατρο στο σχολείο, από τη φιλολογία στη σκηνή, (1996) Fantasyland Θέατρο για Παιδικό και Νεανικό Κοινό, (1998) Θέατρο και Παιδεία.*, και Μηλιώνης Χ. *(2002) Τα Μαθηματικά στο Θέατρο: Δυνατότητες διδακτικής αξιοποίησης.*

[20] Jackson T. *(1993) Learning through theatre, new perspectives on theatre in education.* Γκόβας Ν. *(2002) Το θέατρο στην εκπαίδευση: μορφή τέχνης και εργαλείο μάθησης.*

[21] Rodari G. *(1985) Γραμματική της Φαντασίας.*

Ως ενδεικτικά παραδείγματα δραματικών διαλόγων αναφέρουμε τα έργα: *Διάλογοι για τα Μαθηματικά* του A. Rényi,[22] *Τα παιδιά του Ευκλείδη* του Η. Κωνσταντόπουλου, *Ένας σωκρατικός διάλογος* του J.-P. Kahane και *Η ζωή του Γαλιλαίου* του B. Brecht.

Επίσης, για μικρότερα παιδιά (πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης), ορισμένα θέματα δραματοποιήσεων μαθηματικού περιεχομένου της Άλκηστης *(Το τρίγωνο και ο εξωτρίγωνος, Ο πρόεδρος των σχημάτων, τα σχήματα στο μουσείο σύγχρονης τέχνης κ.α.)* λειτουργούν ως αφορμές έμπνευσης και διαβάζονται στα παιδιά σαν ερέθισμα, ώστε να τους δοθούν ευκαιρίες για δικές τους δραματοποιήσεις.

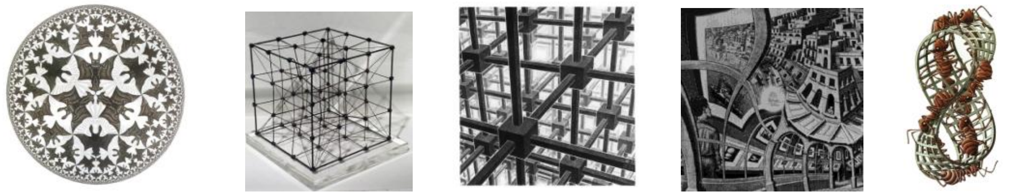
Οι μαθητές, ως ακροατές ή θεατές και ακόμη περισσότερο συμμετέχοντας ενεργά στην προετοιμασία και το ανέβασμα της θεατρικής παράστασης ή του θεατρικού αναλογίου, έχουν τη δυνατότητα να παρακολουθήσουν την αντιπαράθεση και την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών και να στοχαστούν πάνω σε αυτές, χωρίς τους περιορισμούς και τις συμβατικές σχέσεις του τυποποιημένου σχολικού μαθήματος.

Θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών

Η συνεισφορά της ιστορίας των μαθηματικών στις διεργασίες μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών είναι σημαντική. Η ιστορία των μαθηματικών μας δίνει τη δυνατότητα να μελετήσουμε την επιστημονική, φιλοσοφική, πολιτιστική και κοινωνική συγκυρία, μέσα στην οποία έγινε η επεξεργασία της μαθηματικής γνώσης και αποτελεί μια μορφή «θεραπείας» του δογματισμού, στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών και θεωριών[23]. Με τη μελέτη ιστορικών και βιογραφικών αφηγήσεων, δίνεται η δυνατότητα για μια δυναμική κατανόηση των ιστορικών γεγονότων και εποχών και της επίδρασής τους στην εξέλιξη των μαθηματικών, στοιχείο που προσφέρεται και για διαθεματικές και διεπιστημονικές προσεγγίσεις στο πλαίσιο του σχολείου.

Οι μαθητές μιας τάξης ή ενός τμήματος συλλέγουν ιστορικά στοιχεία για μαθηματικούς ή για τα μαθηματικά και τις παρουσιάζουν στην τάξη ή σε εκδήλωση του σχολείου ή τις δημοσιεύουν σε κάποιο μαθητικό έντυπο.

Εκθέσεις (οργάνωση ή επίσκεψη)



Έργα του Ολλανδού χαράκτη M.C.Escher (1898-1972)

Η οργάνωση μιας έκθεσης προσφέρεται ως μέσο εναλλακτικής προσέγγισης του θέματός της. Το ίδιο ισχύει και για την προετοιμασία και πραγματοποίηση μιας επίσκεψης σε έκθεση που έχει οργανωθεί. Η αμεσότητα στην προσέγγιση και την επικοινωνία των μαθητών με το θέμα της έκθεσης, προσδίδει δυναμικό χαρακτήρα στην επίσκεψη και μπορεί να εξασφαλίσει σε μεγάλο βαθμό την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών.

[22] Γαζίλα, Β. *(1993) Πώς μια θεατρική παράσταση για τα μαθηματικά καλύπτει κενά στη διδασκαλία τους στη μέση εκπαίδευση.*
[23] Barbin E. *(1989) Μια περίπτωση διδασκαλίας των μαθηματικών με ιστορική προοπτική.*

Οι μαθητές μιας τάξης ή ενός τμήματος του σχολείου, μπορούν να οργανώσουν ή να επισκεφτούν μια έκθεση με θέμα σχετικό με τα μαθηματικά.

Ενδεικτικά αναφέρουμε την οργάνωση εκθέσεων με θέμα:

- Έκθεση βιβλίου με θέμα την ιστορία των μαθηματικών, λογοτεχνίας των μαθηματικών, βιογραφίες μαθηματικών, κλπ.
- Έκθεση εποπτικών και διδακτικών εργαλείων των μαθηματικών (διαβήτες, γνώμονες, γεωμετρικά στερεά κλπ.)
- Έκθεση έργων τέχνης εμπνευσμένων από τα μαθηματικά.
- Έκθεση γραμματοσήμων με θέμα τα μαθηματικά

Αρκετές είναι οι εκθέσεις που έχουν οργανωθεί ή οργανώνονται από διάφορους μορφωτικούς, πολιτιστικούς, εκπαιδευτικούς ή άλλους φορείς και οι οποίες προφέρονται για επίσκεψη και αξιοποίηση από τους μαθητές. Στις περισσότερες περιπτώσεις οι οργανωτές των εκθέσεων προσφέρουν και κατάλληλο εκπαιδευτικό πρόγραμμα, το οποίο μπορούν να αξιοποιήσουν οι επισκέπτες.

Ενδεικτικά αναφέρουμε παραδείγματα εκθέσεων που έχουν ήδη οργανωθεί:

- Την έκθεση του Ιδρύματος Μείζονος Ελληνισμού με θέμα: «Υπάρχει σε όλα λύση; Ταξίδι στον κόσμο των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών» κατάλληλη για όλες της ηλικίες.
- Την έκθεση της Εθνικής Εστίας Επιστημών, η οποία προσφέρει εκπαιδευτικά προγράμματα για τα σχολεία.
- Την έκθεση της Διεθνούς Ένωσης Μαθηματικών και της Unesco, στο Μέγαρο Μουσικής Αθηνών, με θέμα: «Σε τι χρειάζονται τα μαθηματικά;» (3-31 Μαρτίου 2005) κατάλληλη κυρίως για μαθητές Λυκείου.
- Την έκθεση ζωγραφικής του M. C. Echser (και στη συνέχεια των M. C. Echser και V. Vasarely) από το «μουσείο της οδού Ηρακλειδών» με εκπαιδευτικά προγράμματα για όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης.

Εκδηλώσεις διάφορες, μαθηματικού περιεχομένου

Οι μαθητές μιας τάξης (ή ενός τμήματος ή ομάδα μαθητών ή όμιλος ή όλο το σχολείο) οργανώνουν εκδηλώσεις αφιερωμένες στα μαθηματικά ή σε μαθηματικούς, όπως:

- Συναντήσεις και συζητήσεις με γνωστούς και διακεκριμένους μαθηματικούς.
- Οργάνωση ή παρακολούθηση διαφόρων διαλέξεων με θέμα μαθηματικού περιεχομένου (Π.χ. η διάλεξη του βραβευμένου με το βραβείο Fields Γάλλου μαθηματικού L. Lafforgue στο Μέγαρο Μουσικής).

Οι εκδηλώσεις μπορούν να αναφέρονται σε διάφορα θέματα, όπως:

- Μαθηματικά και Τέχνη (μουσική, ζωγραφική κλπ).
- Μαθηματικά και Επιστήμες (φυσική, ιατρική, οικονομία, αστρονομία κλπ.).
- Αρχαία ελληνικά μαθηματικά και αρχαίοι έλληνες μαθηματικοί, μαθηματικά άλλων πολιτισμών κλπ.
- Μαθηματικά και κοινωνία.
- Μαθηματικά και εκπαίδευση.
- Μαθηματικά και γυναίκες.
- Τα μαθηματικά της καθημερινής ζωής.

Εκδοτικές δραστηριότητες

Οι μαθητές προβαίνουν στην έκδοση περιοδικού ή εφημερίδας μαθηματικού περιεχομένου ή στήλης σε περιοδικό ή εφημερίδα γενικού περιεχομένου. Η δραστηριότητα αυτή παρουσιάζει πολλά πλεονεκτήματα και μπορεί να οργανωθεί από τους μαθητές μιας τάξης ή από ομάδα μαθητών. Μια άλλη δυνατότητα προσφέρουν τα περιοδικά που κυκλοφορούν και στα οποία οι μαθητές μπορούν να στέλνουν τις εργασίες τους (π.χ. το περιοδικό *Ευκλείδης* της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας)

Τα θέματα του περιοδικού μπορούν να είναι ποικίλα και να επιλέγονται από τους μαθητές ή σε συνεργασία με τον καθηγητή τους. Οι μαθητές μπορούν να γράφουν τις σκέψεις τους και τα συναισθήματά τους για τα μαθηματικά, τις δυσκολίες που συναντούν σε ορισμένες ενότητες, να κάνουν προτάσεις κλπ. Το μαθηματικό περιοδικό ή η εφημερίδα θα μπορούσε να λειτουργήσει ως μέσο ανεπίσημης επικοινωνίας των μαθητών μεταξύ τους και με τούς καθηγητές, ανάπτυξης της συνεργασίας κλπ.[24]

Φιλοτελισμός

Τα μαθηματικά ως παγκόσμιο και πανανθρώπινο πνευματικό και πολιτιστικό δημιούργημα, δεν έχουν σύνορα ούτε πατρίδα και τόπο μόνιμης κατοικίας. Τα μαθηματικά αποτελούν παγκόσμιο μέσο επικοινωνίας των λαών και των πολιτισμών.

Η παγκοσμιότητα των μαθηματικών φαίνεται και από το γεγονός ότι μαθηματικά θέματα έχουν αποτυπωθεί στα γραμματόσημα όλων σχεδόν των χωρών της Γης. Η ιστορία των μαθηματικών και οι σημαντικότερες στιγμές της, οι κορυφαίοι μαθηματικοί της ανθρωπότητας, οι εφαρμογές των μαθηματικών και τα σημαντικότερα γεγονότα που σχετίζονται με τα μαθηματικά, επέτειοι, διαγωνισμοί και άλλες μαθηματικές εκδηλώσεις, είναι τα κυριότερα από τα θέματα που απεικονίζονται σε γραμματόσημα των περισσοτέρων χωρών.

Οι μαθητές μπορούν να αξιοποιήσουν σειρές γραμματοσήμων από όλο τον κόσμο που έχουν σα θέμα τους διάσημους μαθηματικούς ή μαθηματικά ζητήματα για να έχουν μια ευχάριστη προσέγγιση των μαθηματικών. Η ομάδα φιλοτελιστών του σχολείου μπορεί να οργανώσει έκθεση γραμματοσήμων με μαθηματικό θέμα, να αναζητήσει (στο διαδίκτυο, σε ειδικές εκδόσεις κ.α.) σειρές γραμματοσήμων και να τις παρουσιάσει με πολλούς και διάφορους τρόπους. Γραμματόσημα μπορούν επίσης να αξιοποιηθούν για τη διακόσμηση της τάξης ή άλλων χώρων του σχολείου.

7. Ιστορικές παρατηρήσεις αντί συμπερασμάτων ή ορισμένα συμπεράσματα μέσω ιστορικών παρατηρήσεων

Αντί να συνοψίσουμε, θα κλείσουμε με ορισμένες ιστορικού περιεχομένου, επίκαιρες όμως ως τις μέρες μας, παρατηρήσεις, οι οποίες αναδεικνύουν τη σημασία, τη σοβαρότητα, αλλά και τη διαχρονικότητα των προβλημάτων της μαθηματικής εκπαίδευσης, τα οποία προσπαθήσαμε να θίξουμε με την εισήγηση και να αναδείξουμε την αναγκαιότητα αναζήτησης της επίλυσής τους.

[24] Τουμάσης, Μ. *(1994) Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*.

Ο σημαντικότατος έλληνας μαθηματικός των αρχών του 20^{ου} αιώνα Ν. Ι. Χατζηδάκης (1872-1942), καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών, έχοντας αντιληφθεί την ουσία των προβλημάτων της μαθηματικής εκπαίδευσης και της ανάπτυξης των μαθηματικών, έκανε διαπιστώσεις και προτάσεις για την αντιμετώπισή τους.[25]

Σε διάλεξή του στο Μαθηματικό Φοιτητικό Σύνδεσμο, το 1910 σημείωνε ότι: *«τα Μαθηματικά δεν έχουν εξωτερικόν ελκυστικόν, καθώς τόσες άλλες επιστήμες… όποιος όμως ζητεί να εύρη για τον εαυτόν του τις υψηλότερες απολαύσεις του πνεύματος, αυτός ας σπουδάσει προ πάντων μαθηματικά».*

Ο Ν. Ι. Χατζηδάκης με την οργάνωση σεμιναρίων επιδιώκει «*τον ζήλον των φοιτητών* προς περαιτέρω έρευνα» και από το 1905-1906 είχε καθιερώσει το *μάθημα της Ιστορίας των Μαθηματικών,* ενώ, ως κοσμήτορας της Φυσικομαθηματικής Σχολής (στη συνεδρίαση της 29^{ης} Οκτωβρίου 1913) είχε προτείνει την *έκδοση επιστημονικού περιοδικού και την εισαγωγή κυριακάτικων διαλέξεων από τους καθηγητές του ιδρύματος.*

Ενδιαφερόμενος για την αναμόρφωση της Μέσης Εκπαίδευσης (στη συνεδρίαση της 29^{ης} Μαρτίου 1914) τόνιζε πως *η Μέση Εκπαίδευση πρέπει να πάψει να έχει ως κύριο στόχο την προπαρασκευή για το Πανεπιστήμιο και όχι την αυτοτελή μόρφωση.*

Με τις παρατηρήσεις αυτές του Ν. Ι. Χατζηδάκη και με τις δραστηριότητες που ανέπτυξε, περιγράφονται, τόσο τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και οι δυσκολίες που εμφανίζονται κατά την προσέγγιση των μαθηματικών, όσο και ο τρόπος για την αντιμετώπιση των δυσκολιών αυτών, ενώ με την τελευταία παρατήρηση, υποδεικνύεται με τον πιο χαρακτηριστικό τρόπο μια από τις βασικότερες αιτίες για την δημιουργία και κυρίως για τη μη επίλυση των προβλημάτων της μαθηματικής εκπαίδευσης στη χώρα μας. Η σχέση των παρατηρήσεων αυτών με τη σημερινή πραγματικότητα είναι σχεδόν προφανής.

8. Βιβλιογραφία

Barbin, E. (1989) Μια περίπτωση διδασκαλίας των μαθηματικών με ιστορική προοπτική, *ζητήματα ιστορίας των μαθηματικών*, Όμιλος για την Ιστορία των Μαθηματικών, 17, Φεβρουάριος 1989, Θεσσαλονίκη.

Γιαννικοπούλου, Α. (2002) Λογοτεχνία και Μαθηματικά. Στο Καΐλα Μ. κ.α. (επιμ.), *Μύθοι, Μαθηματικά, Πολιτισμοί: Αποσιωπημένες σχέσεις στην εκπαίδευση.* Αθήνα: Ατραπός.

Γαζίλα, Β. (1993) Πώς μια θεατρική παράσταση για τα μαθηματικά καλύπτει κενά στη διδασκαλία τους στη μέση εκπαίδευση, *διάσταση*, τ.3-4/1993, σ.25-27, Θεσσαλονίκη.

Γκόβας, Ν. (επιμ.) (2002) *Το θέατρο στην εκπαίδευση: μορφή τέχνης και εργαλείο μάθησης* (Πρακτικά από τη 2^{η} Διεθνή Συνδιάσκεψη για το Θέατρο στην Εκπαίδευση, Αθήνα, 2001). Αθήνα: Μεταίχμιο.

Γραμματάς, Θ. (1987) Το Θέατρο στο σχολείο, από τη φιλολογία στη σκηνή, *Σύγχρονη Εκπαίδευση, 35, 26-31,* Αθήνα.

Γραμματάς, Θ. (1996) *Fantasyland Θέατρο για Παιδικό και Νεανικό Κοινό.* Αθήνα: τυπωθήτω.

Γραμματάς, Θ. (1998) *Θέατρο και Παιδεία.* Αθήνα: Τελέθριον.

[25] Φίλη Χ. *(1987)* Το πανεπιστήμιο Αθηνών στο μεταίχμιο του 19^{ου} αιώνα: Μαθηματικά και Μαθηματικοί.

Davis, P.J. - Hersh, R. (1981) *Η Μαθηματική Εμπειρία.* Αθήνα: Τροχαλία.
Donaldson, M. (1978) *Children΄s minds.* London: Fontana.
Garofalo, J. (1994) Οι πεποιθήσεις και πως αυτές επηρεάζουν την επίδοση στα Μαθηματικά, *Ευκλείδης Γ΄, 39, 103-109.* Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
Goleman, D. (1998) *Η συναισθηματική νοημοσύνη*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
Jackson, T. (edit.) (1993) *Learning through theatre, new perspectives on theatre in education.* London and New York: Routledge.
Kline, M. (χ.χ.) *Τα Μαθηματικά στο Δυτικό Πολιτισμό.* Αθήνα: κώδικας.
Lang, S. (1997) *Η γοητεία των μαθηματικών.* Αθήνα: κάτοπτρο.
Lang, S. (1998) *Μαθηματικές Συναντήσεις.* Αθήνα: κάτοπτρο.
Μηλιώνης, Χ. (2001) Μαθηματική λογοτεχνία: Ένα εργαλείο για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Στο *Μαθηματικός Αλφαβητισμός Ο ρόλος του σχολείου στην κοινωνία της πληροφορίας και των νέων τεχνολογιών. Πρακτικά 18ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας.* Ρόδος 23-25 Νοεμβρίου 2001: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
Μηλιώνης, Χ. (2002) Τα Μαθηματικά στο Θέατρο: Δυνατότητες διδακτικής αξιοποίησης. Στο *Τα Μαθηματικά Διαχρονικός Παράγοντας Πολιτισμού. Πρακτικά 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας.* Κομοτηνή 8-10 Νοεμβρίου 2002: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
Μιχαηλίδης Τ. (2002) Μαθηματική λογοτεχνία: μια πρόκληση Στο *Τα Μαθηματικά Διαχρονικός Παράγοντας Πολιτισμού. Πρακτικά 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας.* Κομοτηνή 8-10 Νοεμβρίου 2002: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
Μπαλής, Σ. (2002) Διαθεματικές δραστηριότητες. Από τα μαθηματικά στην ποίηση-πεζογραφία -αρχαία ελληνική γραμματεία. Στο *Τα Μαθηματικά Διαχρονικός Παράγοντας Πολιτισμού. Πρακτικά 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας.* Κομοτηνή 8-10 Νοεμβρίου 2002: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
Ντάβου Μ. (2000) *Οι διεργασίες της σκέψης στην εποχή της πληροφορίας Θέμετα Γνωστικής Ψυχολογίας και επικοινωνίας.* Αθήνα: Παπαζήσης
Rényi, A. (1979) *Διάλογοι για τα Μαθηματικά.* μτφρ. Μ. Μυτιληναίος, Τ. Σπύρου. Αθήνα: Διογένης.
Rodari, G. (1985) *Γραμματική της Φαντασίας.* Αθήνα: Τεκμήριο.
Savator, F. (2004) *Η αξία του εκπαιδεύειν.* Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
Τουμάσης, Μ. (1994) *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών.* Αθήνα: Gutenberg.
Φίλη, Χ. (1987) *Αμφίδρομα, παράλληλες αναζητήσεις επιστήμης και τέχνης.* Αθήνα: Σμίλη.
Φίλη, Χ. (2003) Το πανεπιστήμιο Αθηνών στο μεταίχμιο του 19ου αιώνα: Μαθηματικά και Μαθηματικοί. *Μαθηματική Επιθεώρηση, 59, 7-37.* Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
Φιλίππου, Γ. – Χρίστου, Κ. (2001) *Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των Μαθηματικών.* Αθήνα: Ατραπός.
Χασάπης Δ. (επιμ.) *(2005) Κοινωνικές και πολιτιστικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης. 4ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών* Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Διδασκαλείο Δημοτικής Εκπαίδευσης «Δημήτρης Γληνός»

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΗ ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΜΕ ΤΟ THE GEOMETER' SKETCHPAD

Η εργασία αυτή έχει ως αντικείμενο δραστηριότητες στην μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=αχ^2+βχ+γ$ με την βοήθεια ενός προγράμματος δυναμικής Γεωμετρίας του «The Geometer' Sketchpad».

ΓΙΑΤΙΛΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ($1^{Ο}$ ΛΥΚΕΙΟ ΠΑΠΑΓΟΥ)

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΝΕΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ

Γενικά

Μπορεί ο αυταρχισμός, ως εκπαιδευτική πρακτική, να έχει στις μέρες μας υποχωρήσει, όμως , η οργάνωση της διδασκαλίας εξακολουθεί να έχει μετωπικό χαρακτήρα, με κύριο στόχο την αξιολόγηση , δηλαδή τον κοινωνικό «έλεγχο» και τη «διάκριση» των μαθητών. Σε αυτό το πλαίσιο , η γνώση συντελείται επιφανειακά, τα αποτελέσματα της διδακτικής διαδικασίας είναι συνήθως πενιχρά και η δυσκολία να κάνουμε ένα διαφορετικό βήμα πέρα για πέρα φανερή. Τα τελευταία χρόνια, με την παρουσία ελκυστικών εργαλείων και τη διατύπωση πλήθος ερευνητικών και επιστημονικών συμπερασμάτων που αφορούν στη διδασκαλία και τη μάθηση, η ελπίδα μας αναπτερώθηκε. **Οι υπολογιστές και οι νέες τεχνολογίες μάς έδωσαν βάσιμες ελπίδες ότι μπορούν να βοηθήσουν τουλάχιστον να αλλάξει η χωρίς νόημα, «συμπαιγνία» μεταξύ καθηγητών και μαθητών.** Προσδοκούμε στην αποκατάσταση μιας υγιούς αλληλεπίδρασης μεταξύ των μαθητών και της γνώσης με ενδιάμεσο τον εκπαιδευτικό. Προσδοκούμε στον επαναπροσδιορισμό των ρόλων όσων εμπλέκονται στη μάθηση και τη διδασκαλία.

Δυναμική Γεωμετρία

Πριν πούμε οτιδήποτε για τη δυναμική Γεωμετρία να ξεκαθαρίσουμε πρώτα «τι σημαίνει δυναμική Γεωμετρία;». Η δυναμική Γεωμετρία σημαίνει:

- **Δυναμικά :** Dragging, υποθέσεις, πειράματα, εικασίες, έλεγχος.
- **Μεταβαλλόμενη** (μετασχηματισμοί) : Τι αλλάζει, τι δεν μεταβάλλεται, γενικές ιδιότητες.
- **Γεωμετρία** :Σχέδιο, σχήμα, γεωμετρικός τόπος.

Είναι γεγονός ότι από όσα έχουμε συζητήσει και από όσα έχουμε αποκομίσει από τη μελέτη και τη συζήτηση των άρθρων που αφορούν τη δυναμική Γεωμετρία μπορούμε να παραθέσουμε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της.

Πλεονεκτήματα:

- Τα προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας (ΠΔΓ) δημιουργούν ένα περιβάλλον μέσα στο οποίο οι μαθητές αισθάνονται ελεύθεροι να παίξουν, να δημιουργήσουν τα δικά τους αντικείμενα, να συζητήσουν για τα αντικείμενα αυτά με τους άλλους(**αλληλεπίδραση χρήστη και αντικειμένων**).
- Τα ΠΔΓ μπορούν να βοηθήσουν στην ανάπτυξη μαθηματικών συνηθειών για το νου. Βοηθούν στην απεικόνιση και προωθούν έτσι τη βαθύτερη κατανόηση.
- Τα ΠΔΓ μπορούν να κάνουν τις κατασκευές της Γεωμετρίας από στατικές και ειδικές(δεν περιέχουν την έννοια της γενίκευσης) σε δυναμικές και γενικές.
- Τα ΠΔΓ ενθαρρύνουν την άτυπη χρήση θεωρημάτων, δημιουργία προβλημάτων, επίλυση προβλημάτων με πειραματισμό.

- Τα ΠΔΓ έχουν συμβάλλει ώστε εκείνοι που τα χρησιμοποιούν να αλλάξουν αντίληψη και η στάση για τα μαθηματικά από την στατική παραγωγική διαδικασία που δίνει έμφαση στις αποδείξεις που ανακαλύφθηκαν από άλλους σε ερευνητική και ευρετική.

- Τα ΠΔΓ είναι ένα σημαντικό εργαλείο για να ξεπεραστούν τα γνωστικά εμπόδια που παρουσιάζονται στις μεταβάσεις από το ένα επίπεδο στο άλλο των επιπέδων του ***Van Hiele***.
- Τα ΠΔΓ μπορούν να επεκτείνουν τον ρόλο του δασκάλου **από εκείνον που διανέμει την πληροφορία και αξιολογεί τις απαντήσεις σε εκείνον που μετατρέπεται σε ένα μαθητή.** Επιπλέον, αλλάζουν την αντίληψη για το τι σημαίνει να μαθαίνεις και να διδάσκεις μαθηματικά. Αυτό το μαθησιακό περιβάλλον εμπλέκει τους δασκάλους σε συζητήσεις όχι μόνο με τους μαθητές τους συναδέλφους ή τους γονείς αλλά και με τον ίδιο τους τον εαυτό για τον τρόπο που αλλάζουν τα πράγματα..

- Τα ΠΔΓ έχουν τη δυνατότητα να ενθαρρύνουν και την εξερεύνηση και την απόδειξη επειδή είναι εύκολο να κάνουν υποθέσεις και να τις ελέγχουν. Φυσικά δεν θα αντικαταστήσουμε τις αποδείξεις με πειραματικές προσεγγίσεις στη μαθηματική αιτιολόγηση.

<u>Μειονεκτήματα</u>

Βέβαια δεν αμφιβάλλει κανείς ότι υπάρχουν και αρκετές δυσκολίες στην εφαρμογή αυτών των προγραμμάτων.

- Στο περιβάλλον όμως των ΠΔΓ, οι στρατηγικές αυτές που βασίζονται στη δημιουργία αμφιβολιών προκειμένου να προκληθεί η ανάγκη για μια απόδειξη, δεν φαίνεται να έχουν επιτυχία και αποτελεσματικότητα, αφού οι εικασίες έχουν ελεγχθεί εξαντλητικά, μέσω της δυνατότητας **για απεριόριστες αλλαγές του γεωμετρικού σχήματος η της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης,** που το δυναμικό λογισμικό προσφέρει. Είναι πολύ απλό. Όταν οι μαθητές είναι σε θέση να παράγουν αναρίθμητους σχηματισμούς γρήγορα και εύκολα, μέσα από τους οποίους αποκαλύπτονται οι ιδιότητες, τότε δεν τους δημιουργείται η ανάγκη για παραπέρα επιβεβαίωση. Έχουν πειστεί ήδη για την αλήθεια μιας πρότασης ή για την ορθότητα ενός ισχυρισμού. Επομένως, εάν περιοριστούμε στην παραδοσιακή αντίληψη για τον επιβεβαιωτικό – διαπιστωτικό ρόλο της απόδειξης, μοιραία οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι στα πλαίσια ενός δυναμικού γεωμετρικού περιβάλλοντος η αξία της απόδειξης μειώνεται, μέχρι το σημείο να θεωρηθεί μη αναγκαία, προς όφελος μιας εντελώς εμπειρικής – πειραματικής προσέγγισης για την εξασφάλιση της αλήθειας μιας μαθηματικής πρότασης. Διαφαίνεται έτσι ο κίνδυνος να καταλήξει κανείς στο συμπέρασμα ότι στα πλαίσια ενός υπολογιστικού περιβάλλοντος εξερεύνησης της μαθηματικής γνώσης, είναι δυνατόν να ελεγχθεί ένας μεγάλος αριθμός περιπτώσεων, ο οποίος λόγω της συνεχούς κίνησης μπορεί να θεωρηθεί άπειρος, έτσι ώστε η αλήθεια να εδραιωθεί πάνω στις παρατηρήσεις που προκύπτουν από άπειρες περιπτώσεις, οι οποίες εξερευνούνται ταχέως με τη βοήθεια ενός computer.
- Στα μειονεκτήματα είναι και οι αντιρρήσεις που εκφράζουν κάποιοι (βλέπε ***Βασιλείου Φ.Μ-Hersh R- Tall D***) για τις νέες τεχνολογίες γενικά αλλά και για τα ΠΔΓ ειδικά τα βασικά σημεία των οποίων είναι :

i. ***Η έννοια του Μαθηματικού αντικειμένου***[Τα αντικείμενα ,τα οποία εμφανίζονται στην οθόνη του Η/Υ δεν είναι μαθηματικά αντικείμενα, αλλά υλικά αντικείμενα και κατώτερα αντίστοιχα των μαθηματικών].
ii. ***Το ζήτημα της ενεργητικής φαντασίας και του φαντασιακού δυναμικού***[Με την συνεχή οπτικοποίηση χάνεται η φυσική δύναμη της φαντασίας].
iii. ***Το πέρασμα από τον αριστερό-ημισφαιρικό στο δεξιό-ημισφαιρικό μονοπλευριτισμό.***[Καθηλωνόμαστε στην εικονική σκέψη και παραμελούμε, αντίστροφα από ότι στο παρελθόν τα υπόλοιπα στοιχεία του ατόμου.

Συμπέρασμα:

Οι δυνατότητες που ανοίγονται μπροστά μας με τη χρήση των λογισμικών της Δυναμικής Γεωμετρίας είναι σίγουρο ότι θα την ξαναζωντανέψουν παρά τους όποιους προβληματισμούς που εκφράζουν πολλοί. Εδώ μπορούμε να πούμε το «κάθε αρχή και δύσκολη». Σε πρώτη φάση όπως άλλωστε επισημαίνει και το άρθρο του ***P.Pereira***[26] το ζητούμενο είναι **η αλλαγή της αντίληψης για την διδασκαλία της Γεωμετρίας ,η οποία από στατική, παραγωγική δραστηριότητα που δίνει έμφαση στην απόδειξη σε μια εξερευνητική επαγωγική δραστηριότητα**. Επίσης επισημαίνει και την αλλαγή του ρόλου του δασκάλου από αυτόν που διαχέει πληροφορίες και επικυρώνει απαντήσεις σε αυτόν που συμβουλεύει, κατευθύνει και γίνεται συμπαραστάτης στο μαθητή.
Επίσης ,όσον αφορά στις νέες τεχνολογίες γενικά(και την δυναμική γεωμετρία ειδικά) δημιουργείται σύμφωνα με τον ***Jung C.G***[27] ένα ***Πρόβλημα του Τετάρτου*** ,με την έννοια ότι τα τρία αρχικά στοιχεία **Δάσκαλος-Μαθητής- Μαθηματικά** έχουν κάποια ομοιότητα μεταξύ τους και για αιώνες έχουν συνυπάρξει και δουλέψει ως σύστημα. Τώρα προστίθεται ένα τέταρτο στοιχείο , διαφορετικής φύσης από τα τρία προηγούμενα, και δημιουργείται το πρόβλημα του πως αυτό το τέταρτο στοιχείο θα ενσωματωθεί στο σύστημα, ποιες επιπτώσεις θα έχει, ποιες ακριβώς είναι οι νέες σχέσεις που δημιουργούνται , πως τροποποιούνται οι σχέσεις που προϋπήρχαν. Εκείνο που προσπαθούμε να πετύχουμε με την εισαγωγή των νέων τεχνολογιών(και της δυναμικής γεωμετρίας) είναι η εφαρμογή των ιδεών και εννοιών , η πραγμάτωση της σκέψης , η υλοποίηση των μαθηματικών αντικειμένων. Το πέρασμα από το τριαδικό στο τετραδικό «Σύστημα διδασκαλίας», μας φέρνει ήδη αντιμέτωπους με κάτι απροσδόκητο και κατά μια έννοια ξένο ,γιατί οι νέες τεχνολογίες είναι ασύμμετρες ως προς την κλασική τριάδα. Αυτό συμβαίνει επειδή η τριάδα αποτελεί εννοιακό, σημασιολογικό σχήμα, αφού ο Δάσκαλος, Μαθητής και Γνωστικό Αντικείμενο λειτουργούν κυρίως με έννοιες και σημασίες, ενώ οι νέες τεχνολογίες λειτουργούν στη βάση συντακτικών κανόνων. Επομένως , το ζητούμενο είναι η επανακανονικοποίηση του συστήματος με την απορρόφηση/ ενσωμάτωση των νέων τεχνολογιών , ώστε να επαναπροσδιοριστεί το όλο σύστημα.
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Η δυναμική Γεωμετρία σημαίνει:
- **Δυναμικά : Dragging, υποθέσεις, πειράματα, εικασίες, έλεγχος.**
- **Μεταβαλλόμενη (μετασχηματισμοί) : Τι αλλάζει, τι δεν μεταβάλλεται, γενικές ιδιότητες.**

Πλεονεκτήματα Δυναμικής Γεωμετρίας

[26] Dynamic Geometry-Dilemmas of teaching
[27] Jung C.G The Collected Works. Princeton ,N.J: Princeton Univ. Press(Bollinen Series XX),20vols.

- **Δημιουργία περιβάλλοντος ελεύθερης έκφρασης.**
- **Μετάβαση από τις στατικές σε δυναμικές κατασκευές.**
- **Ενθάρρυνση άτυπης χρήσης θεωρημάτων και δημιουργίας και επίλυσης προβλημάτων με πειραματισμό.**

Πλεονεκτήματα Δυναμικής Γεωμετρίας

- **Συμβολή στην υιοθέτηση ερευνητικών και ευρετικών μεθόδων.**
- **Μετατροπή του μαθητή από παθητικό δέκτη πληροφοριών σε ενεργό υποκείμενο.**
- **Τα ΠΔΓ ενθαρρύνουν την εξερεύνηση και την απόδειξη, επειδή παρέχουν τη δυνατότητα υποθέσεων και ελέγχων από τους μαθητές.**

Μειονεκτήματα Δυναμικής Γεωμετρίας :

- **Πιθανή αποδυνάμωση της τυπικής αποδεικτικής διαδικασίας.**
- **Προβλήματα διαχείρισης της τάξης εξαιτίας των διαφορετικών επιπέδων στη χρήση του Η/Υ από τους μαθητές**
- **Με την συνεχή οπτικοποίηση χάνεται η φυσική δύναμη της φαντασίας**

Διδακτικό συμβόλαιο-Παιδαγωγική Επίδραση

- **Το Διδακτικό συμβόλαιο αλλάζει μετά την εισαγωγή των νέων τεχνολογιών, αφού ο δάσκαλος οδηγεί τον μαθητή να δουλέψει με τις νέες τεχνολογίες και τον βοηθάει να δει στην πράξη τις εφαρμογές των Μαθηματικών. Το διδακτικό περιβάλλον είναι τώρα περισσότερο ζωντανό και ο μαθητής συνειδητοποιεί ότι πρέπει να συνεισφέρει με το δικό του τρόπο για να μάθει.**

Διδακτικό συμβόλαιο-Παιδαγωγική Επίδραση

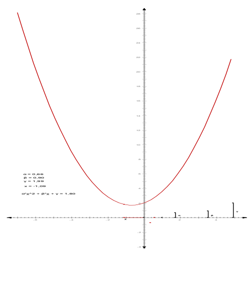
- **Αυτή είναι η Παιδαγωγική Επίδραση, επειδή ο μαθητής συμμετέχει ενεργά στην κατασκευή της γνώσης του. Αυτή η διαδικασία κάνει το μαθητή περισσότερο υπεύθυνο και ώριμο ,καταστάσεις που τον βοηθάνε στην κοινωνικοποίηση του.**

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ Η/Υ ΚΑΙ ΤΩΝ Π.Δ.Γ

- **Ενώ πριν ήμασταν αναγκασμένοι να περιοριζόμαστε στις σκέψεις και στην επιφάνεια ενός χαρτιού ή πίνακα , που τους λείπει η αίσθηση της δυναμικότητας, τώρα η διδασκαλία με τον Η/Υ είναι η ορατή εφαρμογή των ιδεών και εννοιών.**

- **Η χρήση του Η/Υ από το μαθητή δημιουργεί μια γνωστική «σύγκρουση» ανάμεσά τους. Η ανταγωνιστική-συναγωνιστική αλληλεπίδραση λειτουργεί βελτιωτικά μεταξύ των δύο πόλων της αντίθεσης.**

ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ $f(χ)=αχ^2+βχ+γ$



Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας:

Με το λογισμικό **GEOMETER' SKETCHPAD** κατασκευάζω ευθύγραμμα τμήματα, μεταβαλλόμενα με χρήση του ποντικιού που να αντιστοιχούν στους πραγματικούς αριθμούς **α, β, γ** αντίστοιχα όπου **α, β ,γ** είναι οι συντελεστές της συνάρτησης **f(χ)=αχ^2+βχ+γ** .
Χωρίζω τους μαθητές σε ομάδες 5 ατόμων έχοντας έναν υπολογιστή η κάθε ομάδα στον οποίο έχω το λογισμικό με την δραστηριότητα που έχω φτιάξει.
Ο υπολογιστής θα χρησιμοποιείται εναλλάξ από όλους τους μαθητές της ομάδος.
Η δραστηριότητα έχει διάρκεια τρεις διδακτικές ώρες και σε κάθε διδακτική ώρα δίνω ένα φύλλο εργασίας στο κάθε μαθητή. Οι παρεμβάσεις μου στους μαθητές είναι συμβουλευτικές και όχι επεξηγηματικές.

Ένταξη στο αναλυτικό πρόγραμμα :

Το μάθημα αυτό μπορεί να ενταχθεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο της Α-Λυκείου , το οποίο πραγματεύεται τη μελέτη του τριωνύμου.

Διδακτικοί στόχοι:

Οι μαθητές να ανακαλύψουν και να αποδείξουν ότι:

1. Να ανακαλύψουν τη μορφή της παραβολής (μονοτονία –κυρτότητα) και ότι η ευθεία με εξίσωση $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής. Στη συνέχεια να αποδείξουν αλγεβρικά ότι πράγματι η ευθεία $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής.
2. Να ανακαλύψουν ότι η παραβολή έχει μέγιστο στην κορυφή της Κ αν α<0 και ελάχιστο στην κορυφή της Κ αν α>0 . Στη συνέχεια να αποδείξουν αλγεβρικά αυτά που ανακάλυψαν .
3. Να κατανοήσουν την θετική συνδρομή της δυναμικής γεωμετρίας στην ανακάλυψη γεωμετρικών τόπων πράγμα δύσκολο μέχρι και αδύνατο για πολλούς μαθητές .

Παρατηρήσεις :

- **1^η διδακτική ώρα** Οι μαθητές ανακαλύπτουν τη μορφή της παραβολής (δηλαδή για α>0 ότι στρέφει τα κοίλα άνω , για α<0 ότι στρέφει τα κοίλα κάτω , πότε η παραβολή τέμνει και πότε δεν τέμνει τον άξονα των τετμημένων και ότι η ευθεία με εξίσωση $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής.) Ορίζεται η κορυφή της παραβολής Κ ως σημείο τομής του άξονα συμμετρίας της με την παραβολή και αποδεικνύεται αλγεβρικά ότι η $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$ είναι πράγματι άξονας συμμετρίας της. Στη συνέχεια δίνονται αριθμητικά παραδείγματα δύο κατευθύνσεων. ι)Δίνεται τριώνυμο και ζητείται να βρεθεί ο άξονας συμμετρίας του και ιι) Δίνεται η εξίσωση του άξονα συμμετρίας μιας παραβολής και ζητείται η εξίσωση της παραβολής.
- **2^η διδακτική ώρα** Οι μαθητές ανακαλύπτουν ότι η συνάρτηση **f(χ)=αχ^2+βχ+γ** έχει ελάχιστο στην κορυφή της Κ αν α>0 και

μέγιστο στην κορυφή της Κ αν $\alpha<0$. Αποδεικνύουν αλγεβρικά αυτά που ανακάλυψαν και ασκούνται να τα εφαρμόζουν σε προβλήματα.

- **3η διδακτική ώρα** Ανακαλύπτουν τον γεωμετρικό τόπο της κορυφής Κ της οικογένειας των παραβολών όταν μια από τις παραμέτρους α,β,γ μεταβάλλεται και οι άλλες δύο παραμένουν σταθερές. Στη συνέχεια ασκούνται σε αριθμητικά προβλήματα γεωμετρικών τόπων με παραβολή.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ:

Με τη διδασκαλία αυτή πετυχαίνουμε:

- Οι μαθητές να κατανοήσουν ότι με τον Η/Υ ανακαλύπτονται και γίνονται ορατές ιδέες και έννοιες που δύσκολα (σε πολλές περιπτώσεις θα ήταν αδύνατο) να ανακαλυφθούν με μολύβι και χαρτί η με κιμωλία και πίνακα.

- Να αντιληφθούν ότι αυτό που ανακαλύπτουν με τον Η/Υ πρέπει να προσπαθούν να το επαληθεύσουν με αυστηρή μαθηματική απόδειξη . Εδώ θέλει προσοχή και επαγρύπνηση από εμάς τους δασκάλους να μη παρασύρουμε τους μαθητές να εγκαταλείψουν την απόδειξη και να μείνουν αποκλειστικά μόνο στην ανακάλυψη των εννοιών παίζοντας με τον Η/Υ.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΜΑΘΗΤΗ

1η διδακτική ώρα:

1. Με το ποντίκι μεταβάλλετε **τα α, β, γ με α διάφορο του μηδενός** .Παρατηρείστε την μορφή της καμπύλης και διατυπώστε τις παρατηρήσεις σας για κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις .
   - Μεταβάλλοντας **μόνο το α** με **α** διάφορο του μηδενός.
   - Μεταβάλλοντας **μόνο το β** με **α** διάφορο του μηδενός.
   - Μεταβάλλοντας **μόνο το γ** με **α** διάφορο του μηδενός.

2. Εξετάστε αν έχει **άξονα συμμετρίας** η παραπάνω καμπύλη .Αν ανακαλύψτε τον άξονα συμμετρίας της, προσπαθήστε να αποδείξετε ότι ο άξονας συμμετρίας της καμπύλης έχει εξίσωση την $\chi=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$

(Τη καμπύλη την λέμε **παραβολή** και το σημείο **Κ** που ο άξονας συμμετρίας της την τέμνει το λέμε **κορυφή** της παραβολής)

Απόδειξη

3. **Εφαρμογή1η :** Βρείτε τον **άξονα συμμετρίας** και **τις συντεταγμένες της κορυφής** σε κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις.

   - $f(\chi)=3\chi^2-6\chi+1$
   - $f(\chi)=-\chi^2+2\chi+5$

Εφαρμογή2η : α) Βρείτε **τον τύπο** της οικογένειας των συναρτήσεων **πολυωνύμων 2ου βαθμού** που έχουν **άξονα συμμετρίας** την ευθεία με εξίσωση **χ=-2**

β) Βρείτε **τον τύπο** της οικογένειας των συναρτήσεων **πολυωνύμων 2ου βαθμού** που έχουν **κορυφή το σημείο Κ(-3,4)**

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΜΑΘΗΤΗ

2η διδακτική ώρα:

1. Μεταβάλλοντας τις τιμές του α με το ποντίκι συζητήστε και διατυπώστε τις παρατηρήσεις για τη μορφή της παραβολής και τη θέση της κορυφής της χωριστά σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
   - **Αν $\alpha>0$**
   - **Αν $\alpha<0$**

2. **ι)** Βρείτε πότε η συνάρτηση **f(χ)** έχει **μέγιστο** ,πότε **ελάχιστο** και **σε ποια θέση**.---
   ----
   ιι) Δείξτε ότι η **f(χ)** για **$\alpha>0$** έχει **μέγιστο στην κορυφή Κ** (αντίστοιχα για **$\alpha<0$** έχει **ελάχιστο στην κορυφή Κ**)---
3. **Πρόβλημα1ο :** Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που **η περίμετρος τους είναι 20** μέτρα **υπολογίσετε τις διαστάσεις** εκείνου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που **έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν**.---------------------------
   -**Πρόβλημα 2ο :** Ρίχνουμε ένα σώμα **κατακόρυφα προς τα πάνω** με **ταχύτητα v .** Να βρείτε **το μέγιστο ύψος** που θα διανύσει το σώμα και **σε πόσο χρόνο**---------------------------
4. **ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΜΑΘΗΤΗ (Γεωμετρικός τόπος)**

3η διδακτική ώρα:

1. Χρησιμοποιώντας το ποντίκι **μεταβάλλοντας μόνο το γ** και διατηρώντας τα **α , β σταθερά** με α διάφορο του μηδενός, ανακαλύψτε **τι είδους γραμμή σχεδιάζει η κορυφή Κ της παραβολής.** Στη συνέχεια αποδείξτε αλγεβρικά αυτό που ανακαλύψατε και βρείτε την εξίσωση της γραμμής αυτής που σχεδιάζει η κορυφή Κ όταν το γ μεταβάλλετε και τα α, β παραμένουν σταθερά με α διάφορο του μηδενός.--

Χρησιμοποιώντας το ποντίκι **μεταβάλλοντας μόνο το β** και διατηρώντας τα **α , γ σταθερά** με α διάφορο του μηδενός, ανακαλύψτε **τι είδους γραμμή σχεδιάζει η κορυφή Κ της παραβολής**. Στη συνέχεια αποδείξτε αλγεβρικά αυτό που ανακαλύψατε και βρείτε την εξίσωση της γραμμής αυτής που σχεδιάζει η κορυφή Κ όταν το β μεταβάλλετε και τα α, γ παραμένουν σταθερά με α διάφορο του μηδενός .---

2. **Εφαρμογές:**
   - Να βρεθεί αλγεβρικά η εξίσωση της γραμμής που ανήκουν οι κορυφές της οικογένειας των παραβολών με τύπο **$f(\chi)=3\chi^2+\beta\chi-5$,** όπου β πραγματικός αριθμός.

   Να βρεθεί αλγεβρικά η εξίσωση της γραμμής που ανήκουν οι κορυφές της

οικογένειας των παραβολών με τύπο **f(χ)=3χ²+5χ+γ**, όπου γ πραγματικός αριθμός.--

- Να βρεθεί αλγεβρικά η εξίσωση της γραμμής που ανήκουν οι κορυφές της οικογένειας των παραβολών με τύπο **$f(χ)=αχ^2+5χ-1$**, όπου α πραγματικός αριθμός διάφορος του μηδενός.--------------------------------
- Να βρεθεί αλγεβρικά η εξίσωση της γραμμής που ανήκουν οι κορυφές της οικογένειας των παραβολών με τύπο **$f(χ)=αχ^2-2$**, όπου α πραγματικός αριθμός διάφορος του μηδενός.--------------------------------

Οι έννοιες του απείρου και του απειροστού στα Μαθηματικά του Λυκείου και γενικότερα στον Απειροστικό Λογισμό.

Κιουλάφας Μανουήλ M.Sc & Phd Διδακτικής των Μαθηματικών, καθηγητής Μαθηματικών του Ενιαίου Πειραματικού Λυκείου Αναβρύτων.

Είναι γεγονός αναμφισβήτητο ότι η πλειονότητα των φιλοσοφικών ιδεών είχε απασχολήσει τους αρχαίους Έλληνες φιλοσόφους. Έτσι και η έννοια του απείρου, δεν θα μπορούσε να αποτελεί εξαίρεση. Η έννοια όμως του απείρου από πολύ νωρίς προκάλεσε διαμάχες, περισσότερες από κάθε άλλο ζήτημα. Είναι δύσκολο να βρει κανείς μια ιδέα που να έχει ερεθίσει τόσο γόνιμα τη νόηση όσο η ιδέα του απείρου. Παρ' όλα αυτά όμως σχεδόν καμία άλλη έννοια δεν χρειάζεται διασάφηση όσο αυτή.

Η πρωτότυπη ιδέα της προσωκρατικής αντίληψης του κόσμου δόθηκε από τον Αναξίμανδρο τον Μιλήσιο ήδη από τον 6^{ο} π.Χ αιώνα, προτείνοντας το άπειρο ως πρωταρχικό στοιχείο κάθε όντος. Αυτός ο όρος, η έννοια του οποίου δεν έπαψε να συζητείται, σημαίνει συγχρόνως άπειρο (απεριόριστο και αιώνιο) και αόριστο (απροσδιόριστο). Ο κόσμος του Αναξίμανδρου είναι κλειστός, πεπερασμένος, και πλέει σ' ένα απεριόριστο περιβάλλον. Το ίδιο πίστευε και ο Θαλής ο Μιλήσιος το περιβάλλον είναι *ύδωρ*, ο κόσμος είναι μια ημισφαιρική αέρινη φυσαλίδα που πλέει στους κόλπους αυτής της υγρής μάζας.

Όμως τον 5^{ο} π.Χ αιώνα ο Λεύκιππος και ο Δημόκριτος πρότειναν μια τελείως διαφορετική εκδοχή για το άπειρο του κόσμου. Υποστήριζαν ότι το αρχικό στοιχείο του σύμπαντος ήταν το πλέον αδιαίρετο τμήμα της ύλης (*άτομο* δηλαδή αυτό που δεν μπορεί να τμηθεί). Το άλλο βασικό στοιχείο ήταν το κενό, όπου εκτυλίσσεται η κίνηση των ατόμων. Άφθαρτα και αναλλοίωτα, τα άτομα υπήρχαν αιώνια και διέφεραν μόνο στο μέγεθος και στο σχήμα. Ήταν αναρίθμητα, και κάπου - κάπου ομαδοποιούνται σε κοσμικά σώματα στους κόλπους του άπειρου κενού. Περισσότερα στοιχεία μπορεί να βρει κάποιος στο [8] της βιβλιογραφίας.

Ο Πλάτων (428 – 347) στο έργο *Τίμαιος* θεωρεί τον κόσμο και τον ουρανό πεπερασμένους. Τους περικλείει σε μια σφαίρα που περιβάλλει τον κόσμο και πέρα από την οποία δεν υπάρχει τίποτα.

Ο Αριστοτέλης (384 – 322) είναι αυτός που θέτει το πρόβλημα του απείρου σε σύγχρονες βάσεις. Κάνει διάκριση μεταξύ του « υπαρκτού» , *εν ενεργεία*, και «δυνητικού» , *εν δυνάμει* , απείρου. Το υπαρκτό άπειρο είναι αυτό που γίνεται αντιληπτό μέσα από τη φύση ενώ το δυνητικό άπειρο είναι ένα επινόημα απαραίτητο στη σκέψη για την επίλυση ορισμένων προβλημάτων. Εμπεριστατωμένη αναφορά υπάρχει στο [1] της βιβλιογραφίας.

Ο Αριστοτέλης δεν δέχεται την ύπαρξη του εν ενεργεία απείρου και κατά την γνώμη του, άπειρο είναι αυτό που δεν μπορούμε να διατρέξουμε, άρα υπάρχει μόνο εν δυνάμει. Θεωρεί ότι για ένα οποιοδήποτε μέγεθος υπάρχουν τρεις τρόποι να είναι άπειρο (εν δυνάμει).

1. Ένα μέγεθος μπορεί να γίνει απεριόριστο από τη δομή του. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι αριθμοί, των οποίων η πρόσθεση ή ο πολλαπλασιασμός παράγουν αριθμούς απεριορίστου μεγέθους.

2. Ένα μέγεθος μπορεί να είναι άπειρο λόγω διαίρεσης. Παράδειγμα αποτελεί η ύλη, διαιρετή επ' άπειρον, αν υποθέσουμε ότι είναι συνεχής και χωρίς αδιαίρετα.
3. Ένα μέγεθος μπορεί να είναι άπειρο λόγω της διαιρετότητάς του και λόγω της δομής του. Παράδειγμα αποτελεί ο χρόνος.

Η κοσμολογία του Αριστοτέλη απαντά στα προβλήματα του απειρομέγιστου και απειροελάχιστου. Το απειρομέγιστο πρέπει να αποκλειστεί διότι ο κόσμος είναι πεπερασμένος και τίποτα δεν μπορεί να υπάρχει εκτός του κόσμου. Αντίθετα το απειροελάχιστο είναι αποδεκτό, αλλά η απεριόριστη διαιρετότητα της ύλης είναι δυνητική και όχι υπαρκτή.

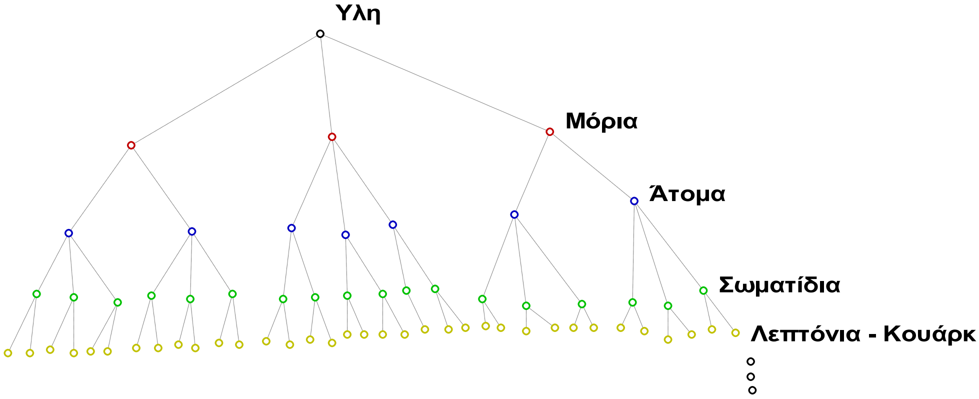
<u>Το άπειρο και το απειροστό στη σύγχρονη Φυσική</u>

Η αρχική μας εντύπωση για τα φυσικά συμβάντα και την ύλη είναι η εντύπωση της σταθερότητας και της συνέχειας. Η εντύπωσή μας αυτή όμως άλλαξε όταν ανακαλύφτηκε ότι αν στο νερό διοχετευθεί ηλεκτρικό ρεύμα, τότε το νερό διασπάται σε υδρογόνο και οξυγόνο. Η μεγάλη ποικιλία των μορίων τέθηκε υπό έλεγχο όταν τα μόρια θεωρήθηκαν συλλογές ατόμων Η κατάσταση απλοποιήθηκε ακόμη περισσότερο όταν ανακαλύφτηκε ότι το άτομο αποτελείται από ένα θετικά φορτισμένο πυρήνα γύρω από τον οποίο περιστρέφονται ηλεκτρόνια. Λίγο αργότερα ανακαλύφτηκε το νετρόνιο, και οι φυσικές ιδιότητες των διαφόρων ατόμων εξηγήθηκαν με την παραδοχή ότι τα άτομα απαρτίζονται από πρωτόνια, νετρόνια, και ηλεκτρόνια.

Από τη φυσική υψηλών ενεργειών έχουμε ότι λίγα σωματίδια, (τα ηλεκτρόνια, τα νετρίνια, και τα μιόνια) φαίνεται να είναι τελείως αδιαίρετα. Όλα τα υπόλοιπα, (πρωτόνια, νετρόνια, μεσόνια) μπορούν να διασπασθούν σε άλλα που μπορούν να επανασυνδεθούν για να συγκροτήσουν άλλα σωματίδια. Η μορφή που έχει πάρει η έρευνα της ύλης είναι ότι ποικίλες ουσίες εξηγούνται ως συνδυασμοί λίγων απλούστερων ουσιών. Έτσι δεν πρέπει να μας εκπλήσσει η άποψη ότι η μεγάλη ποικιλία των διαιρέσιμων σωματιδίων μπορεί να εξηγηθεί με την υπόθεση ότι όλα είναι συγκροτημένα από *κουάρκ*. Εκτενής αναφορά υπάρχει στο [10] της βιβλιογραφίας.

Έχουν ανακαλυφτεί μερικά διαφορετικά κουάρκ. Φαίνεται πολύ πιθανό ότι τα διαφορετικά είδη κουάρκ θα εξηγηθούν βάσει της υπόθεσης ότι κάθε κουάρκ είναι συνδυασμός λίγων *ντάρκ*…. Και ότι υπάρχει μόνον ένας μικρός αριθμός από αυτά.

Εάν η εξέλιξη αυτή συνεχιστεί απ' άπειρον, τότε καταλήγουμε ότι η ύλη είναι μια συλλογή συλλογών από συλλογές….. Δηλαδή δεν υπάρχει τελικά ύλη παρά μόνο μορφή.



Σχήμα 1

Ο ηλεκτρισμός που κατατασσόταν στα ρευστά, και αποτελούσε το κατ' εξοχήν υπόδειγμα του συνεχούς ενεργού παράγοντα, απεδείχθη ότι συνίσταται από σωμάτια τα θετικά και τα αρνητικά ηλεκτρόνια.

Εκτός από την ύλη και τον ηλεκτρισμό στη φυσική υπάρχει ακόμη μια οντότητα για την οποία ισχύει ο νόμος διατήρησης, η ενέργεια. Αλλά και η ενέργεια έχει αποδειχθεί ότι δεν επιδέχεται μια απλή και άνευ όρων άπειρη διαιρετότητα. Ο Planck(1858-1947) ανακάλυψε τα κβάντα ενέργειας.

Σε κανένα λοιπόν τομέα της πραγματικότητας δεν βρίσκουμε ένα ομοιογενές συνεχές, ώστε με συνεχή διαιρετότητα να φτάνουμε στο άπειρα μικρό. Η άπειρη διαιρετότητα ενός συνεχούς είναι μια πράξη που υπάρχει μόνο στη σκέψη μας. Είναι μια ιδέα που ανασκευάζεται από τα πειράματα της Φυσικής και της Χημείας. Αναλυτικότερα στο [18] της βιβλιογραφίας.

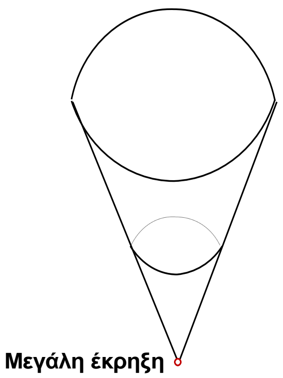
Αφού καταλήξαμε για το απειροστό ας δούμε το θέμα του απείρου. Είναι άπειρο το σύμπαν ή υπάρχουν πέρατα; Η σύγχρονη επιστήμη έχει άποψη γι' αυτό;

Η Ευκλείδεια γεωμετρία μας οδηγεί κατ' ανάγκη στο συμπέρασμα ότι ο χώρος είναι άπειρος, αλλά δεν υπάρχει διαβεβαίωση ότι ο χώρος του σύμπαντος περιγράφεται από την Ευκλείδεια γεωμετρία. Με τη λεγόμενη ελλειπτική γεωμετρία η μαθηματική έρευνα μας δίνει το μοντέλο ενός πεπερασμένου κόσμου. Εκτενής αναφορά υπάρχει στο [10] της βιβλιογραφίας.

Επίσης ο Einstein(1879-1955) ξεκινώντας από την βαρυτική θεωρία ασχολείται με το κοσμολογικό πρόβλημα και καταλήγει ότι είναι δυνατός ένας πεπερασμένος κόσμος, και ότι επιπλέον, όλα τα συμπεράσματα της Αστρονομίας συμβιβάζονται με την υπόθεση ενός ελλειπτικού σύμπαντος.

Η έννοια του απείρου και του απειροστού στα Μαθηματικά

Είδαμε λοιπόν ότι η πραγματικότητα είναι πεπερασμένη προς τις δυο κατευθύνσεις, όσον αφορά δηλαδή το άπειρα μικρό και όσο αφορά το άπειρα μεγάλο. Ωστόσο μπορεί το άπειρο να έχει μια εντελώς δικαιολογημένη θέση στη σκέψη μας και να παίζει το ρόλο μιας απαραίτητης έννοιας. Ας δούμε πως παρουσιάζονται τα πράγματα στα μαθηματικά.



Στην ισότητα:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

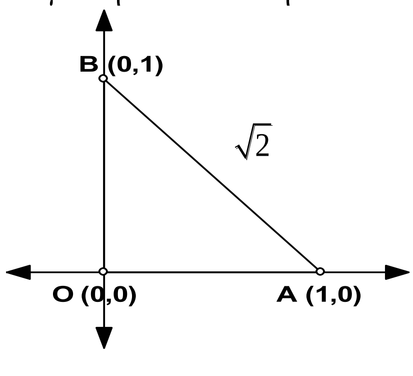
Αν αντικαταστήσουμε το n με οποιοδήποτε φυσικό αριθμό θα προκύψουν οι επιμέρους ισότητες. Για παράδειγμα όταν n = 3 έχουμε:

$$1^2+2^2+3^2=\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 4\cdot (3+4)$$

Για n = 5 έχουμε : $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=\frac{1}{6}\cdot 5\cdot 6\cdot (5+6)$

Είναι φανερό ότι ο αρχικός τύπος περιέχει ένα *άπειρο* πλήθος προτάσεων. Αυτό όμως είναι το βασικό χαρακτηριστικό, που του επιτρέπει να παριστά την λύση ενός αριθμητικού προβλήματος, και να απαιτεί μια αποδεικτική σκέψη, ενώ οι επιμέρους προτάσεις μπορούν να επαληθευτούν με απλό συλλογισμό. Η πρόταση αυτή δημιουργεί ένα *άπειρο εν δυνάμει.*

Από την άλλη μεριά μέσω της θεωρίας των συνόλων του G. Cantor, είναι δυνατόν να παραστήσουμε ως ολοκληρωμένη οντότητα το **N** = {1,2,3,…} με πλήθος στοιχείων $\aleph_0$. Για περισσότερα βλέπε στα [12], [13] , [14], [16] της βιβλιογραφίας. Αυτό το είδος του απείρου λέγεται *άπειρο εν ενεργεία.* Για παράδειγμα η ακολουθία των ρητών αριθμών $\frac{3}{2},\frac{17}{12},\frac{517}{409},\frac{1393}{985},\cdots$ που διέπεται από τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)$ με $a_1=\frac{3}{2}$ δημιουργεί ένα εν δυνάμει άπειρο αφού μπορούμε απεριόριστα να συνεχίσουμε να γράφουμε όρους της, οι οποίοι όμως είναι οι προσεγγίζουσες τιμές του άρρητου αριθμού $\sqrt{2}$. Ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι εν ενεργεία άπειρο, διότι σύμφωνα με την Ευκλείδεια γεωμετρία το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία (1,0) και (0,1) είναι καλώς ορισμένο και δεν έχουμε καμία αμφιβολία για την ενεστωτική – ολιστική του ύπαρξη.



Σχήμα 3

Διαπιστώνουμε δηλαδή μια διαλεκτική σχέση μεταξύ του εν δυνάμει και εν ενεργεία απείρου. Είναι άξιο λόγου το γεγονός ότι την ίδια οργάνωση συναντάμε και στην ύλη, *ένας άπειρος αριθμός μικροσωματιδίων δημιουργούν ένα μακρομόριο. Π*ερισσότερες πληροφορίες στο [5] της βιβλιογραφίας.

Στα μαθηματικά μπορούμε να συγκρίνουμε απειροσύνολα ως προς το πλήθος των στοιχείων τους. Για παράδειγμα το σύνολο των φυσικών αριθμών **N** = {1,2,3,…} και το σύνολο των αρτίων αριθμών $\mathbf{N_\alpha}$ = {2,4,6,….} έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων διότι μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση 1-1 και επί από το N στο $\mathbf{N_\alpha}$. Πράγματι η συνάρτηση $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N_\alpha}$, $f(x) = 2x$ πληροί τις προϋποθέσεις, συνεπώς το πλήθος των αρτίων είναι ίσο με το πλήθος των φυσικών αριθμών.

Επίσης μπορούμε να συγκρίνουμε ως προς το πλήθος των στοιχείων, τους ακεραίους και τους φυσικούς αριθμούς, διότι μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση *f*: **Z** $\rightarrow$ **N** με $f(x)=\begin{cases}-2x, x<0\\ 2x+1, x\geq 0\end{cases}$ η οποία είναι 1-1 και επί. Συνεπώς το σύνολο των ακεραίων **Z** = {…, -3, -2, -1 , 0, 1,2,3, …} έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το **N** = {1,2,3,…} όσο και αν αυτό φαίνεται παράξενο. Περισσότερες πληροφορίες υπάρχουν στο [17] της βιβλιογραφίας.

Το σύνολο όμως των πραγματικών **R** δεν είναι ισοδύναμο με το **N** διότι δεν υπάρχει συνάρτηση 1-1 και επί που να τα συνδέει, επομένως το **R** δεν είναι αριθμήσιμο, δηλαδή είναι μεγαλύτερο από το **N**. Όταν λοιπόν μετρήσουμε 1,2,3,…. μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα αντικείμενα που απαριθμήσαμε αποτελούν ένα άπειρο σύνολο που ολοκληρώθηκε με την συγκεκριμένη τούτη διάταξη (*εν ενεργεία άπειρο*). Αν ακολουθώντας τώρα τον Cantor, παραστήσουμε τον τύπο αυτής της διάταξης με *ω*, η αρίθμηση μπορεί να συνεχιστεί με φυσικό τρόπο $\omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega, \ldots\ \omega^2, \ldots \omega^{\omega}, \ldots$. Έτσι καταλήγουμε στους *υπερπεπερασμένους* αριθμούς του Cantor. Εκτενής αναφορά γίνεται στο [10] της βιβλιογραφίας.

Όμως και τα μη αριθμήσιμα σύνολα μπορούν να συγκριθούν ως προς το πλήθος των στοιχείων τους. Για παράδειγμα μπορούμε να αποδείξουμε ότι το πλήθος των στοιχείων του **R** ισούται με το πλήθος των στοιχείων του συνόλου (0 , 0.1), διότι υπάρχει *f*: **R** $\rightarrow$ (0, 0.1) 1-1 και επί με $f(x)=\dfrac{x}{20+20\cdot|x|}+\dfrac{1}{20}$ η οποία πληροί τις προϋποθέσεις σύγκρισης των δύο συνόλων. . Όσο είναι δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του **R**, τόσο είναι και το πλήθος των στοιχείων του διαστήματος (0 , 0.1).

Όπως αναφέραμε τόσο ο Newton όσο και ο Leibniz χρησιμοποίησαν το άπειρο και τα απειροστά για να αναπτύξουν τον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό. Χρησιμοποίησαν το σύμβολο ∞ για το άπειρο και dx για μια απειροστή ποσότητα. Ο Leibniz βεβαίωνε τους συνομιλητές του ότι το ∞ αποτελούσε μόνο *εν δυνάμει άπειρο* και ο Newton αποκαλούσε το απειροστό dx *ροή* . Η κριτική του φιλοσόφου και επισκόπου G. Berkley (1685-1753) για την έννοια του απειροστού ως «φαντάσματα τεθνεωσών ποσοτήτων» είχε ως αποτέλεσμα οι μαθηματικοί του 19ου αιώνα να χρησιμοποιήσουν την τεχνική των ορίων για να παρακάμψουν τις δυσκολίες των απειροστών. Εκτενέστερα στα [2], [3], [7], [11], [16] της βιβλιογραφίας.

Δηλαδή αν x είναι το διάστημα και t είναι ο χρόνος, η ταχύτητα ορίσθηκε ως $\dfrac{dx}{dt}$ τα dx και dt θεωρούνται απειροστά δηλαδή ποσότητες οι οποίες είναι απείρως μικρές χωρίς όμως να γίνονται μηδέν. Αργότερα, μετά την κριτική για τα απειροστά, η έκφραση $\dfrac{dx}{dt}$ επαναπροσδιορίστηκε ως εξής: $\dfrac{dx}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\rightarrow 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ χωρίς τα Δx και Δt να είναι κατ' ανάγκη απείρως μικρές ποσότητες.

Το 1966 ο Abraham Robinson εισήγαγε τους λεγόμενους «μη κλασικούς» (non standard) πραγματικούς αριθμούς, ένα μη κλασικό πρότυπο για τους πραγματικούς αριθμούς εκ των οποίων μερικοί είναι μικρότεροι από κάθε ρητό αριθμό αλλά και μεγαλύτεροι του μηδενός. Βλέπε [2] της βιβλιογραφίας.

Με την εισαγωγή του προτύπου των πραγματικών αριθμών ο απειροστικός λογισμός του Leibniz, όπου γίνεται χρήση των απειροστών, τίθεται σε σταθερές βάσεις. Η έννοια των απειροστών του Leibniz είναι απλή και διαισθητικά εύκολα αντιληπτή, δεν είναι όμως αυστηρή από μαθηματικής σκοπιάς. Αντίθετα η έννοια των απειροστών όπως ορίσθηκε από τον Robinson είναι αυστηρή από μαθηματικής πλευράς, δεν είναι όμως ούτε απλή, ούτε διαισθητικά εύκολα αντιληπτή.

Στο σχολικό βιβλίο των μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου ΟΕΔΒ Αθήνα 1996 σελ. 61, συμπεραίνεται ότι στο σύστημα των πραγματικών αριθμών ο αριθμός x = 0.9999… ισούται με τη μονάδα (1). Ένα επιχείρημα γι' αυτό είναι :

x = 0.999999… τότε

10x = 9.99999… και

-x = - 0.999999… Οπότε

9x = 9 και συνεπώς x = 1. Σημαντικά στοιχεία για τα απειροστά υπάρχουν στα [6], [15] της βιβλιογραφίας.

Το παράδειγμα αυτό είναι το καταλληλότερο για να μιλήσουμε για την έννοια των απειροστών διότι το να υποθέσουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός μεγαλύτερος από όλους τους δεκαδικούς αριθμούς 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999,…. και μικρότερος από τη μονάδα (1), είναι το ίδιο με το να ισχυρισθούμε ότι υπάρχει ένας αριθμός μεγαλύτερος από όλους τους αριθμούς 1, 2, 3, 4,.. . Αν λοιπόν έναν από αυτούς τους αριθμούς dx που είναι $0 < dx < 1$ ($dx < \frac{1}{n}, \forall n > n_0$) τον συμβολίσουμε με $\frac{1}{\omega}$ τότε οι παραπάνω συλλογισμοί γράφονται ως εξής:

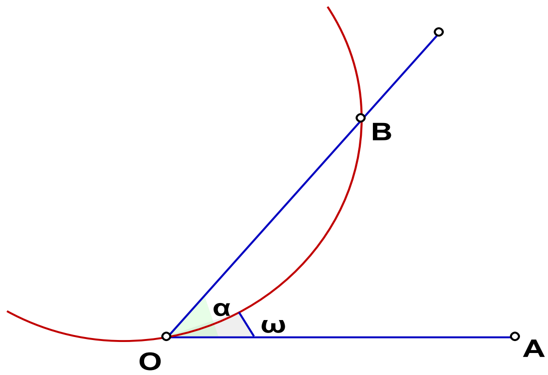
x = 0.99999… τότε

$10x = 10\text{-}10\frac{1}{\omega}$ και

$-x = -1+\frac{1}{\omega}$ Οπότε

$9x = 9 - 9\frac{1}{\omega}$ και συνεπώς $x = 1-\frac{1}{\omega}$.

Στην Ευκλείδεια γεωμετρία έχουμε την κερατοειδή γωνία ω, η οποία είναι ένα είδος μη συμβατικής γωνίας και είναι ένα απειροστό στο σύνολο όλων των συμβατικών γωνιών, διότι



Σχήμα 4

μία συμβατική γωνία $\hat{\alpha}$ δεν μπορεί να αποτελεί απειροστό γιατί αν υποθέσουμε ότι η $\hat{\alpha}$ είναι η μικρότερη θετική γωνία τότε $\hat{0} < \frac{\hat{\alpha}}{2} < \hat{\alpha}$ άτοπο. Σημαντικά επίσης στοιχεία για τα απειροστά υπάρχουν στο [5] της βιβλιογραφίας.

Επίσης υπάρχουν κάποια φαινόμενα που σχετίζονται με τα όρια και μας παρέχουν ισχυρές ενδείξεις για την ύπαρξη των απειροστών. Για παράδειγμα τόσο το

$\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$ όσο και το $\lim_{n\to\infty}(n^2+2)=\infty$ όμως το $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+2}=0$ Επίσης το $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ και $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ όμως το $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\infty$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Αναπολιτάνος Δ. « *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*» Εκδόσεις Νεφέλη Αθήνα 1985

[2] Αρτεμιάδης Ν. « *Ιστορία των Μαθηματικών* » Εκδόσεις Ακαδημίας Αθηνών, Αθήνα 2000

[3] Boyer C. κ.λ.π « *Η Ιστορία των Μαθηματικών*» Εκδόσεις Πνευματικού, 2η Έκδοση Αθήνα 1997

[4] Δημαράς Δ. «*Φιλοσοφία της Μαθηματικής*» Εκδόσεις Δωδώνη Αθήνα 1975

[5] Δρόσος Κ. « *Εισαγωγή στη μαθηματική σκέψη*» 2η Εκτύπωση Πάτρα 2000

[6] Li Lan & Tall David "*Constructing Different Concept Images of Sequences & Limits by Programming" Proceedings of PME 17,Tsukuba, Japan, vol 2, pp 41-48, 1993*

[7] Loria G. « *Ιστορία των Μαθηματικών*» Εκδόσεις Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

[8] Luminet Jean – Pierre Lachieze- Marc Rey «*Η Φυσική και το άπειρο*» Εκδόσεις Τραυλός-Κωσταράκη Αθήνα 1997

[9] Ρουσόπουλος Γ. « *Επιστημολογία των Μαθηματικών*» Εκδόσεις Gutenberg Αθήνα 1991

[10] Rucher Rudy « *Το άπειρο και ο νους*» Επιμέλεια Χατζηκυριάκου Κ. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1995

[11] Struik J.Dirk « *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*» Εκδόσεις Ζαχαρόπουλος, Αθήνα 1982

[12] Tall David "*The Notion of Infinite Measuring Number and its Relevance in the Intuition of Infinity"* Education Studies in Mathematics, 11, 271-284, 1980.

[13] Tall David "*A Child Thinking Adout Infinity*" Journal of Mathematics behavior 1-16, 2001

[14] Tall David "*Natural and Formal Infinities"* Educational Studies in Mathematics 48(2&3),199-238, 2001

[15] Tall David "*Reflecting on Post - Calculus – Reform"* Calculus International Congress of Mathematics Education, Copenhagen, Danmark, July 2004

[16] Tall David "*Mathematical Intuition with Special Reference to Limiting Processes" Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, Berkley, 170-176 ,1980*

[17] Τσαμάτος Π. « *Εισαγωγή στη Μαθηματική Ανάλυση*»,Ιωάννινα 1989

[18] Χριστοδουλίδης Π. « *Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών*» Επιμέλεια Χριστοδουλίδη Π. Εκδόσεις Πνευματικού, Αθήνα 1993

<u>ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ</u>

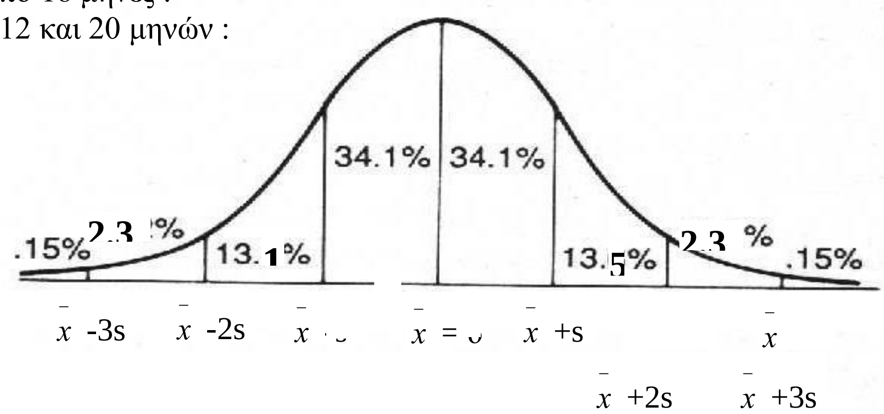
Καραγκούνη Ελισσάβετ

Ζητήθηκε από τους μαθητές να αναφέρουν τις μορφές κατανομών που έχουν μάθει και να τις παραστήσουν γραφικά. Μετά, ζητήθηκε να τοποθετήσουν στις γραφικές τους παραστάσεις τη μέση τιμή και τη διάμεσό τους και διαπιστώθηκε ότι στην κανονική κατανομή και στην ομοιόμορφη η μέση τιμή ταυτίζεται με την διάμεσο. Επιπλέον η κανονική κατανομή έχει τις εξής σημαντικότατες ιδιότητες
Για σύνολα δεδομένων με κατανομή συχνότητας που προσεγγίζει την κανονική έχουμε ότι :

- $\bar{x} = \delta$
- Το 68% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα ($\bar{x}$ -s, $\bar{x}$ +s).
- Το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα ($\bar{x}$ -2s, $\bar{x}$ +2s)
- Το 99,7% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα ($\bar{x}$ -3s, $\bar{x}$ +3s)
- R ~ 6s

1.Ο μέσος χρόνος ανέγερσης μιας μονοκατοικίας 200 m2 είναι 14 μήνες με τυπική απόκλιση 2 μήνες . Υποθέτουμε ότι έχουμε κανονική κατανομή. Να βρεθεί κατά προσέγγιση το ποσοστό των μονοκατοικιών που ανεγείρονται σε χρόνο :

i) Κάτω από 12 μήνες :
ii) Το πολύ 14 μηνών :
iii) Πάνω από 18 μήνες :
iv) Μεταξύ 12 και 20 μηνών :



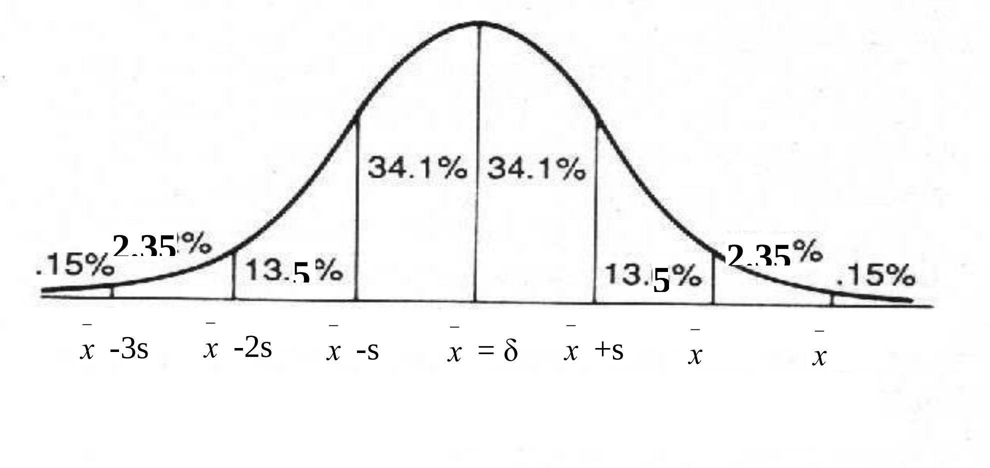
2. Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης για το χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο , διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική .

i)Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και
την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους

ii) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές

iii) Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά?

iv) Μια μέρα λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης , κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά . Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV).

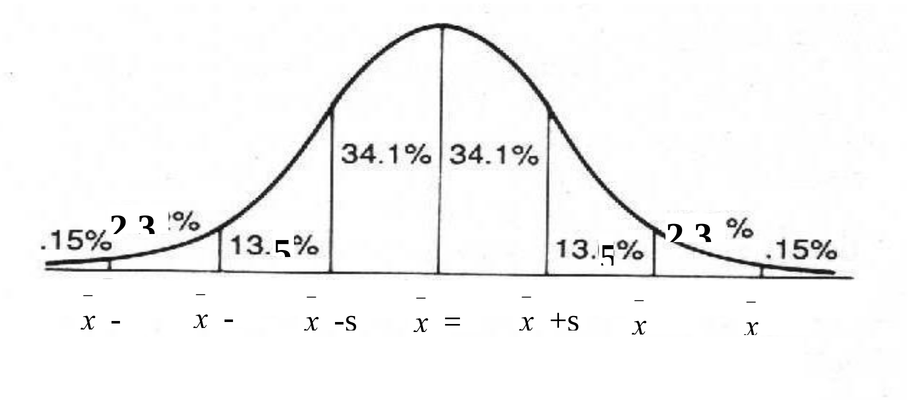


4.Η κατανομή των σωλήνων που παράγει μια μηχανή ως προς το μήκος τους είναι περίπου κανονική. Έστω ότι η διάμεσος των μηκών των σωλήνων είναι 3 m και το 2,5% των σωλήνων έχουν μήκος πάνω από 3,04 m .

i) Να βρείτε :

- Τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση, το εύρος και τον συντελεστή μεταβολής
- Το ποσοστό των σωλήνων που έχουν μήκος από 2,96 m έως 3,02 m

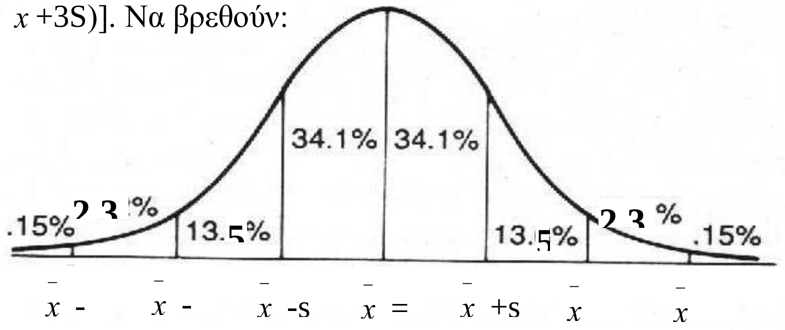
ii) Μια σωλήνα θεωρείται ελαττωματική όταν έχει μήκος μεγαλύτερο από 3,06 m ή μικρότερο από 2,94m. Αν η μηχανή παράγει 4000 σωλήνες και οι 18 είναι ελαττωματικές να εξετάσετε αν η λειτουργία της μηχανής έχει βλάβη.



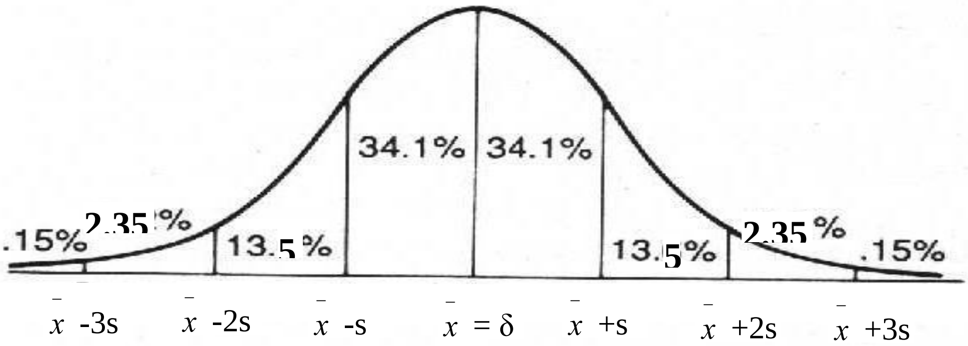
5.Τα νούμερα των παπουτσιών 400 μαθητών ενός Λυκείου ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Δέκα μαθητές φοράνε παπούτσια με νούμερο πάνω από 43 και 64 μαθητές κάτω από 37.

- Να βρείτε πόσοι μαθητές φοράνε παπούτσια με νούμερο από 37 έως 43.

6.Σε ένα δείγμα με κανονική καμπύλη συχνοτήτων το 83,85% των τιμών βρίσκονται στο διάστημα (15,27) με άκρα του διαστήματος αυτού να είναι κάποιες από τις τιμές [($\bar{x}$-3S, $\bar{x}$-2S,…, $\bar{x}$+3S)]. Να βρεθούν:



α) η μέση τιμή, η διάμεσος, η τυπική απόκλιση, ο συντελεστής μεταβολής και το εύρος του δείγματος.
β) Το ποσοστό των τιμών που είναι πάνω από 27



Παρατήρηση: Στην γραφική παράσταση αντί για 34.1% να θεωρηθεί το σωστό 34%

ΒΠΛ　　　　　　　　ΤΑΞΗ Γ΄　　　　　　　　　　1

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Για σύνολα δεδομένων με κατανομή συχνότητας που προσεγγίζει την κανονική έχουμε ότι :

- χ = δ
- Το 68% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα
(χ-s, χ+s).
- Το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα
(χ-2s, χ+2s)
- Το 99,7% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα

(χ-3s, χ+3s)

- R 6s

1.Ο μέσος χρόνος ανέγερσης μιας μονοκατοικίας 200 m2 είναι 14 μήνες με τυπική απόκλιση 2 μήνες . Υποθέτουμε ότι έχουμε κανονική κατανομή. Να βρεθεί κατά προσέγγιση το ποσοστό των μονοκατοικιών που ανεγείρονται σε χρόνο :
i) Κάτω από 12 μήνες :
ii) Το πολύ 14 μηνών :
iii) Πάνω από 18 μήνες :
iv) Μεταξύ 12 και 20 μηνών :

2

2. Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης για το χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο , διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική .

i)Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και
την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους

ii) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές

iii) Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά?

iv) Μια μέρα λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης , κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά . Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV).

4.Η κατανομή των σωλήνων που παράγει μια μηχανή ως προς το μήκος τους είναι περίπου κανονική. Έστω ότι η διάμεσος των μηκών των σωλήνων είναι 3 m και το 2,5% των σωλήνων έχουν μήκος πάνω από 3,04 m .

i) Να βρείτε :

- Τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση, το εύρος και τον συντελεστή μεταβολής
- Το ποσοστό των σωλήνων που έχουν μήκος από 2,96 m έως 3,02 m

ii) Μια σωλήνα θεωρείται ελαττωματική όταν έχει   μήκος   μεγαλύτερο από 3,06 m ή μικρότερο από 2,94m. Αν η μηχανή παράγει 4000 σωλήνες και οι 18 είναι ελαττωματικές να εξετάσετε αν η λειτουργία της μηχανής έχει βλάβη.

5.Τα νούμερα των παπουτσιών 400 μαθητών ενός Λυκείου ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Δέκα μαθητές φοράνε παπούτσια με νούμερο πάνω από 43 και 64 μαθητές κάτω από 37.

- Να βρείτε πόσοι μαθητές φοράνε παπούτσια με νούμερο από 37 έως 43.

6. Σε ένα δείγμα 40 μαθητών που αρρώστησαν από ανεμοβλογιά ο CV = 0,3 το Σχ =4360 , όπου χ οι μέρες που ο μαθητής απουσίαζε από το σχολείο. Αν υποθέσουμε ότι το δείγμα ακολουθεί κανονική κατανομή και ότι για περισσότερες από 16 μέρες απουσιών ο μαθητής πρέπει να φέρει δικαιολογητικό από νοσοκομείο, πόσοι μαθητές αναμένεται να φέρουν τέτοιο δικαιολογητικό.

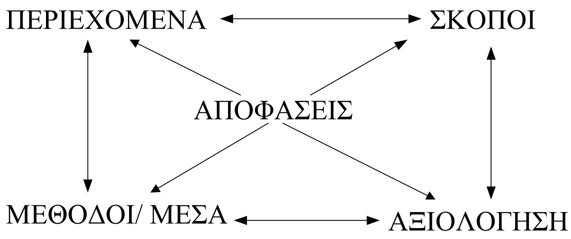
7.Σε ένα δείγμα με κανονική καμπύλη συχνοτήτων το 83,85% των τιμών βρίσκονται στο διάστημα (15,27) με άκρα του διαστήματος αυτού να είναι κάποιες από τις τιμές [(χ-3S,χ-2S,…,χ+3S)]. Να βρεθούν:

α) η μέση τιμή, η διάμεσος, η τυπική απόκλιση, ο συντελεστής μεταβολής και το εύρος του δείγματος.
β) Το ποσοστό των τιμών που είναι πάνω από 27

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ (Επισημάνσεις – Επεκτάσεις)

Ανδρέας Ν. Σβέρκος
Καθηγητής Μαθηματικών στο Βαρβάκειο Πειρ. Λύκειο

Αυτονόητο είναι ότι η θεωρητική ***κατάρτιση***, η επιμελής ***προετοιμασία*** και ο συνεχής ***προβληματισμός*** αποτελούν αναγκαίες προϋποθέσεις για μια επιτυχημένη διδασκαλία.
Καθημερινά καλείται ο καθηγητής των Μαθηματικών να παίρνει διδακτικές αποφάσεις . Το πλαίσιο των αποφάσεων του το διαμορφώνουν τα ***περιεχόμενα*** των προγραμμάτων σπουδών, οι επιδιωκόμενοι ***σκοποί***, όπως περιγράφονται στις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, οι ***μέθοδοι*** και τα ***μέσα διδασκαλίας*** και, τέλος, ο έλεγχος επιτυχίας των στόχων που είναι η ***αξιολόγηση***. Όλοι αυτοί οι παράγοντες βρίσκονται σε σχέση αλληλοεξάρτησης και αλληλοεπίδρασης και πρέπει να θεωρούνται ως μια ολότητα.



I. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά μιας επιτυχημένης διδασκαλίας **Μαθηματικών;**

Η διδακτική των Μαθηματικών και η Ψυχολογία της μαθήσεως μας παρέχουν τις αρχές που πρέπει να χαρακτηρίζουν τη διδακτική μας πράξη .

- **Ευρεία χρήση εποπτικών μέσων και παραστατικών μοντέλων:**

Οι Μαθητές πρέπει να «**βλέπουν**» αυτό που διδάσκονται. Έτσι οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις των εννοιών, οι γραφικές ερμηνείες των θεωρημάτων, τα μέσα διδασκαλίας (γεωμετρικά όργανα, διαφάνειες, υπολογιστές, κομπιουτεράκια, χρωματιστές κιμωλίες, διαφανές χαρτί κτλ.) πρέπει να είναι αναπόσπαστα ενταγμένα στην καθημερινή μας διδακτική πρακτική.

- **Αυτενέργεια των μαθητών:**

Οι μαθηματικές προτάσεις (θεωρήματα, κανόνες) και οι μαθηματικές έννοιες δεν πρέπει να προσφέρονται έτοιμες από τον διδάσκοντα , αλλά να ανακαλύπτονται από τους μαθητές. Εδώ είναι ο δύσκολος ρόλος του καθηγητή ο οποίος πρέπει να δημιουργήσει ατμόσφαιρα μάθησης , να προβληματίσει τους μαθητές και να τους ωθήσει να « πάρουν την κατάσταση στα χέρια τους».

- **Επίλυση προβλήματος:**

Αυτό που για τους μαθητές δίνει νόημα στα Μαθηματικά είναι η ύπαρξη ενός προβλήματος που πρέπει να λυθεί. Το πρόβλημα, εφόσον γίνει πρόβλημα και για τους μαθητές, τους κινητοποιεί να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους, αλλά και αποκαλύπτει την ανεπάρκεια των γνώσεων τους. Γίνεται έτσι το όχημα μεταφοράς της μαθηματικής γνώσης, όπου στην πορεία του, μέσα από την οργάνωση των δεδομένων, τη διατύπωση ερωτημάτων και υποθέσεων, την επαλήθευση και την αμφισβήτηση μιας λύσης, την ανάλυση, τη σύνθεση και τη διερεύνηση, αναδεικνύει με πειστικό τρόπο τη χρησιμότητα και τη δύναμη των Μαθηματικών.

****

Μέσα στα πλαίσια και τη λογική των παραπάνω αρχών πρέπει ο καθηγητής των Μαθηματικών να προετοιμάζει καθημερινά τις διδακτικές ενότητες της Στατιστικής, αναδεικνύοντας κάθε φορά τις σημαντικότερες έννοιες.

Όπως γνωρίζουμε η περιγραφική Στατιστική ασχολείται με τη **Συλλογή** των στοιχείων *(Έρευνα , Παρατήρηση, Πειράματα), την* **Παρουσίαση** των στοιχείων *(Πίνακες , Διαγράμματα) και την* **Εξαγωγή των συμπερασμάτων** *(Μέτρα θέσεως και Διασποράς).*

ΙΙ. Η Μέση τιμή και η Τυπική απόκλιση στη Φυσική

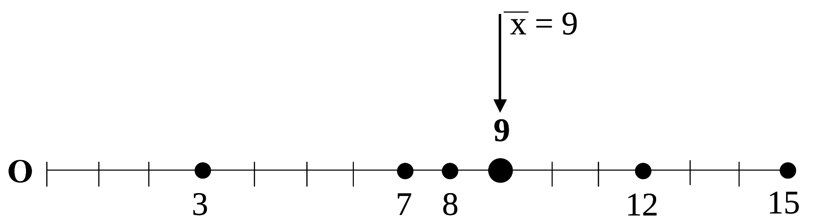
Πέρα από το απλό παράδειγμα του μέσου όρου της βαθμολογίας τους είναι σημαντικό και προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών να δουν και τη σημασία των στατιστικών παραμέτρων στη Φυσική. Αυτό μπορεί να γίνει με τα παρακάτω απλά παραδείγματα από τη Μηχανική.

Πρόβλημα 1ο

Σε μια αβαρή ράβδο τοποθετούνται μοναδιαίες μάζες σε αποστάσεις 3cm, 7cm, 8cm, 12cm και 15cm από το ένα άκρο της ράβδου.

(i) Να βρεθεί η θέση του κέντρου βάρους του συστήματος.

(ii) Να βρεθεί η ακτίνα κυκλικού δίσκου μάζας m =5 που έχει ροπή αδρανείας ίση με την ροπή αδρανείας των παραπάνω μαζών περί άξονα κάθετο στη ράβδο στο κέντρο βάρους της.



Λύση

(i) Η απόσταση x του κέντρου βάρους από το άκρο Ο της ράβδου βρίσκεται από τη σχέση:

$$(x-3)\cdot 1 + (x-7)\cdot 1 + (x-8)\cdot 1 + (x-12)\cdot 1 + (x-15)\cdot 1 = 0$$
$$(1+1+1+1+1)\, x = 3+7+8+12+15$$
$$\bar{x} = \frac{(3+7+8+12+15)}{5} = 9\text{cm}$$

δηλαδή, η **<u>μέση τιμή</u>** των αποστάσεων από την αρχή της ράβδου.

(ii) Η ροπή αδρανείας I των μοναδιαίων μαζών ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο στο κέντρο βάρους των μαζών δίνεται από την ισότητα :

$$I = (3-9)^2 + (7-9)^2 + (8-9)^2 + (12-9)^2 + (15-9)^2 == 36+4+1+9+36 = 86$$

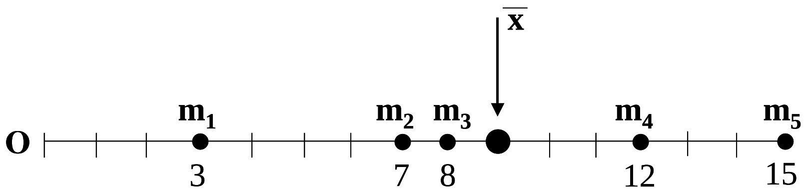
Αν R είναι η ακτίνα του κυκλικού δίσκου με ροπή αδρανείας ίση με την ροπή αδρανείας του αρχικού συστήματος, τότε $m R^2 = I$

$$5R^2 = 86$$

$$R = \sqrt{\frac{(3-9)^2 + (7-9)^2 + (8-9)^2 + (12-9)^2 + (15-9)^2}{5}} = 4,15$$

δηλαδή ίση με την **<u>τυπική απόκλιση</u>** των αποστάσεων των μαζών από την αρχή O της ράβδου.

O Βαρυκεντρικός Μέσος από τη Φυσική



Αν στην προηγούμενη περίπτωση δεν είχαμε μοναδιαίες μάζες, αλλά μάζες m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, τότε η θέση ισορροπίας x θα βρίσκεται από τη σχέση:

$$(x-3)m_1 + (x-7)m_2 + (x-8)m_3 + (x-12)m_4 + (x-15)m_5 = 0$$

$$(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5)\, x = 3\, m_1 + 7\, m_2 + 8\, m_3 + 12\, m_4 + 15\, m_5$$

$$\overline{x} = \frac{3m_1 + 7m_2 + 8m_3 + 12m_4 + 15m_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}$$

III. Ποιος μέσος;

Δεν πρέπει οι μαθητές να μείνουν με την εντύπωση ότι σε κάθε περίπτωση η μέση τιμή που πρέπει να χρησιμοποιηθεί είναι ο αριθμητικός μέσος. Με κατάλληλα παραδείγματα θα τους εξηγήσουμε ότι υπάρχουν προβλήματα όπου ο ***γεωμετρικός*** ή ο ***αρμονικός μέσος*** είναι οι ενδεικνυόμενοι μέσοι.

Πρόβλημα 2<u>ο</u>

Τα κέρδη μια εταιρείας αυξήθηκαν την τελευταία τριετία 20%, 25% και 45%. Ποιο ήταν το μέσο ετήσιο ποσοστό αύξησης την τριετία αυτή;

Λύση

Αν τα αρχικά κέρδη ήταν 100.000 €, τότε:

Στο τέλος του πρώτου χρόνου ανέβηκαν στα 100000+ 100000·0.20= 100000·1,20 €

Στο τέλος του δεύτερου χρόνου ανέβηκαν στα 100000·1,20·1,25 €

Στο τέλος του τρίτου χρόνου ανέβηκαν στα 100000·1,20·1,25·1,45 € =**217 500** €

Το ποσό αυτό είναι λίγο μικρότερο από μια μέση ετήσια αύξηση των κερδών ίση με το μέσο όρο των αυξήσεων της τριετίας, δηλαδή ίση με (20+25+45)/3= 30%. Πράγματι, 100000·1,30·1,30·1,30 € =**219 700** €.

Αν όμως χρησιμοποιήσουμε το γεωμετρικό μέσο των συντελεστών 1,20, 1,25, 1,45 που είναι $\sqrt[3]{1,20\cdot 1,25\cdot 1,45} = \sqrt[3]{2,1751} \approx 1,296$, και αντιστοιχεί σε ετήσιο ποσοστό 29,6% τότε έχουμε 100000·1,296·1,296·1,296 € ≈ **217 500**€ που είναι η πραγματική αύξηση στο τέλος της τριετίας. Δηλαδή :

$$100000\cdot 1,20\cdot 1,25\cdot 1,45 = 100000\cdot \alpha\cdot \alpha\cdot \alpha$$

$$\boldsymbol{\alpha = \sqrt[3]{1,20\cdot 1,25\cdot 1,45}}$$

Πρόβλημα 3$^{\underline{o}}$

Οι μέσες ταχύτητες που πέτυχε ένας μοτοσικλετιστής στους 6 γύρους μιας αγωνιστικής πίστας ήταν σε (km/h) 201, 198, 185, 200, 187, 202.
Ποια ήταν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε στους 6 γύρους;

Λύση

Αν S ήταν το μήκος της πίστας, τότε για κάθε γύρο χρειάστηκε χρόνο S/201, S/198, S/185, S/200, S/187, S/202 αντίστοιχα, δηλ. συνολικά χρειάστηκε S/201 + S/198 + S/185 + S/200 + S/187 + S/202 ώρες.
Επομένως, η μέση ταχύτητα ήταν:

$$\frac{6s}{\frac{s}{201}+\frac{s}{198}+\frac{s}{185}+\frac{s}{200}+\frac{s}{187}+\frac{s}{202}} =$$

$$= \frac{6}{\frac{1}{201}+\frac{1}{198}+\frac{1}{185}+\frac{1}{200}+\frac{1}{187}+\frac{1}{202}}$$

δηλ. ο **αρμονικός μέσος** των ταχυτήτων και όχι ο αριθμητικός μέσος.
Εδώ μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την ευκαιρία και (εφόσον το επιτρέπει ο χρόνος) να θέσουμε στους μαθητές που έχουν αυξημένο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά προβλήματα της μορφής:

- ***Αποδείξτε ότι ο γεωμετρικός μέσος τριών θετικών αριθμών είναι μικρότερος ή ίσος από τον αριθμητικό μέσο των αριθμών αυτών. Πότε ισχύει το = ;***
- ***Από όλα τα τρίγωνα με σταθερή περίμετρο ποιο έχει το μέγιστο εμβαδόν;***

IV. Μέση τιμή ή Διάμεσος;

Στους μαθητές πρέπει να δίνεται η ευκαιρία να προβληματίζονται για τη μέση τιμή ή τη διάμεσο ως καταλληλότερου μέτρου θέσεως , αλλά και για τη μεταξύ τους διάταξη σε σχέση με τη συμμετρία ή την ασυμμετρία της κατανομής.

Πρόβλημα 4$^{\underline{o}}$

Ένας μαθητής προκειμένου να αποφασίσει αν θα σπουδάσει Μηχανικός ή Γιατρός μας ζήτησε πληροφορίες για τα έσοδα των επαγγελμάτων αυτών . Τα μόνα στοιχεία που έχουμε είναι τα ετήσια έσοδα τριών Γιατρών και τριών Μηχανικών

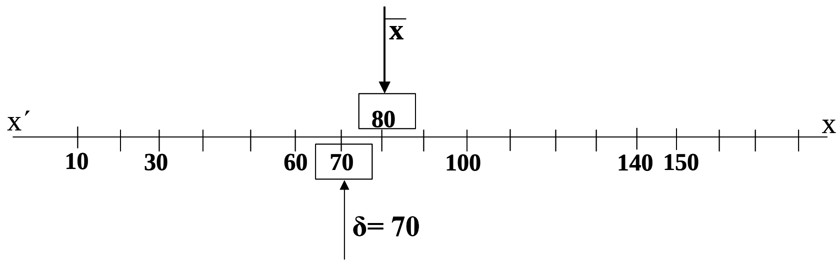
Γιατροί: 30.000 €, 40.000 €, 50.000 €
Μηχανικοί: 34.000 €, 36.000 €, 50.000 €
Ποια απάντηση θα δώσουμε στο Μαθητή;
Λύση
Υπολογίζουμε μέσες τιμές και διάμεσους των δεδομένων
Γιατροί: **Μέση τιμή = 40.000 € Διάμεσος = 40.000 €**
Μηχανικοί: **Μέση τιμή = 40.000 € Διάμεσο ς= 36.000 €**

- Η απάντηση είναι πολύ εύκολη, αφού η **μέση τιμή** στηριζόμενη σε όλες τις παρατηρήσεις εκφράζει καλύτερα την προσδοκία μας για το μελλοντικό εισόδημα, που αναμένεται να είναι 40.000 € και για τα δυο επαγγέλματα Επομένως από πλευράς εισοδήματος « ότι να σπουδάσει είναι το ίδιο»
- Αν όμως γνωρίζουμε επιπλέον ότι ο μαθητής είναι ένας μέσος μαθητής, δηλαδή ούτε πολύ καλός ούτε πολύ κακός, τότε η **διάμεσος** είναι περισσότερο αξιόπιστη από τη μέση τιμή και επομένως ο μαθητής πρέπει να επιλέξει το επάγγελμα του ιατρού.

Πρόβλημα 5ο
Πέντε σπίτια στο λόφο ενός νησιού έχουν τιμές σε € :
2.000.000, 500.000, 300.000 , 100.000, 100.000
Σε κάποιον ενδιαφερόμενο ποια θα αναφέρουμε ως αντιπροσωπευτική τιμή των σπιτιών στο νησί αυτό;
Λύση
Έχουμε:

Μέση τιμή = (2000000+500000+300000+100000+100000)/5= **600.000** €
Διάμεσος = (μεσαία παρατήρηση) = **300.000** €
Επειδή τα δεδομένα παρουσιάζουν (θετική) ασυμμετρία αντιπροσωπεύονται καλύτερα από τη διάμεσο που είναι **300.000** €.

Πρόβλημα 6ο



Στον άξονα x΄x δίνονται τιμές με μέση τιμή 80 και διάμεσο 70 .
1. Μπορείτε να αλλάξετε κάποια δεδομένα έτσι ώστε να διατηρηθεί στη θέση της η διάμεσος;
2. Μπορείτε να αλλάξετε κάποια δεδομένα έτσι ώστε να διατηρηθεί στη θέση της η μέση τιμή;
3. Μπορείτε να αλλάξετε κάποια δεδομένα έτσι ώστε να διατηρηθούν στη θέση τους η μέση τιμή και η διάμεσος;
Λύση

Προφανώς το πρόβλημα επιδέχεται άπειρες λύσεις και αυτό που ζητάμε είναι να κατανοήσουν οι μαθητές το πώς επηρεάζονται η μέση τιμή και η διάμεσος από τη μεταβολή των παρατηρήσεων.

Πρόβλημα 7^{ο}

Μπορείτε να κατασκευάσετε ένα σύνολο πέντε αριθμητικών δεδομένων με μέση τιμή 20, διάμεσο 10 και εύρος 50;

Λύση

Πρέπει να συμπληρώσουμε πέντε θέσεις:Η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή , η διάμεσος,

____ ____ 10 ____ ____

θα είναι υποχρεωτικά δ=10 :

Η διαφορά των ακραίων παρατηρήσεων, δηλαδή το εύρος, πρέπει να είναι R = 50, για παράδειγμα μπορεί οι ακραίες παρατηρήσεις να είναι 5 και 55:

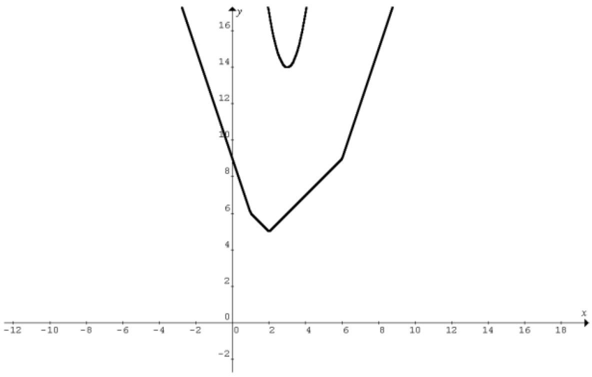
5 ____ 10 ____ 55

Οι δυο άλλοι αριθμοί πρέπει να έχουν άθροισμα 30 και μπορεί για παράδειγμα να είναι οι 8 και 22, οπότε:

5 8 10 22 55

V. Αλγεβρική Ιδιότητα της Διαμέσου - Αλγεβρική Ιδιότητα της Μέσης Τιμής

Ενώ είναι γνωστή από την εφαρμογή του σχολικού βιβλίου η ιδιότητα της μέσης τιμής να ελαχιστοποιεί τη μέση τετραγωνική απόκλιση των παρατηρήσεων από μια τυχαία τιμή , δεν είναι γνωστό η διάμεσος ελαχιστοποιεί αντίστοιχα την μέση απόλυτη απόκλιση των παρατηρήσεων από μια τυχαία τιμή. Αυτό μπορεί να γίνει είτε αλγεβρικά είτε , πολύ προτιμότερα , γραφικά .



Πρόβλημα 8^{ο}

Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-6)^2$ και $g(x) = |x-1|+|x-2|+|x-6|$. Τι παρατηρείτε για τα ακρότατα των συναρτήσεων αυτών;

Και εδώ, όπως προηγουμένως, μπορούμε θέσουμε προβλήματα της μορφής:

Πέντε μαθητές μένουν στον ίδιο δρόμο και οι αποστάσεις των σπιτιών τους από την κεντρική πλατεία είναι 200m, 300m, 500m, 700m και 1000m. Σε ποιο σπίτι πρέπει να συναντηθούν ώστε να διανύσουν τη μικρότερη συνολικά απόσταση;

VI. Ο μετασχηματισμός Υ = αΧ + β

Με κατάλληλα προβλήματα πρέπει να αναδειχθεί η χρησιμότητα του

μετασχηματισμού ως εργαλείου απλοποίησης του υπολογισμού των παραμέτρων,

αλλά και σύνταξης των στατιστικών πινάκων.

Πρόβλημα 9ο:

Η ατμοσφαιρική πίεση σε millibars σε έναν τόπο για δέκα διαδοχικές μέρες ήταν 995, 993, 989, 994, 994, 1014, 1016, 1015, 1015, 1016. Να βρείτε τη μέση ατμοσφαιρική πίεση και την τυπική απόκλιση.

Λύση

Μια πρώτη προσέγγιση της μέσης τιμής είναι η τιμή **1000.** Γράφουμε κάθε τιμή t_i στη μορφή $\mathbf{t_i = 1000 + z_i}$ και έχουμε:

$$
\begin{aligned}
995 &= 1000 - 5 \\
993 &= 1000 - 7 \\
989 &= 1000 - 11 \\
994 &= 1000 - 6 \\
994 &= 1000 - 6 \\
1014 &= 1000 + 14 \\
1016 &= 1000 + 16 \\
1015 &= 1000 + 15 \\
1015 &= 1000 + 15 \\
1016 &= 1000 + 16
\end{aligned}
$$

Οπότε $$\sum_{i=1}^{10} t_i = 10 \cdot 1000 + 41$$

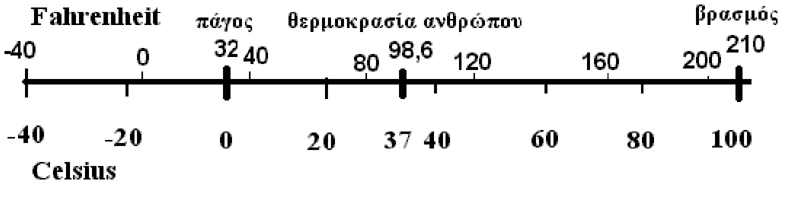
$$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} t_i = 1000 + 4{,}1 = 1004{,}1$$

Πρόβλημα 10ο:

Η θερμοκρασία σε μια πόλη τον Αύγουστο είχε μέση τιμή 30 βαθμούς Celsius και τυπική απόκλιση 4 βαθμούς Celsius.

Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της παραπάνω θερμοκρασίας σε βαθμούς Fahrenheit.

(Δίνεται ότι C βαθμοί Celsius είναι F βαθμοί Fahrenheit, όπου F=1,8C+32).



Λύση

Έχουμε

X_F = $1{,}8X_C+32$ = 54+32 = **86** βαθμοί Fahrenheit

S_F = $1{,}8S_C$ =**7,2** βαθμοί Fahrenheit

Παρατήρηση: Ενώ ο συντελεστής μεταβλητότητας ήταν CV_C=4/30= 0,13 έγινε CV_F =7,2/86 = 0,08 !!! , δηλαδή η κλίμακα επηρεάζει το συντελεστή μεταβλητότητας

Πρόβλημα 11ο :

Οι παρατηρήσεις $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση S. Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων που προκύπτουν αν από κάθε τιμή αφαιρέσουμε τη μέση τιμή και στη συνέχεια διαιρέσουμε με την τυπική απόκλιση.

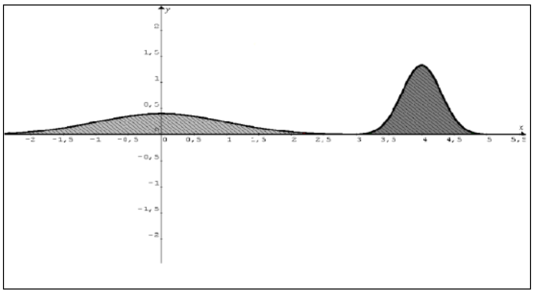
Λύση

Αν $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ είναι οι νέες μέσες τιμές , τότε $z_1 = \frac{t_1 - \bar{x}}{s}$, $z_2 = \frac{t_2 - \bar{x}}{s}$, …,

$z_\nu = \frac{t_\nu - \bar{x}}{s}$. Επομένως $\mathbf{\bar{z} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} z_i = \frac{(t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu) - \nu\bar{x}}{s} = \frac{\nu\bar{x} - \nu\bar{x}}{s} = 0}$ και

$$\mathbf{s_z = \frac{1}{s} \cdot s = 1}$$

Παρατήρηση : Ο παραπάνω μετασχηματισμός μας λύνει το πρόβλημα του υπολογισμού των τιμών μιας κατανομής από τους πίνακες τιμών της αντίστοιχης κατανομής με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1.

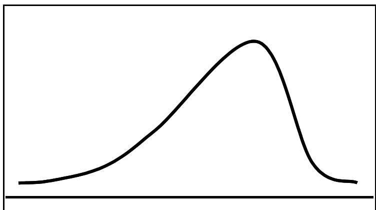
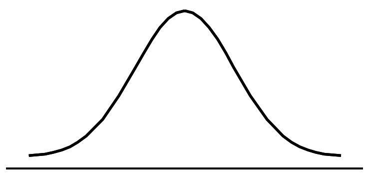
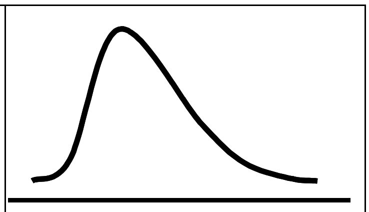


VI. Σχήμα μιας Κατανομής

Σε κάθε μάθημα πρέπει οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία να περιγράφουν το σχήμα μιας κατανομής και ανάλογα με το σχήμα της να προτείνουν την καταλληλότερη παράμετρο θέσεως που την αντιπροσωπεύει, καθώς και τη σχετική θέση μεταξύ των παραμέτρων.

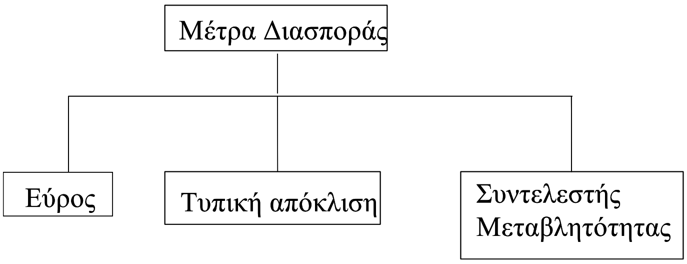
Πρόβλημα 12ο :

Να περιγράψετε το σχήμα των παρακάτω κατανομών και να αντιστοιχίσετε καθεμιά στη σχέση που ισχύει για αυτήν και δίνεται στη δεύτερη γραμμή :

		
Μέση τιμή > Διάμεσο	Μέση τιμή = Διάμεσο	**Μέση τιμή < Διάμεσο**

VII. Μέτρα Διασποράς

Τα μέτρα Διασποράς μας δίνουν πληροφορίες για το σκόρπισμα ή για τη μεταβλητότητα των τιμών.



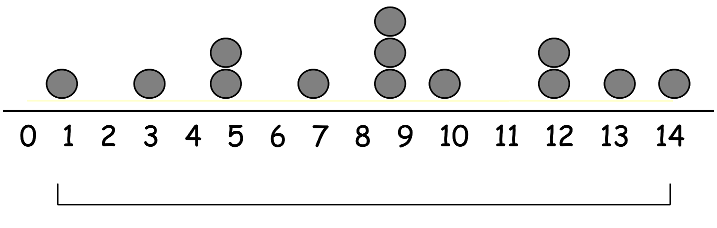
Μετά από τον προβληματισμό για την αναγκαιότητα της χρησιμοποίησης των μέτρων διασποράς , πρέπει, με τη βοήθεια παραστατικών μοντέλων και απλών προβλημάτων, να κατανοήσουν οι μαθητές τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα κάθε μέτρου.

- **<u>Το Εύρος</u>**

Το εύρος ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης από τη μέγιστη παρατήρηση:

$$\textbf{Εύρος:}\ \ R = x_{μέγιστη} - x_{ελάχιστη}$$

(Σε ομαδοποιημένη κατανομή είναι η διαφορά του αριστερού άκρου της πρώτης κλάσης από το δεξιό άκρο της τελευταίας κλάσης και στην κανονική κατανομή είναι περίπου 6S).

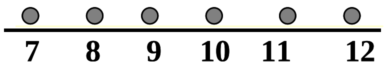


Εύρος = 14 - 1 = 13

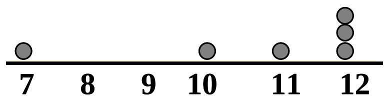
Ενώ το εύρος υπολογίζεται απλούστατα και έτσι έχουμε μια άμεση εκτίμηση της διασποράς, έχει και μειονεκτήματα.

Μειονεκτήματα του Εύρους

- Παραγνωρίζει τον τρόπο που κατανέμονται οι τιμές



Εύρος = 12 - 7 = 5



Εύρος = 12 - 7 = 5

- Ευαισθησία σε ακραίες τιμές

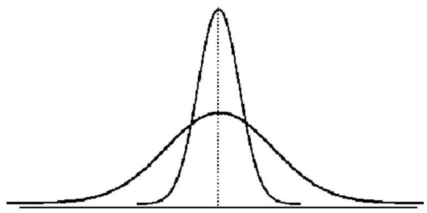
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5

Εύρος = 5 - 1 = 4

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 120

Εύρος = 120 - 1 = 119

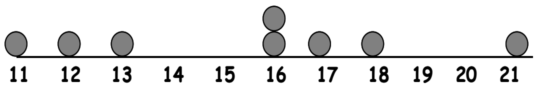
- **<u>Διασπορά- Τυπική Απόκλιση</u>**



Ίδιο κέντρο – Διαφορετική διασπορά

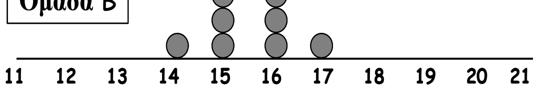
Συγκρίνοντας Τυπικές Αποκλίσεις

Ομάδα A



Μέση τιμή =15.5
s = 3.338

Ομάδα B



Μέση τιμή =15.5
s = .9258

Ομάδα Γ

Μέση τιμή = 15.5
s = 4.57

- **<u>Συντελεστής Μεταβλητότητας</u>**

- Όταν διαφέρει σημαντικά το μέγεθος των παρατηρήσεων δεν μπορεί να γίνει σύγκριση των διασπορών τους, αφού οι μεγαλύτερες τιμές έχουν συνήθως και μεγαλύτερες διασπορές. Για παράδειγμα, δεν θα έχουμε σαφή εικόνα της μεταβλητότητας του αριθμού των θεατών που παρακολουθούν τους αγώνες της Α΄ Εθνικής με αυτούς που παρακολουθούν τους αγώνες της Β΄ Εθνικής , αν τους συγκρίνουμε ως προς τη διασπορά τους.
- Επίσης, ποια παράμετρο θα χρησιμοποιήσουμε αν θέλουμε να συγκρίνουμε τις αθλητικές επιδόσεις ενός αθλητή ακοντισμού και ενός αθλητή ταχύτητας, αφού έχουν τελείως άλλες μονάδες μέτρησης (μέτρα – δευτερόλεπτα);
- Πως θα συγκρίνουμε ως προς τη μεταβλητότητα δεδομένα που έχουν μετρηθεί με διαφορετικές κλίμακες;

Επειδή το μέγεθος των παρατηρήσεων αντιπροσωπεύεται από τη μέση τιμή τους , γι' αυτό διαιρούμε την τυπική απόκλιση με τη μέση τιμή (δηλαδή μετράμε την τυπική απόκλιση σε μονάδες αντίστοιχης μέσης τιμής και «εξουδετερώνουμε» την επίδραση της κλίμακας) .

<u>Συγκρίνοντας Συντελεστές Μεταβλητότητας</u>

- **<u>Εμπόρευμα Α</u> :**
  - **Μέση τιμή = 50 €**
  - **Τυπική απόκλιση = 5€**
  - $\mathbf{CV_A = \left(\frac{s}{\bar{x}}\right) = \frac{5}{50} = 10\%}$

- **<u>Εμπόρευμα Β</u> :**
  - **Μέση τιμή = 100 €**
  - **Τυπική απόκλιση = 5 €**
  - $\mathbf{CV_B = \left(\frac{s}{\bar{x}}\right) = \frac{5}{100} = 5\%}$

Αμφότερα τα εμπορεύματα έχουν την ίδια τυπική απόκλιση, αλλά το Β είναι λιγότερο μεταβλητό ως προς το επίπεδο των τιμών του.

Πρόβλημα 12<u>ο</u> :

Στις προετοιμασίες εν όψει αγώνων, ένας αθλητής ακοντισμού σε δέκα ρίψεις πέτυχε (σε m):75, 70, 78, 72, 71, 75, 68, 72, 70, 70. Στις ίδιες προετοιμασίες ένας αθλητής των 100m σε δέκα επίσης διαδρομές πέτυχε (σε sec): 11, 12, 13, 10, 11, 12, 14, 12, 13, 13. Ποιος από τους δυο αθλητές μπορεί να θεωρηθεί σταθερότερος στις επιδόσεις του;

Λύση

Η σύγκριση μπορεί να γίνει μόνο με τους συντελεστές μεταβλητότητας, αφού έχουμε διαφορετικές μονάδες μέτρησης.

Έχουμε : $\mathbf{\bar{x} = 73{,}1}$ και $\mathbf{s_x = 3{,}05}$, επομένως $\mathbf{CV_x = 0{,}042}$

$\mathbf{\bar{y} = 11}$ και $\mathbf{s_y = 1{,}581}$, επομένως $\mathbf{CV_y = 0{,}144}$

Επειδή $\mathbf{CV_x < CV_y}$, ο αθλητής του ακοντισμού πρέπει να θεωρηθεί σταθερότερος από τον αθλητή της ταχύτητας.

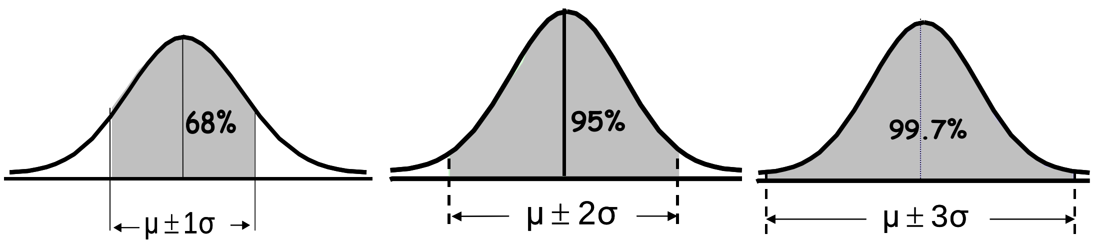
VIII. <u>Κανονική Κατανομή</u>

Η κανονική κατανομή είναι η σπουδαιότερη κατανομή στη Στατιστική. Βασικότεροι λόγοι γι' αυτό:

- Πάρα πολλές μεταβλητές ακολουθούν την κανονική κατανομή, ιδιαίτερα όταν επηρεάζονται από πολλούς παράγοντες, όπως για παράδειγμα το «ύψος των μαθητών», όπου η μεταβολή στα ύψη οφείλεται στην ηλικία, στο φύλο, στη διατροφή, στη άσκηση, στο ύψος των γονέων κτλ.

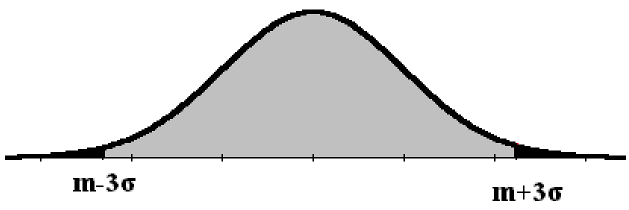
- Ισχύει ο εμπειρικός κανόνας (σε συνδυασμό με το νόμο του **Tchebysheff**) που μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε το διάστημα στο οποίο ανήκει το σύνολο σχεδόν των παρατηρήσεων.

- ***Η κατανομή του δειγματικού μέσου*** είναι κανονική κατανομή με μέση τιμή $\boldsymbol{\mu}$ και τυπική απόκλιση $\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{\nu}}}$, όπου μ και σ η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του πληθυσμού και ν το μέγεθος του δείγματος.



Πρόβλημα 13ο :
Ένα δείγμα με 1000 άτομα ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή m και τυπική απόκλιση σ. Πόσα άτομα του δείγματος αναμένεται να βρίσκονται εκτός του διαστήματος [m-3σ, m+3σ];

Λύση

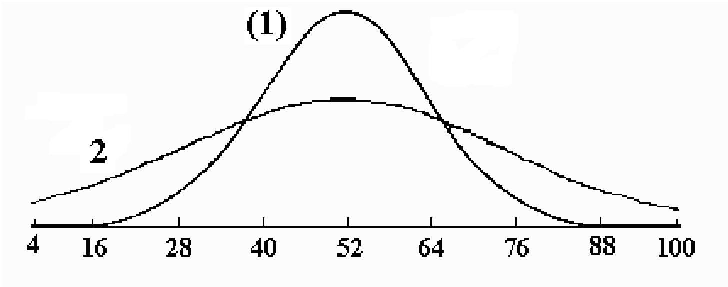


$$\frac{100}{100}-\frac{99{,}7}{100}=\frac{0{,}3}{100}$$

$$\frac{0{,}3}{100}\cdot 1000 = 3 \text{ άτομα !!!}$$

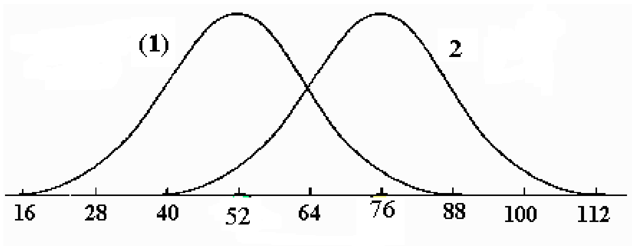
Πρόβλημα 14ο :

- **Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις παρακάτω κατανομές στο ζεύγος της $(\bar{x},\ s)$:**



Α: (52, 24) Β: (40, 12) Γ: (52, 12)

- **Ομοίως:**

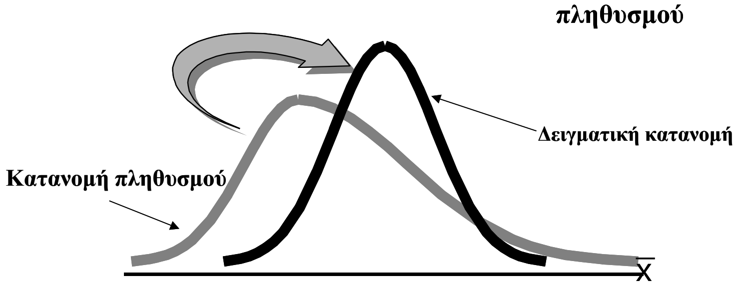


Α: (64, 12) Β: (76, 12) Γ: (52, 12)

Δειγματική Κατανομή

Καθώς το δείγμα γίνεται ολοένα και μεγαλύτερο

Η δειγματική κατανομή γίνεται σχεδόν κανονική ανεξάρτητα από την κατανομή του πληθυσμού



****

Επίλογος

Είναι χρήσιμη η διδασκαλία της Στατιστικής στο Λύκειο;

- **Ο πολίτης σήμερα κατακλύζεται από στατιστικές πληροφορίες και επομένως πρέπει να είναι σε θέση να τις κατανοεί και να στέκεται κριτικά απέναντί τους.**

- **Ο ίδιος ο πολίτης πρέπει να είναι σε θέση να μεταδίδει πληροφορίες με τη γλώσσα της Στατιστικής.**

- Ο παρακάτω κατάλογος ρημάτων περιέχει τις πνευματικές ενέργειες που απαιτεί το σημερινό περιβάλλον από κάθε πολίτη:

\- **Αναλύω**, **Απαριθμώ**, **Απλοποιώ**, **Γενικεύω**, **Διαφοροποιώ**, **Δομώ**, **Εντάσσω**, **Εξειδικεύω**, **Εξιδανικεύω**, **Ερμηνεύω**, **Θεμελιώνω**, **Κατατάσσω**, **Μετασχηματίζω**, **Παρουσιάζω**, **Προτυποποιώ**, **Συγκρίνω**, **Συνδυάζω**, **Συνθέτω**, **Σχηματοποιώ**, **Τακτοποιώ**, **Τυποποιώ.**

Ποιος μπορεί να αμφιβάλλει ότι η Στατιστική είναι ένα άριστο και αναντικατάστατο μέσον για τη άσκηση των μαθητών στις παραπάνω πνευματικές διεργασίες;

Βιβλιογραφία:

1. Advanced level Applied Mathematics, C. G. Lambe
2. Essential Statistics, D. G. Rees
3. Work Out Statistics A Level, A.D Ball & G.D. Buckwell
4. Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12, NCTM
5. Statistische Methoden im Sport, DDR
6. Einfuerung in die Statistics, RoRoRo

Προβλήματα μεγίστου και ελαχίστου στη Γεωμετρία*

Ηλίας Ανδριανός, 2ο Πειραματικό Λύκειο Αθηνών
Παναγιώτα Κοταρίνου, 2ο Λύκειο Ιλίου
Αλίκη Μπασιάκου, Ζάννειο Πειραματικό Γυμνάσιο Πειραιά

Καθηγητές Μαθηματικών, M.ed. Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών από το Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών.

Περίληψη

Με τη μέχρι σήμερα δομή του αναλυτικού προγράμματος οι μαθητές έρχονται σε επαφή με προβλήματα μεγίστου ελαχίστου στην Άλγεβρα της Γ΄ Γυμνασίου – Α΄ Λυκείου (τριώνυμο) και στην Ανάλυση της Γ΄ Λυκείου (παράγωγος). Με τον τρόπο αυτό χάνεται αφ' ενός η ιστορική διάσταση αυτού του είδους των προβλημάτων, η προσέγγιση των οποίων ήταν κατ' εξοχήν γεωμετρική, αφ' ετέρου δε συρρικνώνεται ο ρόλος της Γεωμετρίας.

Με αφορμή, λοιπόν, το πρόβλημα να ευρεθεί το εγγεγραμμένο σε δοθέντα κύκλο τρίγωνο μεγίστου εμβαδού, γίνεται μια περιήγηση στο χώρο των μεγίστων– ελαχίστων και ειδικότερα στο χώρο των μεγίστων– ελαχίστων εμβαδών ευθυγράμμων σχημάτων. Οδηγός στην πορεία αυτή θα είναι τα ιστορικά στοιχεία.

Στόχοι της προτεινόμενης δραστηριότητας είναι:

1. Να κεντρισθεί η περιέργεια των μαθητών για την ιστορία των μαθηματικών.
2. Να μάθουν να πειραματίζονται και να κάνουν εικασίες (επαγωγικός τρόπος μάθησης).
3. Να μάθουν ότι οι εικασίες είναι πιθανότητες και όχι βεβαιότητες.
4. Να αισθανθούν κατ' αυτόν τον τρόπο την ανάγκη της απόδειξης (παραγωγικός τρόπος μάθησης).
5. Να προετοιμαστούν για τον υπολογισμό του εμβαδού κύκλου μέσω κανονικών πολυγώνων.

Σχεδιασμός και περιγραφή των δραστηριοτήτων

Η διδακτική μας πρόταση σχεδιάστηκε για το τελευταίο δίμηνο της Α΄ Λυκείου, όταν, με τη σημερινή δομή του αναλυτικού προγράμματος, οι μαθητές θα έχουν έλθει ήδη σε επαφή με την αλγεβρική προσέγγιση των προβλημάτων μεγίστων– ελαχίστων. Η δραστηριότητα θα διεξαχθεί σε δύο φάσεις, για κάθε μία από τις οποίες απαιτείται μία διδακτική ώρα.

Προαπαιτούμενες γνώσεις

1) Τύπος εμβαδού τριγώνου.
2) Πυθαγόρειο Θεώρημα.
3) Ιδιότητες ισοσκελών και ισοπλεύρων τριγώνων.
4) Σχέσεις εγγεγραμμένων γωνιών με το αντίστοιχο τόξο.
5) Συμμετρία.

1η φάση

* Η εισήγηση στηρίχτηκε σε εργασία που έγινε κατά το χειμερινό εξάμηνο 2000-2001 στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών του Μαθηματικού Τμήματος του Ε. Κ. Πανεπιστημίου, στα πλαίσια του μαθήματος «Θέματα Ειδικής Διδακτικής».

Η πρώτη φάση διαιρείται σε δύο μέρη.

Στο πρώτο μέρος, διάρκειας δέκα λεπτών, ο καθηγητής παρουσιάζει τα ιστορικά στοιχεία[28] και παροτρύνει τους μαθητές να συγκεντρώσουν και άλλα δίνοντας συγκεκριμένη βιβλιογραφία[29].

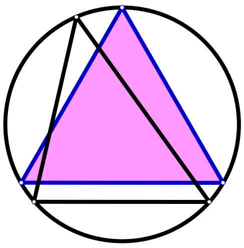
Στο δεύτερο μέρος διατυπώνεται το πρόβλημα:

Να βρεθεί ποιο, από όλα τα εγγεγραμμένα σε δεδομένο κύκλο (Ο, R) τρίγωνα, έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Οι μαθητές εργάζονται σε τετραμελείς ομάδες. Χρησιμοποιούν τετράδιο και γεωμετρικά όργανα. Ο καθηγητής τους ενθαρρύνει να συνεργάζονται. Ακολουθεί συζήτηση, συγκρίνονται τα αποτελέσματα και οι μαθητές διορθώνουν τα ενδεχόμενα λάθη τους. Ο καθηγητής τους παροτρύνει, με κατάλληλες ερωτήσεις, να καταλήξουν σε συμπεράσματα, τα οποία τίθενται υπό έλεγχο και ανατρέπονται ή επιβεβαιώνονται. Γίνεται συζήτηση για την ύπαρξη ενός αδιαμφισβήτητου τρόπου απόρριψης (αντιπαράδειγμα) ή επιβεβαίωσης (αποδεικτική διαδικασία). Στη φάση αυτή γίνεται «ψηλάφηση» του προβλήματος, με την οποία οι μαθητές υποθέτουν ότι το προς αναζήτηση τρίγωνο είναι το ισόπλευρο. Η απόρριψη ή επιβεβαίωση της εικασίας είναι το αντικείμενο της δεύτερης φάσης.

Επομένως, στην πρώτη φάση τίθεται το πρόβλημα.

Επειδή το ισόπλευρο τρίγωνο είναι το πλέον υποψήφιο ως απάντηση στο πρόβλημα, με δεδομένα τα ιστορικά στοιχεία, μια πρώτη προσέγγιση θα είναι η σύγκριση του εμβαδού τυχόντος τριγώνου εγγεγραμμένου σε δοθέντα κύκλο με το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο.



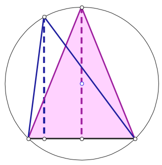
Στην προσπάθειά τους οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι υπάρχει αδυναμία λύσης του προβλήματος με αυτήν την απ' ευθείας σύγκριση γιατί τα δύο τρίγωνα **<u>δεν έχουν κοινά στοιχεία.</u>**

Θα οδηγηθούν, λοιπόν, στην απόρριψη αυτού του τρόπου προσέγγισης και συγχρόνως θα μάθουν δύο πράγματα:

α) Η μέθοδος της **δοκιμής** και της **απόρριψης** είναι **μέρος της ερευνητικής διαδικασίας** και <u>όχι πηγή απογοήτευσης</u>.

β) Για να μπορέσουμε να κάνουμε συγκρίσεις θα πρέπει να **σταθεροποιήσουμε κάποια στοιχεία** και να μελετήσουμε την μεταβολή των υπολοίπων σε σχέση με αυτά.

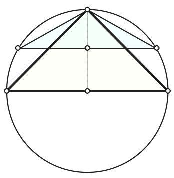
Στην επιχείρηση σύγκρισης του εμβαδού τυχόντος τριγώνου με ισόπλευρο εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο, ακολουθούμε τα εξής διαδοχικά βήματα:



- <u>1ο Βήμα</u>:

Απ' όλα τα τρίγωνα με την ίδια βάση, το μεγαλύτερο εμβαδόν το έχει το ισοσκελές, γιατί έχει μεγαλύτερο ύψος.

- <u>2ο Βήμα</u>:



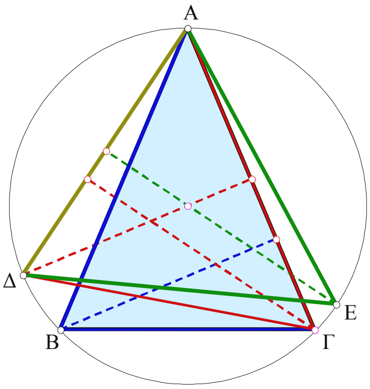
Όλα τα αμβλυγώνια ισοσκελή έχουν μικρότερο εμβαδόν από το ορθογώνιο ισοσκελές, γιατί έχουν και μικρότερη βάση και μικρότερο ύψος.

- <u>3ο Βήμα</u>:

[28] Τα ιστορικά στοιχεία παρατίθενται στο παράρτημα.

[29] Ενδεικτικά προτείνουμε:
1. V.M. Tikhomirov, *Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα*, Εκδόσεις κάτοπτρο, 1999.
2. Denis Guedj, *Το Θεώρημα του παπαγάλου*, Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ, 1999.

Το ισόπλευρο έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το ορθογώνιο ισοσκελές. (Υπολογισμός συναρτήσει της ακτίνας του κύκλου: $E_{ορθ.} = R^2$, $E_{ισοπλ.} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$).



- <u>4ο Βήμα</u>: (Περιοριζόμαστε πλέον στα οξυγώνια)

Αν ΑΒΓ ισοσκελές με βάση ΒΓ και ΑΓΔ ισοσκελές με βάση ΑΓ, το ΑΓΔ έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το ΑΒΓ. Με την ίδια λογική το ισοσκελές ΑΔΕ με βάση ΑΔ έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το ΑΓΔ.

Για να είναι το εμβαδόν του ΑΔΕ μέγιστο, δηλαδή να μην υπάρχει άλλο τρίγωνο με βάση ΑΕ που να έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το εμβαδόν του ΑΔΕ, θα πρέπει το ΑΔΕ να είναι ισοσκελές και με βάση ΑΕ, δηλαδή ΔΑ = ΔΕ. Αλλά ΔΕ = ΑΕ. Άρα ΔΑ = ΔΕ = ΑΕ. Δηλαδή ΑΔΕ ισόπλευρο.

Στο σημείο αυτό εμφανίζεται για δεύτερη φορά η ***δημιουργική αμφιβολία***: Δηλαδή το ισόπλευρο είναι το τρίγωνο μεγίστου εμβαδού; Πώς μπορούμε να βεβαιωθούμε;

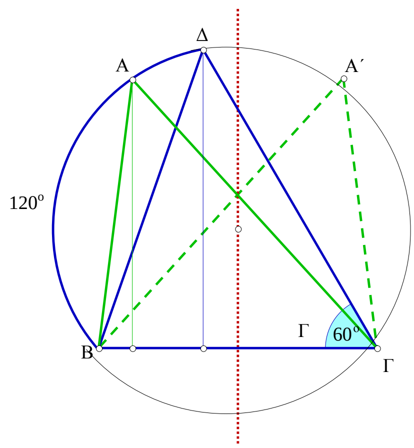
Στη φάση αυτή έχουμε ακολουθήσει τη μέθοδο της καθοδηγούμενης ανακάλυψης. Ακολουθεί η δεύτερη φάση.

2η φάση

Στη δεύτερη φάση εισάγεται το στοιχείο ***της κατασκευής***. Αν κατασκευάσουμε ισόπλευρο τρίγωνο, εγγεγραμμένο στον δοθέντα κύκλο, που να έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από κάθε άλλο τρίγωνο, εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο και αποδείξουμε ότι όντως έχει μεγαλύτερο εμβαδόν, τότε το πρόβλημα έχει λυθεί. Στη φάση αυτή η επέμβαση του καθηγητή είναι διακριτικά εντονότερη. Η φάση έχει δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, διάρκειας περίπου μισής ώρας, γίνεται η κατασκευή του τριγώνου μεγίστου εμβαδού και στη δεύτερη, διάρκειας περίπου ενός τετάρτου, γίνεται η συζήτηση για τις γενικεύσεις τις προεκτάσεις του προβλήματος.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι οι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου διαιρούν τον περιγεγραμμένο κύκλο σε τρία ίσα τόξα, 120^o το καθένα. Αν ΑΒΓ είναι ένα τυχόν (σκαληνό) τρίγωνο, τα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ θα είναι άνισα. Συνεπώς κάποιο απ' αυτά θα είναι μικρότερο και κάποιο μεγαλύτερο από 120^o. Έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το τόξο ΑΒ είναι μικρότερο από 120^o και το τόξο ΓΑ μεγαλύτερο από 120^o.

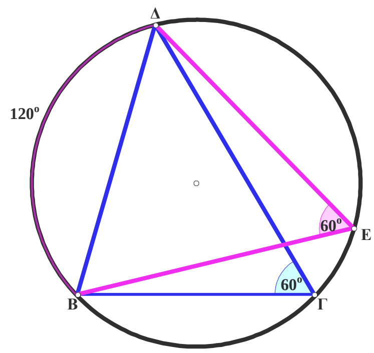
Οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε τόξο ΒΔ = 120^o και τόξο ΓΑ΄ = ΒΑ, όπως στο διπλανό σχήμα:



Το τρίγωνο Α΄ΓΒ είναι ίσο με το ΑΒΓ ***λόγω συμμετρίας*** ως προς τη διάμετρο του κύκλου, η οποία διέρχεται από το μέσον της ΒΓ. Άρα το τόξο ΓΑ΄ είναι ίσο με το τόξο ΒΑ και επομένως μικρότερο από το τόξο ΒΔ. Άρα το σημείο Δ βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία Α και Α΄ και συνεπώς «ψηλότερα» απ' αυτά, δηλαδή το τρίγωνο ΔΒΓ έχει την ίδια βάση, αλλά μεγαλύτερο ύψος από τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄ΓΒ. Άρα (ΔΒΓ) > (ΑΒΓ) = (Α΄ΓΒ).

Επομένως έχουμε εξασφαλίσει, προς το παρόν, την ύπαρξη – μέσω κατασκευής – σκαληνού τριγώνου, το οποίο έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από δοθέν σκαληνό τρίγωνο ***και του οποίου η μία γωνία*** (στη συγκεκριμένη περίπτωση η Γ) ***είναι*** $\boldsymbol{60^o}$.

Αν θεωρήσουμε ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΔ (ΕΒ = ΕΔ), τότε, όπως αποδείξαμε προηγουμένως, (ΕΒΔ) > (ΓΒΔ) και η γωνία Ε του τριγώνου ΕΒΔ είναι 60^o γιατί είναι εγγεγραμμένη σε τόξο 120^o. Άρα το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο. ***Άρα το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου ΕΒΔ είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του σκαληνού τριγώνου ΓΒΔ*** (το οποίο έχει μια γωνία 60^o).



Το εμβαδόν του τριγώνου ΓΒΔ με τη σειρά του είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ. Και δεν υπάρχει τρίγωνο με εμβαδόν μεγαλύτερο από το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου ΕΒΔ.

Επομένως πράγματι το ισόπλευρο είναι το τρίγωνο μεγίστου εμβαδού.

Παρατηρήσεις

(1) Είναι επιλογή μας οι μαθητές να χρησιμοποιούν μόνον τετράδιο, μολύβι και γεωμετρικά όργανα και όχι υπολογιστή. Θέλουμε να κατασκευάζουν οι ίδιοι τα σχήματα για να αποκτούν συναίσθηση του γεγονότος ότι το **σχήμα *υποδεικνύει*** και ο **συλλογισμός *αποδεικνύει***.

(2) Μετά την ολοκλήρωση του προβλήματος γίνεται συζήτηση για την ύπαρξη τριγώνου, περιγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο, με ελάχιστο εμβαδόν[30], όπως επίσης και ότι αντίστοιχα προβλήματα υπάρχουν για τις περιμέτρους των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων τριγώνων. Πιο συγκεκριμένα ισχύουν τα εξής:

(α) Από όλα τα τρίγωνα τα εγγεγραμμένα σε κύκλο, το ισόπλευρο έχει το μέγιστο εμβαδόν και τη μέγιστη περίμετρο.

(β) Από όλα τα τρίγωνα τα περιγεγραμμένα σε κύκλο, το ισόπλευρο έχει το ελάχιστο εμβαδόν και την ελάχιστη περίμετρο.

Συμπεράσματα – Γενικεύσεις

1. Η σχέση εμβαδού – περιμέτρου μπορεί να είναι εν γένει θετική ή αρνητική. Η εγγραφή σε κύκλο ή αντιστοίχως η περιγραφή περί κύκλο εξασφαλίζει το ότι η σχέση αυτή είναι θετική. Υπάρχει όμως ένας **δυϊσμός**: Στην **εγγραφή** έχουμε **μέγιστο εμβαδόν – μέγιστη περίμετρο**, ενώ στην **περιγραφή** έχουμε **ελάχιστο εμβαδόν – ελάχιστη περίμετρο**.
2. Η πρόταση γενικεύεται για οποιοδήποτε ν-γωνο. Από όλα τα πολύγωνα τα περιγεγραμμένα περί κύκλο τα κανονικά έχουν το ελάχιστο εμβαδόν (και τη μικρότερη περίμετρο) και από όλα τα πολύγωνα τα εγγεγραμμένα σε κύκλο τα κανονικά έχουν το μέγιστο εμβαδόν (και τη μέγιστη περίμετρο).

Προεκτάσεις

1. Εν συνδυασμώ με το ότι από όλα τα εγγεγραμμένα σε κύκλο πολύγωνα τα κανονικά έχουν μέγιστο εμβαδόν (και τη μέγιστη περίμετρο) ενώ από όλα τα περιγεγραμμένα σε κύκλο πολύγωνα τα κανονικά έχουν ελάχιστο εμβαδόν (και την ελάχιστη περίμετρο) έχουμε έναν τρόπο να προσεγγίσουμε το εμβαδόν και το μήκος της περιφερείας του κύκλου. Αυτό ακριβώς έκανε ο Αρχιμήδης.
2. Ο διπλασιασμός του αριθμού των πλευρών οδηγεί σε κανονικό (περιγεγραμμένο) πολύγωνο που έχει μικρότερο εμβαδόν και μικρότερη περίμετρο και σε κανονικό (εγγεγραμμένο) πολύγωνο που έχει μεγαλύτερο εμβαδόν και μεγαλύτερη περίμετρο.

[30] Η διαπραγμάτευση του προβλήματος αυτού είναι αρκετά δυσκολότερη και βρίσκεται πέραν του σκοπού της συγκεκριμένης δραστηριότητας.

3. Αν ν είναι ο αριθμός των πλευρών του κανονικού πολυγώνου παρατηρούμε ότι όταν $\nu \to +\infty$ τότε και $2\nu \to +\infty$, οπότε η περίμετρος P_ν και το εμβαδόν E_ν τείνουν στην περίμετρο και το εμβαδόν του κύκλου αντιστοίχως, για τα περιγεγραμμένα από μεγαλύτερες και για τα εγγεγραμμένα από μικρότερες τιμές.
4. Προκύπτει κατά φυσικό τρόπο η έννοια των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών.

Παράρτημα

Ιστορικά στοιχεία γενικά για μέγιστα και ελάχιστα.
Το πρόβλημα της Διδούς

«*Αγόρασαν τόση γη – και την ονόμασαν Βύρσα – όση μπορούσε να κυκλωθεί με τη δορά ενός ταύρου*».

Βιργιλίου Αινειάδα

Στην Αινειάδα του Βιργιλίου αναφέρεται ότι η Διδώ, αναζητώντας άσυλο από την καταδίωξη του αδελφού της, καταφθάνει στον κόλπο της Τύνιδας. Εκεί διαπραγματεύεται με τον τοπικό ηγεμόνα Ιάρβα την παραχώρηση εκτάσεως γης, τόσης, όση μπορεί να ***κυκλώσει*** η δορά ενός ταύρου. Όταν ο Ιάρβας δέχεται, η Διδώ κατατεμαχίζει το τομάρι του ταύρου (την *βύρσα*) σε λεπτές λωρίδες, τις δένει μεταξύ τους και ***κυκλώνει*** μια μεγάλη έκταση γης.

Ο μύθος αυτός εμφανίζεται αυτούσιος ως προς την ουσία του και στην περίπτωση του κάστρου του Αλαμούτ, και θέτει το ίδιο ακριβώς πρόβλημα:

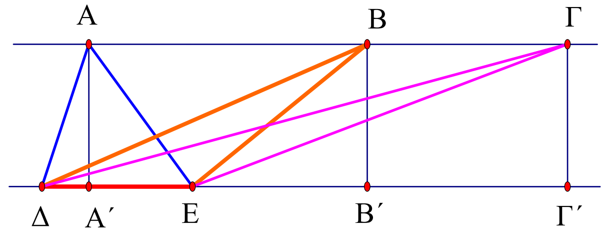
Μεταξύ όλων των κλειστών επιπέδων καμπυλών με δεδομένο μήκος να βρεθεί εκείνη, η οποία περικλείει το χωρίο με το μέγιστο εμβαδόν.

Αποδεικνύεται ότι η καμπύλη που αποτελεί τη λύση του προβλήματος της Διδούς είναι ο κύκλος και φαίνεται ότι η Διδώ διαισθανόταν τη λύση του προβλήματος, αφού ζήτησε να ***κυκλώσει.***

Βλέπουμε λοιπόν ότι τα προβλήματα μεγίστων – αλλά και ελαχίστων αντιστοίχως – απασχόλησαν τους ανθρώπους από αρχαιοτάτων χρόνων.

Στην αρχαιότητα ο τρόπος για την εκτίμηση του μεγέθους του εμβαδού ενός χωρίου αναγόταν στην εκτίμηση του μεγέθους της περιμέτρου του, όπως φαίνεται από τη μελέτη των ιστορικών στοιχείων:

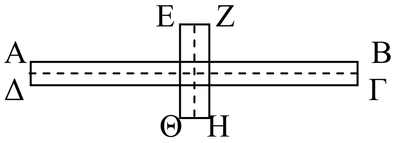
1. Ο Πρόκλος αναφέρει[31] ότι μέχρι τον 5^{o} αιώνα μ.Χ.:
   (α) Οι χωρογράφοι (αυτοί που καταμετρούν χώρες) συνεπέραναν το μέγεθος των πόλεων από τις περιμέτρους τους.
   (β) Αυτοί που μοιράζονταν κτήματα εξαπατούσαν πολλές φορές τους άλλους δίνοντάς τους έκταση με μεγαλύτερη περίμετρο και μικρότερο εμβαδόν. Χαρακτηριστικό στην περίπτωση αυτή είναι το παράδειγμα του τριγώνου με πλευρές μήκους ΑΒ = ΑΓ = 5 και ΒΓ = 8, το οποίο έχει μεγαλύτερη περίμετρο, αλλά ίσο εμβαδόν με το τρίγωνο με πλευρές μήκους ΑΒ = ΑΓ = 5 και ΒΓ = 6 και μικρότερο εμβαδόν από το τρίγωνο με πλευρές μήκους ΑΒ = ΑΓ = 5 και ΒΓ $= 5\sqrt{2}$.



[31] Πρόκλου, *Σχόλια εις το πρώτον των Ευκλείδους Στοιχείων*, 403, 1 – 404, 26.

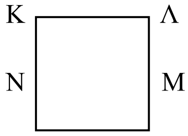
(γ) Υπάρχει και ένα παράδοξο, το οποίο σχετίζεται με την ύπαρξη του απείρου: και την κορυφή τους στην άλλη παράλληλο, έχουν ίσα εμβαδά (γιατί έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη) δηλαδή το εμβαδόν διατηρείται σταθερό ενώ, καθώς η κορυφή απομακρύνεται, η περίμετρος αυξάνει και τείνει στο άπειρο.

2. Ο Θουκυδίδης εκτιμούσε το μέγεθος της Σικελίας από το χρόνο που χρειαζόταν για τον περίπλου της.
3. Χαρακτηριστικό είναι και το παράδειγμα της ατόλλης, σχήματος σταυρού, όπως στο παρακάτω σχήμα:



Όσο οι διαστάσεις ΑΒ και ΕΘ μεγαλώνουν και οι διαστάσεις ΑΔ και ΕΖ μικραίνουν η περίμετρος τείνει στο άπειρο, ενώ το εμβαδόν στο μηδέν.

Ούτως ή άλλως η ατόλλη αυτή έχει μεγαλύτερη περίμετρο από ένα τετράγωνο πλευράς ΚΛ = ΕΘ, ενώ το εμβαδόν της γίνεται μικρότερο από το εμβαδόν του τετραγώνου, καθώς η διάσταση x = ΕΖ = ΑΔ μικραίνει:



Περίμετρος ατόλλης = 2ΑΒ + 2ΕΘ

Περίμετρος τετραγώνου = 4ΕΖ < 2ΑΒ + 2ΕΖ, αφού ΕΖ < ΑΒ.

Εμβαδόν τετραγώνου = $ΕΘ^2$ = σταθερό.

Οι αρχαίοι μαθηματικοί πάντως είχαν ασχοληθεί αρκετά με τα προβλήματα μεγίστου ελαχίστου.

Ο Αρχιμήδης, προσπαθώντας να υπολογίσει το εμβαδόν και το μήκος περιφερείας κύκλου, αναζήτησε τα ευθύγραμμα σχήματα τα εγγεγραμμένα σε κύκλο με μέγιστο εμβαδόν και τα περιγεγραμμένα σε κύκλο με ελάχιστο εμβαδόν.

Ο Θέων ο Αλεξανδρεύς διασώζει, στα σχόλιά του στο πρώτο βιβλίο του *Πτολεμαίου Σύνταξις*, κάποιες προτάσεις από το σύγγραμμα του Ζηνοδώρου *Περί ισομέτρων σχημάτων*.

Ο Πάππος διατυπώνει ανάλογες προτάσεις με αποδείξεις παρόμοιες με αυτές του Ζηνοδώρου.

Οι πιο σημαντικές προτάσεις που απέδειξαν οι Ζηνόδωρος και Πάππος είναι:

1. Από όλα τα ισοπεριμετρικά κανονικά πολύγωνα μεγαλύτερη περίμετρο έχει εκείνο που έχει περισσότερες γωνίες.
2. Το εμβαδόν του κύκλου είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν πολυγώνου που έχει περίμετρο ίση με το μήκος της περιφερείας του κύκλου.
3. Από όλα τα ισοπεριμετρικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το ισόπλευρο και ισογώνιο (δηλαδή το κανονικό).

Βιβλιογραφία

1. Χρ. Στράντζαλου, Σημειώσεις παραδόσεων από το μάθημα «Θέματα Ειδικής Διδακτικής», χειμερινό εξάμηνο 2000-2001.
2. V.M. Tikhomirov, Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα, Εκδόσεις κάτοπτρο, 1999.
3. Sir Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics*, Dover Publications, Inc. New York, 1981.
4. Πρόκλου Διαδόχου, *Σχόλια εις το πρώτον των Ευκλείδους Στοιχείων*, Θησαυρός της ελληνικής γλώσσας, Ηλεκτρονική Βιβλιοθήκη MUSAIOS.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Ε Ν Δ Ι Α Μ Ε Σ Η Σ Τ Ι Μ Η Σ :Μ Ι Α Δ Ι Δ Α Κ Τ Ι Κ Η Π Ρ Ο Τ Α Σ Η

Καπετανάς Ελευθέριος, καθηγητής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (2ο Ενιαίο Λύκειο Παπάγου) Master of Education Παν/ου Αθηνών. e-mail: ekapetan@math.uoa.gr

Ε ι σ α γ ω γ ή

Η εργασία αυτή αποτελεί μια διδακτική πρόταση για τη διδασκαλία στο λύκειο ενός από τα πιο βασικά και δομικά θεωρήματα της Ανάλυσης, που διδάσκονται στο Ενιαίο Λύκειο και συγκεκριμένα στη Θετική και Τεχνολογική κατεύθυνση, του ***θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής.*** Η διδακτική αυτή πρόταση στηρίζεται πάνω στη φιλοσοφία των σύγχρονων διδακτικών μοντέλων ενεργητικής μάθησης, που έχουν σαν υπόβαθρο την θεωρία **κατασκευής της γνώσης(Constructivism)** του Von Glaserfeld(1975),που είναι συνέχεια της Γενετικής Επιστημολογίας του μεγάλου Ελβετού ερευνητή και παιδαγωγού J. Piaget. Η σημασία της εργασίας αυτής έγκειται στο ότι δίνει έναν αποτελεσματικό, κατά την άποψή μου, τρόπο διδακτικής προσέγγισης του θέματος, που μπορεί ν' αποτελέσει υπόδειγμα ανάλογης προσέγγισης και άλλων θεμελιωδών και δομικών θεωρημάτων της Ανάλυσης.

1. Το π α ρ α δ ο σ ι α κ ό δ ι δ α κ τ ι κ ό μ ο ν τ έ λ ο

Είναι γνωστό ότι το Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα διακατέχεται κυρίως από τις δασκαλοκεντρικές θεωρίες μάθησης, που έχουν παγιώσει στην εκπαιδευτική πρακτική το **παραδοσιακό μοντέλο μάθησης .** Στο μοντέλο αυτό ο δάσκαλος βρίσκεται στο επίκεντρο της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Είναι αυτός **,** που ως μοναδικός φορέας γνώσης και ως αυθεντία στην τάξη ,έχει σαν στόχο να ***μεταφέρει την έτοιμη γνώση που άλλοι βρήκαν*** στον αδύναμο και αδαή μαθητή που παρακολουθεί τα τεκταινόμενα σχεδόν παθητικά στην τάξη. Την καινούργια γνώση οφείλει να εμπεδώσει με επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων και να την αναπαράγει.

Η διδακτική αυτή πραγματικότητα έχει τις παρακάτω αρνητικές συνέπειες **:**

Α. Ο μαθητής με τη πάροδο του χρόνου χάνει το ενδιαφέρον του για τα μαθηματικά, αφού αναγκάζεται να μάθει και να αφομοιώσει πληροφορίες που πολλές φορές είναι έξω από τον κύκλο των ενδιαφερόντων του, μιας και αυτός δεν συμμετέχει στην διαδικασία της ***επανανακάλυψής τους και δεν είναι άμεσα ορατό το πού θα μπορούσε να τις χρησιμοποιήσει .***Η μείωση αυτή του ενδιαφέροντος πιστοποιείται σε εν εξελίξει έρευνά μου στα πλαίσια διδακτορικής διατριβής.Το ενδιαφέρον και η αγάπη των μαθητών για τα μαθ/κά έχει **φθίνουσα πορεία από το Δημοτικό, στο Γυμνάσιο και τέλος στο Λύκειο.**

Β. Ο μαθητής, μη συμμετέχοντας στην ανακάλυψη και κατασκευή της γνώσης **, στερείται από την ευκαιρία να γίνει ένας «δυνάμει» ερευνητής**, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να εμβαθύνει στις έννοιες και να μειώνονται οι πιθανότητες να μπει αργότερα στη διαδικασία της ανακάλυψης και της έρευνας.

Γ. Δεν μπορούν να επιτευχθούν οι στόχοι της διδασκαλίας των μαθηματικών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση , όπως αυτοί καθορίζονται από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο και αναφέρονται στο βιβλίο «Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθημάτων στο Γυμνάσιο και το Λύκειο τεύχος Β΄,Μαθηματικά».Συγκεκριμένα οι δύο πρώτοι από τους γενικούς σκοπούς της διδασκαλίας των μαθ/κών στο λύκειο είναι **:**

α. Η μεθοδική άσκηση του μαθητή στην ορθολογική σκέψη, στην ανάλυση στην αφαίρεση, στη γενίκευση στην εφαρμογή, στην κριτική σκέψη και στις λογικές διεργασίες, καθώς και η μύηση στη μαθηματική αποδεικτική διαδικασία.
β. Η γενικότερη πνευματική καλλιέργεια και η συμβολή στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή, καθόσον τα μαθηματικά αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή ,την δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, την πειθαρχημένη σκέψη και συμπεριφορά ,καλλιεργούν το αίσθημα του ωραίου και του ηθικού και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα.

2. Το νέο διδακτικό μοντέλο

Σε αντίθεση με το παραδοσιακό διδακτικό μοντέλο το νέο ή σύγχρονο διδακτικό μοντέλο αναθεωρεί τη θέση δασκάλου – μαθητή, δίνοντας στον μαθητή **ενεργητικό** ρόλο**.** Ο μαθητής, από παθητικός δέκτης γίνεται ενεργητικός. Καθοδηγούμενος από τον καθηγητή του οδηγείται στην κατασκευή και κατάκτηση της γνώσης, αφού σύμφωνα με την βασική κονστρουκτιβιστική αρχή ***«ο ενήλικας δεν μπορεί να προκαλέσει στο παιδί εμπειρίες διαμέσου των δικών του εμπειριών»(*** **Cobb & Steffe 1983).**Κατά τους Varela et al(1991) «***ο δάσκαλος δίνει τις ευκαιρίες στον μαθητή για μαθηματικές δραστηριότητες, αλλά εξαρτάται από τον ίδιο τον μαθητή να οικοδομήσει τη δική του γνώση μέσα από αυτές τις δραστηριότητες».***
Ο καθηγητής σχεδιάζει κατάλληλες ***διδακτικές καταστάσεις***, σύμφωνα με τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων, με στόχο μέσα από αυτές να οδηγηθεί ο μαθητής *στον σχηματισμό εικασίας , διατύπωση της νέας θεωρίας ,τη θεσμοποίηση μέσω της απόδειξης, την εμπέδωση και την αφομοίωση* .**Διδακτική κατάσταση** κατά τον Balacheff(1984,1989) είναι «*ένα σύνολο σχέσεων που εγκαθίσταται ανάμεσα σε ένα μαθητή ή ένα σύνολο μαθητών ,σε ένα περιβάλλον(που περιέχει, ενδεχομένως, διδακτικά όργανα ή άλλο διδακτικό υλικό) και στο δάσκαλο, με σκοπό τη μάθηση κάποιας γνώσης»*
Η υιοθέτηση από μέρους του διδάσκοντα του νέου διδακτικού μοντέλου, το οποίο βασίζεται σε ενεργητικές μεθόδους μάθησης θα έχει ευεργετικά αποτελέσματα στην εκπαίδευση γενικότερα και στη μαθηματική παιδεία ειδικότερα, αφού αναμένεται ότι:
Α. Θα αυξήσει την αγάπη και το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά, με συνέπεια την καλύτερη κατανόηση των εννοιών, την καλλιέργεια του νου και την ανάπτυξη δεξιοτήτων, απαραίτητων για τη ζωή και την μελλοντική επιστημονική εξέλιξή τους.
Β. Θα κάνει τη ζωή των μαθητών πιο ευχάριστη στην τάξη και θα βοηθήσει τους μαθητές να γίνουν πιο κοινωνικοί, να αναπτύξουν το πνεύμα συνεργασίας ,να ασκηθούν στον δημοκρατικό διάλογο, μέσα από την συνεργατικότητα που απαιτεί η ενασχόληση των μαθητών με τις δραστηριότητες που συνεπάγονται οι διάφορες διδακτικές καταστάσεις , με τις οποίες βρίσκονται αντιμέτωποι οι μαθητές στην τάξη, εργαζόμενοι συνήθως σε ολιγομελείς ομάδες. Έτσι θα αναδειχθεί και ο κοινωνικός χαρακτήρας της μαθηματικής παιδείας.
Γ. Θα συμβάλλει στο να γίνουν τα σχολεία «εκκολαπτήρια» μικρών ερευνητών, με μελλοντικές προσδοκίες.
Δ. Θα συμβάλλει στην σε μεγαλύτερο βαθμό επίτευξη των γενικών και ειδικών στόχων της διδασκαλίας των μαθηματικών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, όπως αυτές καθορίζονται από τη Πολιτεία.

3. Μια διδακτική πρόταση

Στα πλαίσια των διδακτικών αρχών, που στηρίζονται τα σύγχρονα μοντέλα διδασκαλίας αναπτύσσεται παρακάτω μια διδακτική πρόταση για το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, για την Τρίτη τάξη θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης του λυκείου.

3.1. Διδακτικοί στόχοι

1.Να βοηθηθούν οι μαθητές να αναπτύξουν μια υπόθεση-εικασία για το τι λέει το θεώρημα.
2.Να καθοδηγηθούν σε μια γεωμετρική – εποπτική αρχικά δικαιολόγηση του θεωρήματος.
3.Να οδηγηθούν στην αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος.
4.Να εμπεδώσουν και αφομοιώσουν το θεώρημα, μέσα από κατάλληλες εφαρμογές.

3.2. Σχεδιασμός της διδασκαλίας

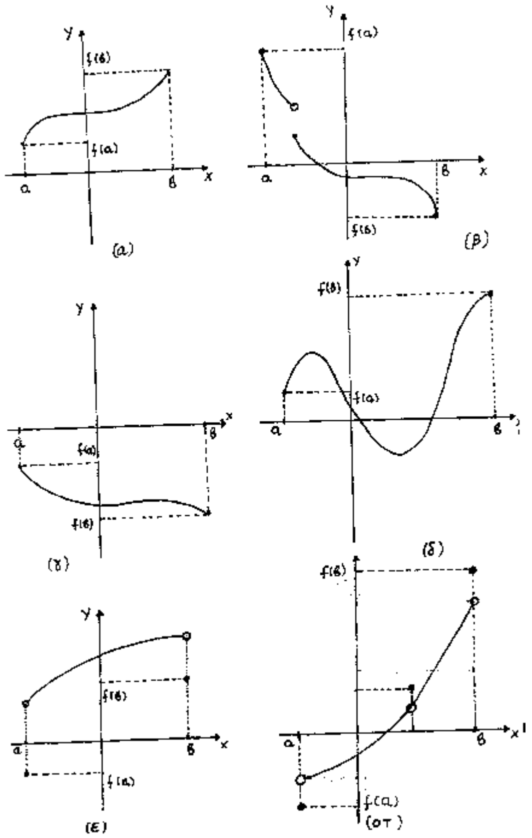
Δίνεται στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας, με τη βοήθεια του οποίου συμμετέχουν στις ακόλουθες δραστηριότητες:Στη **πρώτη δραστηριότητα** δίνονται στους μαθητές διάφορες γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και ζητείται μέσα απ΄ τη μελέτη τους να προσπαθήσουν να διατυπώσουν κάποια **εικασία** για κάποιο θεώρημα που διαφαίνεται να ισχύει .Στη συνέχεια διατυπώνεται από τον διδάσκοντα το θεώρημα **ενδιαμέσων τιμών** και ζητείται από τους μαθητές να συγκρίνουν την ***εικασία που διατύπωσαν με την αυστηρή μαθηματική διατύπωση του θεωρήματος.***
Στη δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές καθοδηγούνται να κάνουν μια **γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος**, που διατυπώθηκε παραπάνω.
Στη τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές καθοδηγούνται να κάνουν την αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος, βασιζόμενοι στο θεώρημα του Bolzano.
Στη τέταρτη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να λύσουν διάφορες ασκήσεις, ώστε να κατανοήσουν το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, μέσα από την εφαρμογή του σε συγκεκριμένες ασκήσεις.
Η διδασκαλία αυτή σχεδιάσθηκε για να πραγματοποιηθεί μέσα **σε δύο συνεχόμενες διδακτικές ώρες.**

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Δραστηριότητα πρώτη.

1.Δίνονται οι παρακάτω καμπύλες που είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Για κάθε μία καμπύλη (i) **σχεδιάστε το ορθογώνιο, που ορίζεται από τις ευθείες** $x=a, x=\beta, y=f(a), y=f(\beta)$. **(ii) φέρτε ευθείες παράλληλες προς τον οριζόντιο άξονα** $\chi'\chi$ **.(iii) εξετάστε, για ποιες από τις καμπύλες υπάρχει πάντα ευθεία** παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα , **που ένα τμήμα της να βρίσκεται μέσα στο αντίστοιχο ορθογώνιο** και η οποία να **μη συναντά την γραφική παράσταση της συνάρτησης** c_f **και για ποιες δεν υπάρχει.**



(iv) Βάλτε σε κύκλο «ναι», ή «όχι» για κάθε περίπτωση:

(α) : ναι όχι.

(β) : ναι όχι.

(γ) : ναι όχι

(δ) : ναι όχι.

(ε) : ναι όχι

(στ) : ναι όχι

2.Για τις συναρτήσεις που απαντάτε **«ναι»** τι παρατηρείτε ως προς την **συνέχεια** , στα ***εσωτερικά*** σημεία του κλειστού διαστήματος $\left[a,\beta\right]$, καθώς και **στα άκρα α, β ;**

……………………………………………

……………………………………………

3.Για τις συναρτήσεις που απαντάτε **«όχι»** τι παρατηρείτε ως προς την **συνέχεια** , στα ***εσωτερικά*** σημεία του κλειστού διαστήματος $\left[a,\beta\right]$, καθώς και **στα άκρα α, β ;**

4.Αφού λάβετε υπόψη όλα τα παραπάνω προσπαθήστε να διατυπώσετε μια **εικασία**, για το θεώρημα, που διαφαίνεται να ισχύει.

……………………………………………………………………………………………

5.Συγκρίντε την εικασία που διατυπώσατε με την παρακάτω διατύπωση του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών:

Θεώρημα

Έστω η πραγματική συνάρτηση $f:\left[\alpha,\beta\right]\rightarrow R$, για την οποία υποθέτουμε ότι:

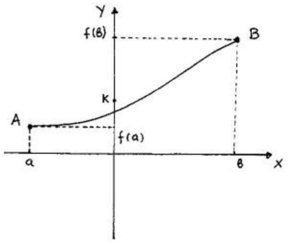
***(ι)Είναι συνεχής στο** $\left[\alpha,\beta\right]$*

***(ii)** $f(a)\neq f(\beta)$.*

***Τότε: Για κάθε κ που βρίσκεται μεταξύ των** $f(a), f(\beta)$ **, υπάρχει** $\eta\in\left(\alpha,\beta\right):\ f(\eta)=\kappa$.*

Δραστηριότητα δεύτερη: Γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος.

1.*Έστω ότι ισχύει:* $f(a)<f(\beta)$ *και η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.*



(α) *Θεωρείστε πραγματικό αριθμό κ: $f(a)<k<f(\beta)$. Θέλετε να δείξετε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\eta\in\left(\alpha,\beta\right):\ f(\eta)=\kappa$,δηλαδή ότι η εξίσωση $f(x)=k$, έχει λύση. **(1)***

(β)*Βρείτε μια ισοδύναμη εξίσωση για την (1) της μορφής* $g(x)=0$

………………………………………………………………………………

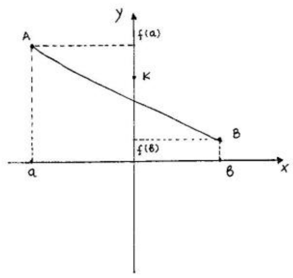
(γ) Παραστήστε *γραφικά στο παραπάνω σχήμα την συνάρτηση* g *.Τι παρατηρείτε;*

……………………………………………………………………………………

(δ)Επειδή $k > f(a)$, $f(a) - k < 0$, *οπότε κατά τη μεταφορά της* c_f *κατά* k *προς τα κάτω και παράλληλα προς τον άξονα* $y'y$ *,το σημείο A*..

(ε)Επειδή $k < f(\beta)$...,*οπότε κατά τη μεταφορά της* c_f *κατά* k *προς τα κάτω και παράλληλα προς τον* $y'y$, *το σημείο B*,..

Άρα η c_g...



2.Έστω ότι ισχύει: $f(a) > f(\beta)$ ***και η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.***

(α) *Θεωρείστε πραγματικό αριθμό* $k: f(\beta) < \kappa < f(a)$

Θέλετε να δείξτε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\eta \in (\alpha, \beta): f(\eta) = \kappa$ *,δηλαδή ότι η εξίσωση* $f(x) = k$, *έχει λύση. (**2**)*

(β) *Βρείτε μια ισοδύναμη εξίσωση για την (2) της μορφής* $g(x) = 0$.

....

(γ)Παραστήστε γραφικά στο παραπάνω σχήμα την συνάρτηση g *.Τι παρατηρείτε;*

....

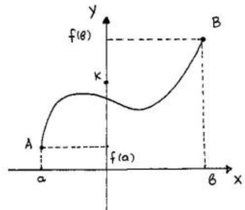
(δ)Επειδή $k < f(a)$,...

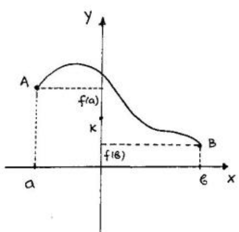
....

(ε)Επειδή
$k > f(\beta)$..

Άρα η c_g...

3. Έστω ότι η συνάρτηση f ***δεν έχει το ίδιο είδος μονοτονίας στο πεδίο ορισμού της .****Να επαναλάβετε τις ίδιες εργασίες που κάνατε στο 1 και 2.*





Δραστηριότητα τρίτη:Αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος.

Προσπαθήστε ,τώρα, να κάνετε την αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος

Έστω $f(a) < f(\beta)$ και αριθμός $k: f(a) < k < f(\beta)$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = k$,έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα (a, β).....................................

Δραστηριότητα τέταρτη:Εφαρμογές.

1.Έστω η συνάρτηση $f:[1,4] \to R$,συνεχής και γνησίως και γνησίως αύξουσα. Δείξτε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\eta \in (1,4)$,τέτοιο ώστε

$$f(\eta) = \frac{2f(2) + 3f(3)}{5}$$

Λύση…………………………………………………………………………………….

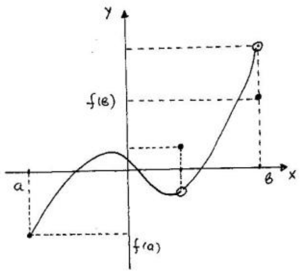
2.Έστω η συνάρτηση $f:[0,5]\to R$,συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Δείξτε ότι υπάρχει $\eta \in (0,5)$,τέτοιο ώστε $f(\eta)=\dfrac{f(1)+2f(2)+3f(3)+4f(4)}{10}$.

***Λύση*……………………………………………………………………………………..**

3.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=xe^x, x\in[-2,5]$ και $g(x)=1, x\in R.$ Δείξτε ότι υπάρχει σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο αυτών συναρτήσεων.

***Λύση*……………………………………………………………………………………**

4. Δίνεται η παρακάτω γραφική παράσταση συνάρτησης .Με τη βοήθεια του διαγράμματος αυτού, εξετάστε αν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών.



Επίλογος

Η παραπάνω διδακτική πρόταση εφαρμόσθηκε στην τάξη σε τμήμα θετικής κατεύθυνσης κατά το σχολικό έτος 2004-2005 στο 2ο Ενιαίο Λύκειο Παπάγου. Η διδασκαλία έλαβε χώρα σε δύο διδακτικές ώρες, με μεσολάβηση πεντάλεπτου διαλείμματος. Οι παρατηρήσεις μου είναι οι ακόλουθες:

1.Όλοι οι μαθητές συμμετείχαν ενεργά στη διδακτική διαδικασία.

2.Οι μαθητές μπόρεσαν να φθάσουν στο σχηματισμό εικασίας αρκετά κοντά ή και ακριβώς μερικοί προς το ζητούμενο θεώρημα.

3.Οι περισσότεροι μαθητές μπόρεσαν να κάνουν την γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος.

4.Η γεωμετρική απόδειξη βοήθησε πολύ τους μαθητές να επινοήσουν την αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος.

5.Οι μαθητές απάντησαν σε σχετική ερώτηση του διδάσκοντα ότι τους άρεσε η εμπλοκή τους σε όλη αυτή τη διαδικασία.

Η διδασκαλία αυτή πρέπει να εφαρμοσθεί και σε άλλους μαθητές, ώστε να δοθεί η δυνατότητα βελτίωσής της και εξαγωγής συμπερασμάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1.Σημειώσεις Διδακτικής Μαθηματικών.Κλαουδάτος Νίκος, Παν/ο Αθηνών.
2.Οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για τη διδασκαλία των μαθηματικών.
3.Απειροστικός Λογισμός.Σ.Νεγρεπόντης-Σ.Γιωτόπουλος-Ε.Γιανακούλιας.
4.Θέματα Διδακτικής Απειροστικού Λογισμού,Παν/ο Αθηνών ,Αθήνα 1997.

Η ΧΡΗΣΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΑΠΟ ΤΗ ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΗ ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ: Η ΓΝΩΣΗ ΣΕ ΚΑΝΕΙ ΚΑΛΥΤΕΡΟ

Ζάχος Β. Ιωάννης, Καθηγητής Μαθηματικών του Ενιαίου Λυκείου της Βαρβακείου Σχολής

Εισαγωγή

Η άποψη ότι η διδασκαλία κάποιων στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων, όπως είναι για παράδειγμα αυτές οι οποίες προτάθηκαν από τον Polya (1973) συμβάλλουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών, έτυχε ευρείας αποδοχής από τους δασκάλους των μαθηματικών και στις τρεις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Ωστόσο, τα ερευνητικά αποτελεσματα δεν είναι τέτοια που να δικαιολογούν τον αρχικό ενθουσιασμό (Sweller & Cooper, 1985). Άλλες διδακτικές προσεγγίσεις οι οποίες είναι βασισμένες στην απόκτηση γνώσης, φαίνεται να έχουν καλύτερα αποτελέσματα στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.

Στις επόμενες παραγράφους αναπτύσσεται αυτό το επιχείρημα διεξοδικά.
Μέσα από ένα παράδειγμα – μια διδακτική δραστηριότητα - που παρατίθεται στο επόμενο τμήμα της εργασίας θα επιχειρήσω πρώτα, να σας μεταφέρω την αίσθηση που έχω αποκομίσει ως εκπαιδευτικός, για τον καθοριστικό ρόλο της γνώσης στην ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας .

Στη συνέχεια θα γίνει αναφορά σε συμπεράσματα σημαντικών ερευνών της γνωστικής ψυχολογίας που καταδεικνύουν το καθοριστικό ρόλο της γνώσης στην ανάπτυξη ειδίκευσης σε ένα τομέα γνώσεων.

Τέλος, στο τρίτο μέρος, προτείνονται συγκεκριμένα διδακτικά εργαλεία με στόχο την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Τα διδακτικά αυτά εργαλεία, τα οποία παρουσιάζονται στο τελευταίο τμήμα με τη βοήθεια παραδειγμάτων, είναι προϊόντα μακροχρόνιων ερευνών οι οποίες έχουν πραγματοποιηθεί στο χώρο της γνωστικής ψυχολογίας.

I. Γνώσεις ή Στρατηγικές Επίλυσης; Τα Πράγματα Μπορεί να μην Είναι όπως Φαίνονται

Η διδακτική δραστηριότητα για την οποία γίνεται λόγος σε αυτό το τμήμα της εργασίας προέρχεται από μαθήματα που πραγματοποιήθηκαν στα πλαίσια της Πρόσθετης Διδακτικής Στήριξης στο Βαρβάκειο Λύκειο. Τα μαθήματα αυτά οργανώνονται αρκετά χρόνια τώρα και απευθύνονται σε μαθητές της Α΄ Λυκείου με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Τα προβλήματα που συζητώνται στη διάρκεια των μαθημάτων αυτών είναι ιδιαίτερα απαιτητικά για τους μαθητές. Σε τέτοιου είδους προβλήματα η ανάγκη για γνώση κάποιων ειδικών κανόνων και τεχνικών είναι πολύ μεγάλη. Πολλά από τα προβλήματα αυτά προέρχονται από διάφορους διαγωνισμούς μαθηματικών ανά τον κόσμο. Δουλεύοντας με τους μαθητές αυτούς πάνω σε τέτοια προβλήματα, αποκομίζει κανείς την αίσθηση ότι, αν ένας μαθητής δεν κατέχει τον συγκεκριμένο κανόνα ή την τεχνική που «ξεκλειδώνει» το πρόβλημα, οι πιθανότητες να το λύσει μόνος του είναι πολύ περιορισμένες. Ο Πίνακας 1 εμφανίζει δύο προβλήματα με το ίδιο ζητούμενο καθώς και την τεχνική (ή κανόνα) που απαιτείται για τη λύση τους.

Πίνακας 1

Πρόβλημα 1

Να δείξετε ότι ο αριθμός

$A = \sqrt{2002^{2001} + 2003^{2004}}$ *δεν είναι ρητός*

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$A = \sqrt{\beta^2 + 3\beta + 1}$, $\beta \in \mathrm{N}^*$ *δεν είναι ρητός (Διαγ. ΕΜΕ, 1992)*

Απαιτούμενη γνώση υπό μορφή κανόνα

«Κανένα τετράγωνο ακεραίου δεν τελειώνει σε 2, 3, 7, 8»

Αν ένας ακέραιος βρίσκεται μεταξύ των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων, δεν είναι τετράγωνο ακεραίου.»

Στη σειρά αυτή των μαθημάτων, έχω πραγματοποιήσει μια σημαντική στροφή όσον αφορά στο «κέντρο βάρους» της διδασκαλίας στα τμήματα αυτά. Το «κέντρο βάρους» της διδασκαλίας έχει μετατοπιστεί από τη χρήση στρατηγικών για τη λύση προβλημάτων, προς την διδασκαλία κάποιας συγκεκριμένης ύλης υπό μορφή κανόνων και τεχνικών.

Η μετατόπιση αυτή του «κέντρου βάρους» δικαιολογείται και από τα ερευνητικά δεδομένα σχετικά με την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας στη χρήση στρατηγικών. Διαφαίνεται, ότι η εμμονή στη χρήση στρατηγικών, όπως αυτές που εισηγήθηκε ο Polya (1973), δεν δικαιολογείται από τα αποτελέσματα σχετικών ερευνών (Sweller & Cooper, 1985). Επιπλέον, όπως επισημαίνουν ερευνητές που έχουν πειραματιστεί με τα οφέλη από τη χρήση στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων (π.χ. Schoenfeld, 1985) αυτές, στην πλειοψηφία τους, είναι τόσο προφανείς, που δεν αποτελούν παρά στοιχείο του «κοινού νου».

Το επόμενο πρόβλημα καθώς και το απόσπασμα που ακολουθεί στον Πίνακα 2 είναι μέρος διαλόγου, που διεξήχθη κατά τη διάρκεια ενός εναρκτήριου μαθήματος, στα πλαίσια της ανάπτυξης ειδίκευσης στη λύση μαθηματικών προβημάτων. Από το απόσπασμα φαίνεται ότι αυτό που προτείνει η μαθήτρια, δεν είναι τίποτε άλλο παρά η χρήση της στρατηγικής των ενδιαμεσων υποσκοπών, η οποία επιτρέπει να πλησιάσουμε στη λύση του αρχικού προβλήματος μέσω της επίλυσης ενός ενδιάμεσου απλούστερου προβλήματος. Ωστόσο, το πρόβλημα τελικά δεν λύθηκε από τους μαθητές, παρά τις προσπάθειες που κατέβαλαν και παρά το γεγονός ότι έκαναν χρήση μιας ισχυρής στρατηγικής, όπως είναι η ανάλυση προβλήματος σε απλούστερα με τη χρήση υποσκοπών.

Η λύση του προβλήματος κατέστη δυνατή, μονον όταν συζητήθηκε ο κατάλληλος κανόνας: «ομαδοποίησε τις δυνάμεις με τρόπο ώστε το τελευταίο ψηφίο να παραμένει αναλλοίωτο». Σύμφωνα με τον κανόνα αυτό, ενδείκνυται η γραφή του 2^{1000} στη μορφή $(2^4)^{250}$, αφού $2^4 = 16$ και οι αριθμοί που τελειώνουν σε 6 πολλαπλασιαζόμενοι με αριθμούς που τελειώνουν επίσης σε 6, έχουν ως αποτέλεσμα αριθμούς που τελειώνουν σε 6.

Πίνακας 2

Πρόβλημα. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του 2^{1000}.

.... *(χρόνος για σκέψη και να αφομοιώσουν το πρόβλημα)*

***Καθ.**. Ο εκθέτης του 2 είναι πολύ μεγάλος θα μπορούσαμε να κάνουμε κάτι γι' αυτό;*
(Μια μαθήτρια πρότεινε να το γράψουμε $2^{100}.2^{100}...2^{100.}$)........
***Καθ**. Δοκιμάστε να υπολογίσετε μερικές δυνάμεις του 2, μήπως βρείτε κάποιο κανόνα για τον τρόπο που μεταβάλλονται....*
***Μαθ**. Να το σπάσουμε κι' άλλο (το 2^{100}), ...όμως πάλι οι παράγοντες θα είναι πολλοί.*
....
(Η επόμενη ερώτηση διατυπώθηκε στην προσπάθεια μου να τους βοηθήσω περισσότερο προς την κατεύθυνση της περιοδικότητας των δυνάμεων...)
***Καθ.** Το 2^{1000} μπορεί να τελειώνει σε μονό αριθμό π.χ. 1, 3, 5 κλπ.;*
....
***Καθ**. Από τον πολλαπλασιασμό ποιών ψηφίων προκύπτει το τελευταίο ψηφίο του γινομένου δύο αριθμών;*
....
***Καθ.** Υπάρχουν ψηφία τα οποία όταν πολλαπλασιάζονται με τον εαυτό τους παραμένουν «αναλλοίωτα»........*
***Καθ**. Όπως βλέπετε το 1x1, 5x5, 6x6 δίνουν ως αποτέλεσμα αριθμό που τελειώνει σε 1, 5, 6 αντίστοιχα, δηλαδή το τελευταίο ψηφίο δεν αλλάζει. Παραμένει, όπως λέμε αναλλοίωτο ...*

Στη συνέχεια συζητήθηκε και ο εναλλακτικός τρόπος λύσης μέσω της περιοδιοκότητας που παρουσιάζει το τελευταία ψηφίο των δυνάμεων του 2.

Όταν, στη συνέχεια κλήθηκαν να απαντησουν στο πρόβλημα: " ποιό είναι το τελευταίο ψηφίο 3^{1000}" εύκολα βρήκαν την απάντηση είτε γράφοντας το ως $(3^4)^{250}$ είτε παρατηρώντας την περιοδικότητα στο τελευταίο ψηφίο των δυνάμεων του 3.

Βέβαια, από παιδαγωγικής πλευράς, η προσέγγιση που βοηθάει τους μαθητές να ανακαλύψουν οι ίδιοι τη λύση ή τη γνώση που απαιτείται για τη λύση ενός προβλήματος, φαίνεται ιδιαίτερα ελκυστική. Ωστόσο, η ανακαλυπτική μέθοδος παρουσιάζει αρκετά μειονεκτήματα. Ένα από τα μειονεκτήματα της είναι ότι είναι χρονοβόρα και επιπλέον, όπως έχουν δείξει σχετικές έρευνες, η μέθοδος της ανακάλυψης δεν βοηθάει τους αδύνατους μαθητές (π.χ. Snow & Yallow, 1982). Αντίθετα, όπως υποστηρίζουν οι ερευνητές αυτοί, στην περίπτωση των αδύνατων μαθητών, φαίνεται ότι η καλύτερη μέθοδος είναι η βήμα προς βήμα παρουσίαση της ύλης.

Επιπλέον, όσον αφορά στη χρήση γενικών στρατηγικών (όπως για παράδειγμα οι στρατηγικές που έχουν προταθεί από τον Polya) για την επίλυση προβλημάτων, φαίνεται ότι αυτές προσιδιάζουν στον κοινό νου. Μοιάζουν αυτονόητες. Και όπως επισημαίνει ο Schoenfeld (1985), παρά το γεγονός ότι κανείς από τους έμπειρους μαθηματικούς με κάποια ηλικία δεν διδάχθηκε μεθόδους λύσεις προβλήματος, παρ' όλα αυτά, οι μαθηματικοί αυτοί, χρησιμοποιούν τέτοιες στρατηγικές αν παραστεί ανάγκη. Αντιθέτως, φαινεται ότι η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων βελτιώνεται σημαντικά με τη χρήση ειδικών στρατηγικών σχετικών με ένα τμήμα της ύλης (π.χ. Schoenfeld, 1985). Αυτές οι ειδικές στρατηγικές, οι οποίες είναι άμεσα συνδεδεμένες με ένα τμήμα της ύλης (domain specific strategies), δεν είναι τίποτα άλλο παρά τεχνικές υπό τη μορφή κανόνων που επιτρέπουν τη διαδικασιοποίηση της γνώσης.

Λαμβάνοντας υπόψη τις επισημάνσεις αυτές, είναι φυσικό να διερωτηθεί κανείς: ***Μήπως τελικά η υψηλή επίδοση και κατ΄ επέκταση η ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης δεν είναι θέμα απόκτησης κάποιων γενικών στρατηγικών αλλά κατοχής γνώσης; Έχει αναρωτηθεί κανείς ότι όταν προσπαθούμε να διδάξουμε στους μαθητές στρατηγικές επίλυσης και ανακάλυψης στην πραγματικότητα επιχειρούμε να διδάξουμε στους μαθητές τον «κοινό νού», δηλαδή το αυτονόητο; Μήπως τελικά η απόκτηση γνώσεων είναι η μόνη προϋπόθεση για τη χρήση κάποιων γενικών στρατηγικών επίλυσης προβλήματος;***

Με σκοπό να αναζητήσουμε απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα, θα ανατρέξουμε σε πολύ σημαντικές έρευνες της γνωστικής ψυχολογίας σχετικά με το τι συνιστά υψηλή ειδίκευση σε ένα γνωστικό πεδίο και πως αυτή επιτυγχάνεται καλύτερα.

II. Αντλώντας Επιχειρήματα από τη Γνωστική Ψυχολογία

Για αρκετές δεκαετίες η γνωστική ψυχολογία έχει συμβάλλει στη μελέτη του φαινομένου της μάθησης με τουλάχιστον δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος είναι η ανάπτυξη ενός εννοιολογικού συστήματος, όπως είναι για παράδειγμα οι έννοιες της βραχύχρονης μνήμης, της μακρόχρονης μνήμης, οι στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων κλπ. - το οποίο επέτρεψε τη μελέτη των φαινομένων της μάθησης από μια διαφορετική οπτική γωνία. Το εντυπωσιακό στην περίπτωση αυτή είναι ότι έννοιες όπως η βραχύχρονη μνήμη ή η ανάπτυξη των διαφόρων δεξιοτήτων δεν είναι θεωρητικά κατασκευάσματα, αλλά λειτουργίες οι οποίες σχετίζονται άμεσα με συγκεκριμένες περιοχές του εγκεφάλου, όπως καταδεικνύουν νεώτερες έρευνες της νευροφυσιολογίας (π.χ. η βραχύχρονη μνήμη εδράζεται στον κροταφιαίο λοβό). Ο δεύτερος τρόπος με τον οποίο η γνωστική ψυχολογία έχει συμβάλλει στην εκπαίδευση είναι ότι έχει δημιουργηθεί μια βάση ερευνητικών δεδομένων, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη βελτίωση της διδασκαλίας. Ιδιαίτερα την τελευταία εικοσαετία έχει σημειωθεί τόσο μεγάλη πρόοδος σε ορισμένους τομείς της, ώστε να μπορούμε να μιλάμε για «γνωστική τεχνολογία», δηλαδή, για μεθόδους και πρακτικές, που απορρέουν από τα συμπεράσματα των ερευνών στις γνωσιακές επιστήμες και είναι άμεσα εφαρμόσιμες για την αντιμετώπιση πλήθους καθημερινών προβλημάτων.

Ειδικότερα στο σχεδιασμό διδακτικών μεθόδων, ενα από τα σημαντικότερα συμπεράσματα της γνωστικής ψυχολογίας υπήρξε η ανάδειξη του καθοριστικού ρόλου της κατοχής από μέρους του μαθητή μιας πλούσιας και καλά οργανωμένης «βάσης δεδομένων» (ορισμοί, προτάσεις, θεωρήματα), αναφορικά με ένα γνωστικό αντικείμενο.

Μέσα από το ερευνητικό παράδειγμα «έμπειρων-αρχάριων», η γνωστική ψυχολογία συνέβαλλε στην απομυθοποίηση μιας αντίληψης με μεγάλη απήχηση. Η αντίληψη αυτή είχε να κάνει με την πεποίθηση ότι η υψηλή ειδίκευση σε ένα γνωστικό πεδίο συνδεέται με την κατοχή κάποιων γενικών κανόνων και στρατηγικών – όπως είναι για παράδειγμα οι στρατηγικές που περιγράφονται στο βιβλίο του Polya (1973) “How to Solve it”
(π.χ. ανάλυση μέσων και σκοπών, εύρεση και επίλυση ενός παρόμοιου αλλά ευκολότερου προβλήματος, χρήση υποσκοπών, κλπ.) που επιτρέπουν στον ειδικό να λύνει προβλήματα γρήγορα και σωστά. Μάλιστα, αρκετές φορές, η υψηλή ειδίκευση συνδέονταν και με την παρουσία κάποιου ιδιαίτερου χαρίσματος με το οποίο είναι προικισμένος ο ειδικός σε ένα τομέα γνώσεων. Ωστόσο, τα συμπεράσματα των ερευνών, από, πολλά γνωστικά πεδία, έδειξαν ότι η **υψηλή ειδίκευση βασίζεται στην αποθήκευση μεγάλου πλήθους κανόνων (νοητικών σχημάτων) στη μνήμη, με τρόπο ώστε να είναι εύκολα ανακλητοί και άμεσα εφαρμόσιμοι.**

Αυτό το συμπερασμα έχει μια πολύ απλή και άκρως ουσιώδη συνέπεια για την οργάνωση της διδασκαλίας. Αντί ο διδάσκων να αναλώσει το χρόνο του διδάσκοντας στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, να δώσει έμφαση στην οργανώση της ύλης υπό μορφή κανόνων δίνοντας την ευκαιρία στους μαθητές του να εφαρμόσουν αυτούς τους κανόνες σε απλά προβλήματα.
Στη συνέχεια είναι σκόπιμο να αναφερθούμε σε ορισμένες από τις σημαντικότερες έρευνες που οδήγησαν στα συμπεράσματα αυτά.

Ο Ρόλος της Γνώσης στη Λύση Προβλημάτων

Οι εργασίες οι οποίες συνέβαλλαν στην αναθεώρηση της φύσης της ειδίκευσης ξεκίνησαν από τις μελέτες του deGroot (1965) και των Chase & Simon (1973).

Ο Α. deGroot μελέτησε διαφορές μεταξύ έμπειρων σκακιστών (grant-masters) και αρχαρίων. Συνέκρινε τις νοητικές λειτουργίες των grant-masters με αυτές των αρχαρίων. Σε ένα από τα πειράματά του ζήτησε από έμπειρους και αρχάριους σκακιστές να αναπαράγουν τις θέσεις των κομματιών (20 περίπου) που είχαν παρατηρήσει νωρίτερα σε μια σκακιέρα για λιγότερο από δέκα δευτερόλεπτα. Οι θέσεις των κομματιών στη σκακιέρα δεν ήσαν τυχαίες, αλλά «νόμιμες», δηλαδή προέρχονταν από την ενδιάμεση φάση μιας σκακιστικής παρτίδας. Όπως διαπίστωσε ο deGroot, οι grant-masters κατάφεραν να τοποθετήσουν τα κομμάτια στις σωστές θέσεις πάνω στη σκακιέρα. Αντίθετα, οι αρχάριοι κατάφεραν με μεγάλη δυσκολία να αναπαράγουν τις θέσεις 4-5 μεμονομένων κομματιών. Στο σημείο αυτό είναι φυσικό να σκεφτεί κανείς ότι οι grant-masters όφειλαν την υπεροχή τους σε κάποια ιδιαίτερη αντιληπτική ικανότητα στην οποία υστερούσαν οι αρχάριοι. Ωστόσο, ένα από τα επόμενα πειράματα ανατρέπει μια τέτοια υπόθεση. Έτσι όταν τα ίδια άτομα κλήθηκαν να αναπαράγουν τις θέσεις 20 περίπου κομματιών τα οποία ήσαν σε τυχαίες θέσεις οι grant-masters και οι αρχαριοι τα πήγαν το ίδιο άσχημα.

Μελετώντας τα πειράματα του deGroot οι Chase & Simon (1973) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι έμπειροι σκακιστές δεν ανακαλούσαν μεμονωμένα κομματια στη σκακιέρα, αλλά σκακιστικούς σχηματισμούς που αντιστοιχούσαν σε αμυντικούς και επιθετικούς συνδυασμούς, σύμφωνους με τις σκακιστικές τεχνικές. Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις οι ερευνητές αυτοί κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι grant-masters αποθηκεύουν πληροφορίες στη μνήμη σε πακέτα (chunks) που αντιστοιχούν σε στερεότυπους σκακιστικούς συνδυασμούς.

Μια άλλη διαπίστωση του deGroot ήταν ότι οι έμπειροι σκακιστές δεν διέφεραν από τους αρχάριους ως προς το βάθος της αναζήτησης για την καλύτερη κίνηση. Έτσι, η υπεροχή των έμπειρων δεν έχει να κάνει με κάποια ιδιαίτερη οξύνοια ή αναλυτική ικανότητα του νου τους. Και οι δύο ομάδες αναζητούσαν την καλύτερη κίνηση σε βάθος 2 ή 3 κινήσεων. Το στοιχείο όμως στο οποίο διέφεραν οι έμπειροι σκακιστές από τους αρχάριους, ήταν η ικανότητα των πρώτων να εστιάζουν τη προσοχή τους, από την πρώτη στιγμή, στις καλύτερες πιθανές κινήσεις.

Ορισμένα από τα πειράματα του deGroot επαναλήφθηκαν από την M. Chi (1978). Το εντυπωσιακό στοιχείο με τα πειράματα της Chi ήταν ότι ως «ειδικοί» χρησιμοποιήθηκαν παιδιά από ένα σκακιστικό όμιλο με μέσο όρο ηλικίας 10.5, ενώ οι αρχάριοι ήσαν μεταπτυχιακοί φοιτητές και ερευνητές από ένα εκπαιδευτικό ερευνητικό κέντρο. Με τα πειράματα αυτά, η M. Chi είχε ως στόχο της να καταδείξει ότι η εμπειρία σε άλλους τομείς γνώσεις, καθώς και κάποιες γενικές στρατηγικές μάθησης που αποκτά κανείς με την πάροδο των χρόνων, δεν μπορούν να αναπληρώσουν την έλλειψη γνώσης σε ένα συγκεκριμένο τομέα. Τα συμπεράσματα της έρευνας ήταν σαφή, όσον αφορά στην υπεροχή της γνώσης. Τα παιδιά ξεπέρασαν σε επίδοση τους αρχαρίους. **Τα ευρήματα αυτά καταδεικνύουν, με σαφή τρόπο ότι η υψηλή επίδοση, σε ένα γνωστικό πεδίο οφείλεται σε μια καλα οργανωμένη γνώση του περιεχομένου και όχι στην κατοχή κάποιων γενικών στρατηγικών.**

Τα συμπεράσματα από τις έρευνες στο πεδίο των έμπειρων-αρχάριων στο σκάκι είναι άκρωςσυνεπή με τα συμπεράσματα ερευνών που διεξήχθησαν σε άλλα γνωστικά πεδία (Sweller & Cooper, 1985) . Ένα μεγάλο πλήθος ερευνών στη διδακτική των μαθηματικών (π.χ. Schoenfeld & Herrmann, 1982, Sweller & Cooper, 1985, Sweller, 1989 κ.ά.), αλλά και σε άλλα διαφορετικά γνωστικά πεδία ήλθε να ενισχύσει και να συμπληρώσει τα συμπεράσματα του deGroot.

Ο Ρόλος της Βραχύχρονης Μνήμης Στη Μάθηση

Έρευνες οι οποίες έχουν πραγματοποιηθεί στο πλαίσιο της γνωστικής ψυχολογίας έχουν δείξει ότι, προκειμένου οι πληροφορίες να γίνουν γνώση, πρέπει να προηγηθεί η επεξεργασία τους στην βραχύχρονη μνήμη. Πρακτικά, μπορεί κανείς να θεωρήσει τη βραχύχρονη μνήμη ως την ικανότητα του ανθρώπου να διατηρεί ενεργές, για σύντομο χρονικό διάστημα, έναν αριθμό πληροφοριών. Οι έρευνες συγκλίνουν στην άποψη ότι ο αριθμός των πληροφοριών τις οποίες μπορεί να επεξεργαστεί η βραχύχρονη μνήμη μια δεδομένη στιγμή είναι από 4 έως 7 «μονάδες πληροφορίας».

Ο ρόλος της βραχύχρονη μνήμης στη διαδικασία της μάθησης είναι καθοριστικός. Οι πληροφορίες εισέρχονται στη μνήμη αυτή, όπου και επεξεργάζονται (π.χ. δημιουργούνται νοηματικές συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων τμήματων της εισερχόμενης πληροφορίας) και στη συνέχεια εντυπώνονται στην μακρόχρονη μνήμη. Σε αντίθεση με την βραχύχρονη μνήμη η «χωρητικότητα» της μακρόχρονης μνήμης είναι θεωρητικά άπειρη.

Η ποιότητα της επεξεργασίας των πληροφοριών στη βραχύχρονη μνήμη συνδέεται άμεσα με την ικανότητα ανάκλησης της πληροφορίας, όσο βαθύτερη η επεξεργασία, τόσο πιο εύκολη είναι η ανάκτηση της συγκεκριμένης γνώσης.

Ένας εγγενής περιορισμός στην απόκτηση γνώσεων προέρχεται από την περιορισμένη ικανότητα της βραχύχρονης μνήμης να επεξεργαστεί μεγάλο πλήθος πληροφοριών. Στην περιορισμένη «χωρητικότητα» της βραχύχρονης μνήμης οφείλεται εν μέρει η αδυναμία των κλασικών στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων (goal directed methods), όπως είναι η ανάλυση μέσων και σκοπών, να συνεισφέρουν στη μάθηση και κατ' επέκταση στην απόκτηση ειδίκευσης. Η ανάλυση μέσων και σκοπών βασίζεται στη χρήση ενδιάμεσων στόχων (υποσκοπών) που επιτρέπουν στον λύτη να «γεφυρώσει» σταδιακά την απόσταση του από το ζητούμενο. Η στρατηγική αυτή, ενώ είναι μια πολύ αποτελεσματική μέθοδος λύσης προβλημάτων, συνιστά μια πολύ αργή μέθοδο μάθησης, όπως έχουν δείξει σχετικές έρευνες (Sweller & Cooper, 1985, Sweller, 1989). Αυτό συμβαίνει γιατί η βραχύχρονη μνήμη «μπλοκάρεται» με στοιχεία που αφορούν στην επίτευξη του στόχου και των ενδιάμεσων υποσκοπών του συγκεκριμένου προβλήματος, και όχι με στοιχεία τα οποία αφορούν τη δομή της ύλης, της οποίας η μάθηση επιδιώκεται με το συγκεκριμένο πρόβλημα. Όπως επισημαίνει ο Cooper (1998) ο χρήστης της ανάλυσης μέσων και σκοπών μπορεί να λύσει πολλά προβλήματα, αλλά στην πραγματικότητα να αποκομίσει ελάχιστες γνώσεις για την ύλη στην οποία αναφέρονται τα προβλήματα αυτά.

III. Σχεδιάζοντας Διδακτικά Εργαλεία με Βάση τη Γνωστική Ψυχολογία

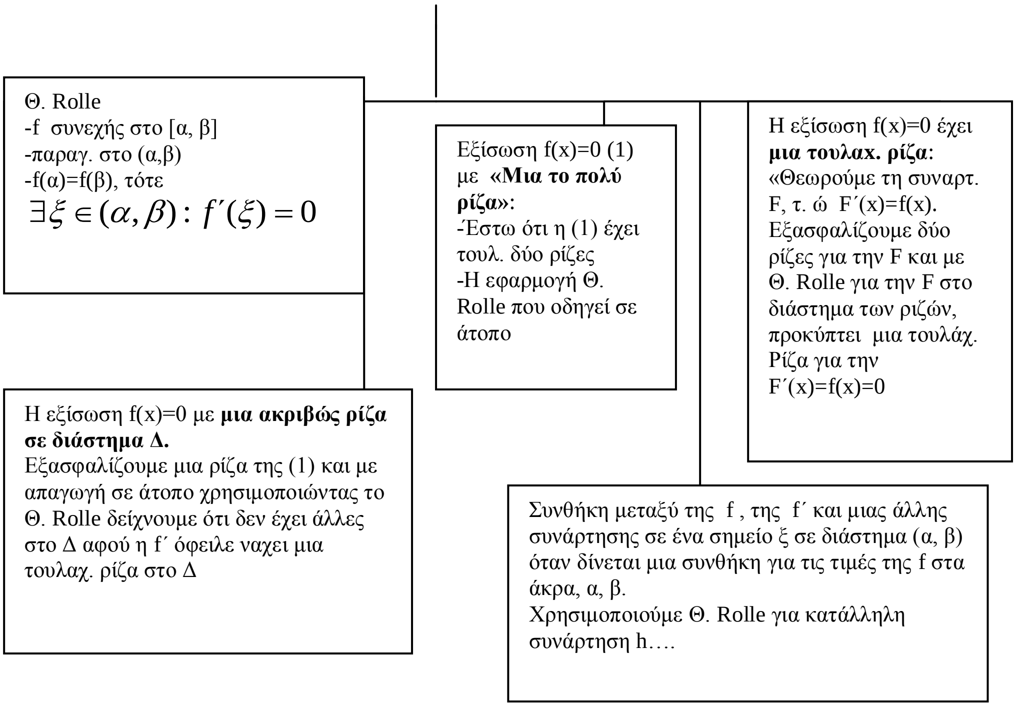
Νοητικά Σχήματα

Οι έρευνες στη γνωστική ψυχολογία έδειξαν ότι η ανάπτυξη ειδίκευσης σε ένα τομέα γνώσεων βασίζεται σε δύο στοιχεία: (α) στην απόκτηση και κατοχή «νοητικών σχημάτων» και (β) στην αυτοματοποίηση των διαδικασιών ή των κανόνων που κατέχει κάποιος. Έτσι, αφού η ειδίκευση βασίζεται σε μια πλούσια «βάση δεδομένων» που αποτελείται από νοητικά «σχήματα» είναι σκόπιμο, πριν προχωρήσουμε, να εξετάσουμε την έννοια του νοητικού «σχήματος».

Τα (νοητικά) «σχήματα» είναι δομές γνώσης τις οποίες ανακαλούμε προκειμένου να αντιμετωπίσουμε μια κατάσταση ή ένα πρόβλημα. Τα «σχήματα» περιέχουν «θυρίδες» (θέσεις μεταβλητών) οι οποίες συμπληρώνονται από τα δεδομένα του προβλήματος ή της κατάστασεις που αντιμετωπίζουμε. Το πόσο πλούσιο σε πληροφορίες είναι ένα «σχήμα» είναι σε άμεση συνάρτηση με το επίπεδο εμπειρίας και ειδίκευσης του ατόμου που κατέχει το «σχήμα αυτό». Όσο πιο έμπειρο είναι ένα άτομο σε ένα τομέα γνώσης, τόσο πιο πλούσιο είναι ένα σχετικό «σχήμα» σε αποθηκευμένες πληροφορίες. Το «σχήμα» περιέχει γενικές γνώσεις, χρήσιμες για την αναγνώριση των καταστάσεων όπου αυτό μπορεί να εύρει εφαρμογή, αλλά και γνώσεις που του επιτρέπουν να εκτελεί διαδικασίες (γνώσεις 'know-how'). Στον Πίνακα 3 εμφανίζεται ένα νοητικό «σχήμα» αναφορικά με το θεώρημα Rolle.

Πίνακας 3

Παράδειγμα Δομής Σχήματος Αναφορικά με το Θεώρημα Rolle : Ένα Επιμέρους Τμήμα



Το ερώτημα που τίθεται στο σημείο αυτό είναι: «Εάν η ειδίκευση βασίζεται στην κατοχή κατάλληλων ΄νοητικών σχημάτων', πως αποκτώνται τα ΄σχήματα' αυτά και πως επιτυγχάνεται, με αποδοτικό τρόπο, η αυτοματοποίηση των κανόνων και των διαδικασιών;».

Προς την κατεύθυνση αυτή και ιδιαίτερα την τελευταία δεκαετία, έχει αναπτυχθεί από κάποιους ερευνητές (Cooper & Sweller, 1985; Zhu & Simon, 1987; Sweller, 1989; κ. ά.) ένας αριθμός από διδακτικά μέσα . Τα κυριώτερα από αυτά τα διδακτικά μέσα είναι: (α) τα επεξεργασμένα παραδείγματα (worked examples) (β) Η συμπλήρωση λύσης προβλήματος (problem completion)και (γ) τα προβλήματα μειωμένου σκοπού (reduced goal specificity problems). Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στα επεξεργασμένα παραδείγματα και στα προβλήματα μειωμένου σκοπού, με τη βοήθεια παραδειγμάτων.

Επεξεργασμένα Παραδείγματα και Προβλήματα Μειωμένου Σκοπού

Τα επεξεργασμένα παραδείγματα δεν είναι κάτι καινούργιο στη διδασκαλία των μαθηματικών. Από πολύ παλαιότερα (π.χ. John Dewey) έχουν συνδεθεί με τη μάθηση μέσω της δραστηριοποίησης του μαθητή (learning-by-doing). Ωστόσο, μόνο πρόσφατα εξετάστηκαν οι προϋποθέσεις υπό τις οποίες η διδασκαλία με τη βοήθεια επεξεργασμένων παραδειγμάτων μπορεί να καταστεί ιδιαίτερα αποδοτική. Τα παραδείγματα αυτά πρέπει να είναι πολύ «λιτά» ως προς τα βήματα που απαιτούνται για τη λύση τους, δηλαδή να είναι όσο το δυνατόν πιο σύντομα περιλαμβάνοντας μόνο τα απολύτως απαραίτητα λογικά βήματα, χωρίς πλεονασμούς. Έτσι, αν επεξηγηθεί στους μαθητές ένα παράδειγμα και στη συνέχεια τους ζητηθεί να λύσουν ίδιου τύπου προβλήματα, τότε οι μαθητές αποκτούν την ικανότητα:

(α) να αναγνωρίζουν ως ιδιαίτερη κατηγορία (νοητικό «σχήμα») τον τύπο των συγκεκριμένων προβλημάτων

(β) να ανακαλούν εύκολα και γρήγορα τα βήματα που απαιτούνται για τη λύση και

(γ) να εκτελούν τα βήματα αυτά χωρίς λάθη.

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζει ένα επεξεργασμένο παράδειγμα καθώς και ενα πρόβλημα προς λύση το οποίο είναι όμοιο με το λυμένο παράδειγμα. Οι θέσεις όπου βρίσκονται οι αγκύλες, στο λυμένο παράδειγμα, αντιπροσωπεύουν τις «θυρίδες» (μεταβλητές) όπου μπορούν να τοποθετηθούν τα αντίστοιχα δεδομένα του άλυτου προβλήματος.

Πίνακας 4
Επεξεργασμένα Παραδείγματα

Λυμένο Παράδειγμα. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση [$2x^3 - 3x^2 + \mu = 0,\ \mu \in R$] (1) έχει το πολύ μιά ρίζα στο διάστημα [(0, 1)].

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι η (1) έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο [(0, 1)], έστω $\rho_1 < \rho_2$ δύο ρίζες της (1) στο διάστημα [(0, 1)].

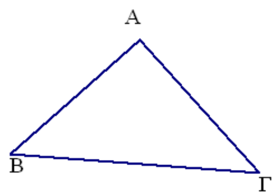
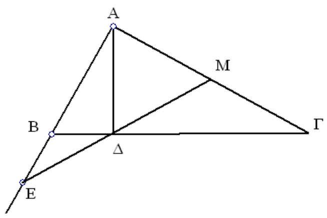
Θεωρούμε τη συνάρτηση [$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + \mu,\ \mu \in R$].

Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\lfloor \rho_1,\ \rho_2 \rfloor$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό με [$f'(x) = 6x^2 - 6x$] και $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.

Από το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $\lfloor \rho_{1,}\ \ \rho_2 \rfloor$, υπάρχει [$\xi \in (\rho_1,\ \rho_2) \subset (0, 1)$] τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι η $f'(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο $\xi \in (\rho_1,\ \rho_2)$, άρα και στο [(0, 1)], αφού [$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$].

Παράδειγμα προς Λύση: Να αποδείξετε ότι η εξίσωση [$x^3 - 3x^2 + \eta\mu\theta = 0,\ \theta \in R$] (1) έχει το πολύ μιά ρίζα στο διάστημα [(0, 2)].

Ένα εναλλακτικό διδακτικό μέσο για την ανάπτυξη ειδίκευσης στα μαθηματικά αποτελούν τα προβλήματα «μειωμένου σκοπού» (reduced goal specificity problems). Στον Πίνακα54 εμφανίζονται δύο προβλήματα.

Πίνακας 5 Προβλήματα Μειωμένου Σκοπού	
Πρόβλημα 1 ***Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με (ΑΒ=ΑΓ) και έστω ότι γωνία Α=φ. Να εκφάσετε τη γωνία Β συναρτήσει της φ.***	***Πρόβλημα 2*** ***Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Β=2Γ. Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και στην προέκταση της ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΕΒ=ΒΔ. Η προέκταση της ΕΔ τέμνει την ΑΓ στο Μ. Αν Γ=φ, τότε:*** ***(α) Να εκφράσετε όσες πιο πολλές γωνίες μπορείτε συναρτήσει της φ.*** ***(β) Να βρείτε όσο πιο πολλά ισοσκελή τρίγωνα μπορείτε.***
 	

Τα συμπεράσματα των ερευνών (π.χ. Sweller & Cooper 1985; Zhu & Simon, 1987; κ.ά) στηρίζουν την άποψη ότι η ειδίκευση μπορεί να αναπτυχθεί με τη βοήθεια των επεξεργασμένων παραδειγμάτων, των προβλημάτων μειωμένου σκοπού και των προβλημάτων συμπλήρωσης, γρήγορα και αποδοτικά. Ιδιαίτερα τα αποτελέσματα από την έρευνα των Zhu & Simon (1987) υπήρξαν εντυπωσιακά, αφού η ύλη τριών ετών στο κινέζικο αναλυτικό πρόγραμμα για τις τάξεις 5-7 καλύφθηκε, με τη βοήθεια των επεξεργασμένων παραδειγμάτων, σε διάστημα δύο ετών. Και αυτό, χωρίς η επίδοση των μαθητών που διδάχθηκαν την ύλη με τη βοήθεια των επεξεργασμένων παραδειγμάτων να υπολείπεται των μαθητών που κάλυψαν την ύλη σε διάστημα τριών ετών. Μάλιστα, ο μέσος όρος της επίδοσης των μαθητών της πειραματικής ομάδας (διδασκαλία μεσω των επεξεργασμένων παραδειγμάτων) ήταν λίγο μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο μέσο όρο της ομάδας ελέγχου (κάλυψη της ύλης με τον παροδοσιακό τρόπο).

Από όλα όσα έχουν εκτεθεί στα προηγούμενα, ίσως, δημιουργηθεί η αίσθηση ότι ο ρόλος του δασκάλου περιθωριοποιείται με τις μεθόδους αυτές. Όμως, αυτή η αίσθηση είναι πέρα για πέρα εσφαλμένη, αφού ένα πολύ σημαντικό μέρος της διδασκαλίας για την απόκτηση των νοητικών «σχημάτων» δεν έχει συζητηθεί στην προκειμένη εργασία. Αυτό το κομμάτι της διδασκαλίας το οποίο αφορά στη γνώση τη σχετική με το πότε ένα σχήμα πρέπει να εφαρμοσθεί, απαιτεί ευρηματικότητα και δημιουργικότητα από μέρους του δασκάλου. Ο οποίος, ανεξάρτητα από το τι μέρος της ύλης διδάσκεται, πρέπει νά είναι πάντα παρών να εξηγεί, να λύνει απορίες και να παρακινεί, συντελώντας, με τους μαθητές του, στη δημιουργία ενός κλίματος επικοινωνίας βαθειά ανθρώπινης και δημιουργικής.

Βιβλιογραφία

Cooper, G. Research into Cognitive Load Theory and Instructional Design at UNSW.http//www.g.cooper@unsw.edu.au. 1998.

Cooper, G. & Sweller, J. Effects of Schema Acquisition and Rule Automation on Mathematical Problems-Solving Transfer. *In Journal of Educational Psychology*. Vol. 79, No. 4, 347-362. 1987.

Chase W. G. & Simon, H. A. The Mind's Eye in Chess. In ChaseW. G. (Ed.). *Visual Information Processing*. New York:Academic Press. 1973.

Chi, M. T. H. Knowledge Structures and Memory Development. In Siegler, R (Ed.) *Children's Thinking: What Develops?*. Hillsdale: LEA. 1978.

DeGroot, A. *Thought and Choice in Chess*. The Hague:Mouton. 1965

Polya, G. *How to Solve It*.Princeton University Press.New Jersey. 1973

Schoenfeld, A. H. *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press. 1985

Snow, R. E.& Yallow, E. Education and Intelligence. In Sternberg, R. J. (Ed.) *Handbook of Human Intelligence*. Cambridge Massachusetts:Cambridge University Press.1982.
Sweller, J & Cooper, G. A. The use of Worked Examples as a Substitute for Problem Solving in Learning Algebra. *In Cognition & Instruction.* vol. 2. p 59-89. LEA.1985
Sweller, J. Cognitive Technology: Some Procedures for Facilitating Learning and Problem Solving in Mathematics and Science. *Journal of Educational Psychology.* V. 81, 457-466.
Zhu, Xinming & Simon, H. A. Learning Mathematics From Examples and by Doing. *Cognition and Instruction*. 4(3), 37-166. 1987.

Η Συνεισφορά των Φακέλων Εργασιών (Portfolios) και των e–portfolios στη Διδασκαλία Μαθηματικών Εννοιών στο Λύκειο

Δουκάκης Γ. Σπύρος
Υποψήφιος Διδάκτορας – Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Εκπαιδευτικός – Αμερικανικό Κολλέγιο Ελλάδος – Pierce College
sdoukakis@acgmail.gr

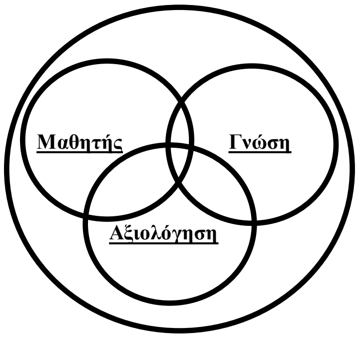
Περίληψη

Στην εισήγηση αυτή, αρχικά παρουσιάζονται οι περιορισμοί των παραδοσιακών μεθόδων διδασκαλίας. Στη συνέχεια, αναλύεται και περιγράφεται η χρήση του portfolio του/της μαθητή/τριας κατά τη διδασκαλία, την αξιολόγηση και τη μάθησή του/της. Επίσης, παρουσιάζεται το e–portfolio, το οποίο μπορεί να συνεισφέρει στη χρήση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας. Τέλος, αναπτύσσεται η δομή που μπορεί να έχει το portfolio μαθητή/τριας του Λυκείου, και δίνονται παραδείγματα εργασιών για να φανεί ότι μπορεί να ενσωματωθεί και στην ελληνική εκπαιδευτική πρακτική.

1. Εισαγωγή

Πρόσφατες έρευνες στη γνωσιακή επιστήμη και στη μάθηση έχουν δείξει ότι τέσσερις παράγοντες αποτελούν τα συστατικά για την ανάπτυξη αποτελεσματικών περιβαλλόντων μάθησης. Αυτά είναι η κοινωνία, ο μαθητής, η γνώση και η αξιολόγηση (National Research Council [NRC], 2001, Βοσνιάδου Σ., 2001, Black P. & Wiliam D., 2002). Τα τέσσερα αυτά συστατικά όπως φαίνεται στο σχήμα,

μπορεί να επικαλύπτουν το ένα το άλλο και αμοιβαία να δίνουν πληροφορίες το ένα στο άλλο.



Εικόνα 1. Αποτελεσματικό Περιβάλλον Μάθησης (NRC, 2001)

Από την άλλη, η εποχή μας, χαρακτηρίζεται, μεταξύ άλλων, από το μεγάλο όγκο πληροφοριών και τη χρήση ηλεκτρονικών μέσων. Οι εκπαιδευτικοί με τον πλουραλισμό των διδακτικών και μαθησιακών πρακτικών δεν μπορούν να κάνουν παρά μόνο εισαγωγή στους μαθητές και μαθήτριες σε επιστημονικά πεδία γνώσης και εμπειρίας. Τα ηλεκτρονικά μέσα (πολυμέσα, τοπικά δίκτυα, συστήματα επικοινωνίας,

---

Η εργασία που αναπτύσσεται σε αυτή τη δημοσίευση έχει εκπονηθεί σε συνεργασία με την Επίκουρη Καθηγήτρια του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Αιγαίου κ. Χιονίδου–Μοσκοφόγλου Μαρία και τμήμα της έχει παρουσιασθεί στο 21^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, που πραγματοποιήθηκε από τις 19 – 21/11/2004 στα Τρίκαλα.

διαδίκτυο, βάσεις δεδομένων, έξυπνα συστήματα εκπαίδευσης μέσω διαδικτύου) οδηγούν εύλογα στην ανάπτυξη νέων στρατηγικών διδασκαλίας και μάθησης (Birenbaum, 1996, Χιονίδου–Μοσκοφόγλου, 2000). Στην εισήγηση αυτή θα δούμε σε αδρές γραμμές τις αλλαγές που έχουν επέλθει σε παγκόσμιο επίπεδο στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης και πως αυτές έχουν επηρεάσει τον τρόπο διδασκαλίας. Επιπλέον, θα εστιαστούμε στο portfolio των μαθητών/τριών το οποίο μπορεί να συνεισφέρει στη διδασκαλία και τη μάθηση.

2. Οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης

Πολλοί εκπαιδευτικοί φορείς, όπως το National Council of Teachers of Mathematics 2000 (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics) στην Αμερική, Mathematics Counts (Cockroft, 1982) στην Αγγλία και A National Statement on Mathematics for Australian Schools (Australian Education Council, 1990), αλλά και πολλοί ερευνητές έχουν αναφερθεί στις ικανότητες που πρέπει να αποκτά κάθε μαθητής όχι μόνο κατά την ολοκλήρωση της εκπαίδευσής του αλλά και κατά την αξιολόγησή του, όπως για παράδειγμα:

- γνωστικές ικανότητες επίλυσης προβλημάτων, κριτικής σκέψης, διατύπωσης ερωτήσεων, εύρεσης πληροφοριών, κριτικής, παρατήρησης, αποτελεσματικής χρήσης πληροφοριών, έρευνας, κατασκευής, επινόησης, ανάλυσης και παρουσίασης δεδομένων, επικοινωνίας, προφορικής και γραπτής έκφρασης.
- μετα-γνωστικές ικανότητες αυτο-αναστοχασμού και αυτο-αξιολόγησης.
- κοινωνικές ικανότητες καθοδήγησης συζήτησης και διαλόγου, πειθούς, συνεργασίας, εργασίας σε ομάδες και
- συναισθηματική διάθεση ώστε να εμμένει ο μαθητής στο στόχο που έχει θέσει, να έχει κίνητρα, υπευθυνότητα, προσαρμοστικότητα και να μπορεί να χειρίζεται καταστάσεις απογοήτευσης (Birenbaum, 1996).

2.1. Η Δασκαλο-κεντρική προσέγγιση διδασκαλίας

Στο δασκαλο-κεντρικό μοντέλο η διδασκαλία και η μάθηση αποτελούν ξεχωριστές διαδικασίες, με τον εκπαιδευτικό να θεωρεί τους μαθητές/τριες παθητικούς λήπτες της γνώσης (Segers, Dochy, & De Corte, 1999, Dochy & McDowell, 1997). Η απομνημόνευση του περιεχομένου του μαθήματος που διδάσκεται αποτελεί τον κύριο στόχο της διδασκαλίας, ενώ η κριτική της γνώσης απουσιάζει σε υψηλό βαθμό.

2.2. Σύγχρονες προσεγγίσεις διδασκαλίας και η αντίστοιχη κουλτούρα αξιολόγησης

Ένας από τους στόχους της διδασκαλίας είναι η απόκτηση συγκεκριμένων γνωσιακών, μετα-γνωσιακών και κοινωνικών δεξιοτήτων. Έτσι, η κατανόηση αποτελεί ένα κύριο στόχο της διδασκαλίας και της αξιολόγησης. Για να επιτευχθεί η κατανόηση απαιτούνται νέες διδακτικές προσεγγίσεις. Οι γνωστικοί ψυχολόγοι έχουν επηρεάσει τη διαδικασία διδασκαλίας και οι εκπαιδευτικοί σήμερα μπορούν να χαρακτηρίζουν, να επιβλέπουν και να βελτιώνουν τη μάθηση των μαθητών. Σύμφωνα με τον De Corte (1990) απαιτείται ο σχεδιασμός αποτελεσματικών περιβαλλόντων μάθησης που να τονίζουν ότι μάθηση σημαίνει ενεργή "κατασκευαστική" γνώση και ικανότητες στη βάση της προηγούμενης γνώσης. Έτσι, απαιτείται ισορροπία μεταξύ της ανακαλυπτικής μάθησης και της προσωπικής διερεύνησης από τη μία και της συστηματικής διδασκαλίας και καθοδήγησης από την άλλη. Σημαντικό είναι επίσης ο μαθητής να είναι υπεύθυνος για τη μάθησή του. Ο εκπαιδευτικός μυεί το μαθητή σε αυτή τη διαδικασία. Του δίνει δυνατότητες για να χρησιμοποιήσει αυτά που ξέρει, ώστε να κατανοήσει νέα ζητήματα. Παρέχει εργασίες που να προκαλούν το ενδιαφέρον του, να συνδέονται με καταστάσεις της πραγματικής ζωής και να σχετίζονται με την εμπειρία του, ώστε να βελτιώνονται οι στρατηγικές μάθησης και κατανόησης (Birenbaum, 1996). Συνεπώς, οι δραστηριότητες μάθησης περιέχουν ποικίλες πηγές και υλικό, ώστε να προσφέρουν ευκαιρίες κοινωνικής αλληλεπίδρασης και δυνατότητες για χρήση των ικανοτήτων που αποκτήθηκαν στο μέλλον. Έτσι, σύμφωνα με τους ειδικούς απαιτείται:

- Ενοποίηση της αξιολόγησης και της διδασκαλίας. Οι ειδικοί της αξιολόγησης, όπως Birenbaum (1996), Keeves (1994) τονίζουν ότι η εκπαιδευτική αξιολόγηση είναι εργαλείο που εμπλουτίζει τη διαδικασία διδασκαλίας και δεν πρέπει να συμβαίνει μόνο στο τέλος της διαδικασίας μάθησης (Dochy & McDowell, 1997).
- Ο μαθητής να είναι ενεργός συμμέτοχος στη διαδικασία, να αυτοαξιολογείται, να συνεργάζεται και να επικοινωνεί συνεχώς με τον εκπαιδευτικό και να συμμετέχει στην ανάπτυξη των κριτηρίων της αξιολόγησής του.
- Το προϊόν της αξιολόγησης και η διαδικασία να αξιολογούνται.
- Η αξιολόγηση να έχει ποικίλες μορφές.
- Να μην υπάρχει πίεση χρόνου και να επιτρέπονται εργαλεία που χρησιμοποιούνται στην πραγματική ζωή.
- Οι εργασίες να είναι ενδιαφέρουσες, με σημασία, αυθεντικές, ευχάριστες και να περιλαμβάνουν έρευνα οποιασδήποτε μορφής.
- Η αξιολόγηση για το μαθητή να μην είναι ένας απλός αριθμός (βαθμός), αλλά ένα ολοκληρωμένο προφίλ (Kleinasser A., Horsch, E., & Tastad, S. 1993).
- Οι μαθητές να παρουσιάζουν την εργασία τους σε μία εφημερίδα και να έχουν portfolios για να παρατηρούν τη σχολική τους ανάπτυξη.

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά θα φανεί ότι μπορούν να καλυφθούν με τα portfolios, τα οποία θα αναλυθούν στην επόμενη παράγραφο.

3. Τα portfolios και η χρήση τους

Στον εκπαιδευτικό χώρο, η χρήση των portfolios μπορεί να υιοθετείται για τρεις σκοπούς:

- για την ανάπτυξη του/της μαθητή/τριας
- για την παρουσίαση του/της μαθητή/τριας
- για την αξιολόγηση του/της μαθητή/τριας (Χιονίδου–Μοσκοφόγλου Μ. & Δουκάκης Σ. 2004),

Τα portfolios χρησιμοποιούνται προκειμένου να προσφέρουν:

α) μια συνολική εικόνα της ανάπτυξης του μαθητή/τριας, όπου περιλαμβάνουν υλικό για να αναδείξουν τη μάθησή του/της κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσής του/της. Οι μαθητές/τριες χρησιμοποιώντας το portfolio πραγματοποιούν συνδέσεις για την καριέρα τους, με την κοινότητα στην οποία εργάζονται, δείχνοντας τους προσωπικούς και εκπαιδευτικούς στόχους τους,

β) ένα δυναμικό βιογραφικό με υλικό που περιλαμβάνει την προσωπική και επαγγελματική πρόοδο, την ομαδική εργασία και στοιχεία που αναδεικνύουν την επάρκεια και την ικανότητά τους και

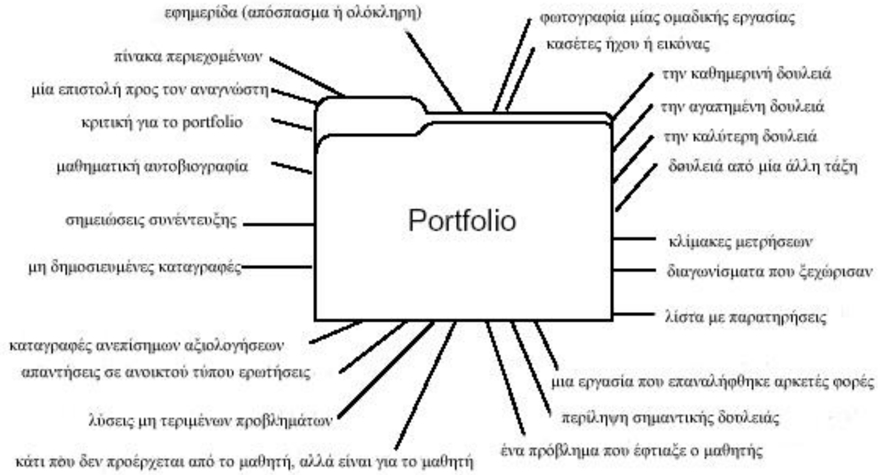
γ) ένα αυθεντικό αποτέλεσμα αξιολόγησης του μαθητή/τριας για την εκπαίδευση που έλαβε σε κάποια μαθήματα.

3.1. Η κατασκευή των portfolios

Το portfolio των μαθητών/τριων είναι καλό να οργανωθεί σε περιοχές που είναι δύσκολο να διδαχθούν με παραδοσιακές μεθόδους. Τέτοιες περιοχές είναι για παράδειγμα, ο χώρος των μετρήσεων, οι γραφικές παραστάσεις, η κατασκευή διαγραμμάτων. Ακόμη, είναι καλό να δημιουργούνται από την αρχή του σχολικού έτους, ώστε να αποκτάται μία πλήρης εικόνα των ικανοτήτων και της εξέλιξης των μαθητών. Οι συγκρίσεις για την επίδοση του/της μαθητή/τριας είναι χρήσιμο να γίνουν, αλλά είναι αδύνατο να πραγματοποιηθούν χωρίς δείγματα από την αρχή του σχολικού έτους.

Κάθε μαθητής/τρια είναι υποχρεωμένος/νη να εργαστεί σε συγκεκριμένα θέματα και όχι απλώς σε αυτά που προτιμά, ώστε να ελέγχονται συγκεκριμένα κριτήρια που έχουν τεθεί (Kuhs 1994).

Η επόμενη εικόνα δείχνει μερικά είδη εργασιών που μπορεί να περιλαμβάνει ένα portfolio:



Εικόνα 2. Τι μπορεί να περιλαμβάνει το μαθηματικό portfolio (Kuhs 1994).

3.2. Γιατί να χρησιμοποιηθούν portfolios;

Τα portfolios μπορούν να αποτελέσουν μία σημαντική συνιστώσα στην καταγραφή και την αποτίμηση της μάθησης με τρόπο που να απεικονίζει τις πολλαπλές μορφές εργασίας του μαθητή (Lambdin, Walker 1994).

Τα portfolios μπορούν να βοηθήσουν τον εκπαιδευτικό να αξιολογήσει καλύτερα τη μάθηση του μαθητή, να καλλιεργήσει την αυτονομία του μαθητή, να επικοινωνήσει τα επιτεύγματα της διδασκαλίας του μαθητή με τους γονείς και να βελτιώσει τον τρόπο διδασκαλίας του.

Από τη στιγμή που τα portfolios περιλαμβάνουν δείγματα της δουλειάς του μαθητή αποτελούν τον καλύτερο τρόπο αξιολόγησης σε σχέση με το βαθμό. Πολλά προσδοκώμενα αποτελέσματα που είναι δύσκολο να αξιολογηθούν με τις παραδοσιακές μεθόδους, όπως προσαρμοστικότητα, επικοινωνία, επεξήγηση, επίλυση προβλημάτων και αυτο-εκτίμηση μπορούν να αξιολογηθούν με τη χρήση των portfolios. Επίσης, μπορούν να ενθαρρύνουν τους μαθητές να αξιολογήσουν τη μάθησή τους. Οι μαθητές γίνονται πιο αυτόνομοι και αποκτούν περισσότερα κίνητρα εξετάζοντας και κοιτώντας τις εργασίες τους και τις εργασίες των συμμαθητών τους.

Οι εργασίες που περιλαμβάνονται σε ένα portfolio αποκαλύπτουν πολλά περισσότερα από αυτά που μπορούν να επεξηγηθούν με τους βαθμούς ή τα σχόλια για ένα μαθητή. Οι κηδεμόνες, αλλά και άλλα πρόσωπα μπορούν να δουν την πρόοδο και τις επιτυχίες των μαθητών. Επιπλέον, οι εργασίες των μαθητών που περιλαμβάνονται σε ένα portfolio αντικατοπτρίζουν το περιεχόμενο και τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος με ένα τέτοιο τρόπο ώστε να συμπληρώνεται η φιλοσοφία, ο σκοπός και η σειρά των κεφαλαίων του αναλυτικού προγράμματος. Στοχεύουν στη δουλειά που κάνουν οι μαθητές και όχι σε στόχους που θα επιθυμούσε κάποιος να επιτευχθούν. Επίσης, αναπτύσσεται η επικοινωνία μεταξύ κηδεμόνων και μαθητών, εκπαιδευτικών και ομάδας εργασίας. Μπορούν να βοηθήσουν στη δημιουργία κοινών κανόνων για τους στόχους των μαθηματικών. Όταν η αξιολόγηση εστιάζεται στα διαγωνίσματα και τους βαθμούς, αναπτύσσεται μία πιο στενή θεώρηση του τι είναι χρήσιμο στα μαθηματικά. Με τα portfolios η αξιολόγηση είναι πιο πλατειά και έτσι αναπτύσσεται μια πιο ευρεία θεώρηση του τι είναι χρήσιμο.

Τα portfolios των μαθητών μπορεί να είναι χρήσιμα για τη βελτίωση της διδασκαλίας και την αξιολόγηση. Η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές σκέπτονται και αισθάνονται μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να λάβουν αποφάσεις για το πώς να συνεχίσουν τη διδασκαλία. Μπορούν να διευκολύνουν τις συζητήσεις με ειδικούς για τις διαφορετικές προσεγγίσεις σε ένα θέμα και μπορούν να καταδείξουν τη χρήση έξυπνης διαχείρισης, την ομαδική εργασία και την τεχνολογία σε ένα αναλυτικό πρόγραμμα.

Τα portfolios των μαθητών μπορούν επίσης να συμπεριληφθούν στο portfolio του εκπαιδευτικού για να αυτοαξιολογηθεί. Ο τρόπος διδασκαλίας του εκπαιδευτικού, μπορεί να βελτιωθεί με τη συγκέντρωση, την εξέταση και τη μελέτη portfolios μαθητών για αρκετά χρόνια.

Τα portfolios δεν μπορούν να λειτουργήσουν από μόνα τους. Χωρίς την κατάλληλη υποστήριξη της καθημερινής αξιολόγησης στην τάξη τα portfolios μετατρέπονται σε ένα απλό χώρο αποθήκευσης της δουλειάς των μαθητών. Όμως, ο στόχος είναι να συμπεριλαμβάνουν την καθημερινή αξιολόγηση, τη συμμετοχή των μαθητών σε εκθέσεις, σε διαγωνισμούς και να αποτελούν τεκμηρίωση για τη μάθηση του μαθητή. Τέλος, τα portfolios δε πρέπει να χρησιμοποιούνται για σύγκριση των εργασιών των μαθητών, αφού παρουσιάζουν τη σκληρή εργασία που κάνουν οι μαθητές χωριστά και αποτελούνται από ένα σύνολο κριτηρίων που σχεδιάστηκαν από τους καθηγητές ή/και τους μαθητές.

3.3. Η περίπτωση των e–portfolios

Η χρήση των τεχνολογιών της πληροφορίας και της επικοινωνίας (Τ.Π.Ε.) θεωρείται ως ένας σύγχρονος τρόπος προσέγγισης για τη διδασκαλία, τη μάθηση και την αξιολόγηση, αλλά δεν έχει ακόμη αξιοποιηθεί ευρέως. Σήμερα, η χρήση των τεχνολογιών στα μαθηματικά επιμερίζεται στα ακόλουθα:

- Υπολογιστές χειρός για γραφήματα (Graphing Calculators),
- Λογισμικά συστήματα Άλγεβρας και εκπαιδευτικά λογισμικά όπως: The Geometers' Sketchpad, Fathom Dynamic Statistics, Graph, Αβάκιο κ.α.
- Επεξεργαστής κειμένου, υπολογιστικό φύλλο, λογισμικό παρουσίασης, Διαδίκτυο και
- Αξιολόγηση με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, αντιστοίχισης και της μορφής σωστού–λάθους.

Οι παραπάνω σύγχρονες τεχνολογίες ενσωματώνονται σε ένα e–portfolio με δύο θετικά αποτελέσματα: να εκπαιδεύονται οι μαθητές στις σύγχρονες τεχνολογίες και να αξιοποιούνται οι Τ.Π.Ε στη διδακτική πράξη.

Ακόμη, οι Τ.Π.Ε. και κατ' επέκταση η ύπαρξη e–portfolio επιβάλλεται να υποστηρίζει εκπαιδευτικούς στόχους που οι εκπαιδευτικοί θα ήθελαν πολύ να δοκιμάσουν, αλλά είναι δύσκολο να πραγματοποιήσουν μέσω παραδοσιακών διδακτικών μεθόδων. Έτσι, για παράδειγμα μέσα σε ένα e–portfolio, μπορεί να υπάρχουν εργασίες για την ανάπτυξη δεξιοτήτων αναλυτικής σκέψης, όπως κριτικής, αναστοχασμού σε γνωσιακές διαδικασίες και δραστηριότητες "μάθησης για τη μάθηση", όπως επίσης ομαδικής εργασίας και επέκτασης παλαιοτέρων projects. Το NCTM (2000) υποστηρίζει ότι: "με τη χρήση τεχνολογικών εργαλείων, οι μαθητές θα μπορούν να αιτιολογούν πιο γενικά θέματα και θα μπορούν να μοντελοποιούν και να λύνουν πολύπλοκα προβλήματα, τα οποία δεν είχαν τη δυνατότητα να επιλύσουν στο παρελθόν".

3.4. Παραδείγματα portfolios

Οι εργασίες που μπορούν να συμπεριληφθούν στο portfolio ενός/μια μαθητή/τριας του Λυκείου ποικίλουν. Οι τύποι εργασιών που μπορεί να συμπεριλαμβάνει το portfolio του/της μαθητή/μαθήτριας είναι τρεις:

1. Μαθηματική Έρευνα (Mathematical Investigation)
   Θέμα: Νόμος Ημιτόνων. Προσέγγιση: ομοιότητα, ημίτονα.
   Θέμα: Λογάριθμοι. Προσέγγιση: λογάριθμοι, γραφικές παραστάσεις.
   Θέμα: Περιοχές κάτω από καμπύλες. Προσέγγιση: εμβαδά, ολοκληρώματα, αθροίσματα, όρια, χρήση τεχνολογίας.
2. Εκτεταμένη επίλυση κλειστού προβλήματος (Extended closed–problem solving)
   Θέμα: Η κλίμακα των decibel. Προσέγγιση: λογάριθμοι, εκθετική συνάρτηση, γραφικές παραστάσεις. Προεκτάσεις: Τεχνολογία, Φυσική.
   Θέμα: Οι απορροφητές κραδασμών και οι σούστες στα αυτοκίνητα σχεδιάστηκαν για να προσφέρουν άνεση στους επιβάτες και σταθερότητα του αυτοκινήτου στο δρόμο. Οι μηχανικοί έχουν σχεδιάσει ένα νέο τύπο απορροφητή κραδασμών και σκοπός μας είναι να τον αξιολογήσουμε. Προσέγγιση: παράγωγοι, συναρτήσεις, γραφική σχεδίαση, χρήση τεχνολογίας. Προεκτάσεις: Τεχνολογία, Φυσική, Κυκλοφοριακή Αγωγή.
3. Μαθηματική μοντελοποίηση (mathematical modeling)
   Θέμα: Σχεδίαση της άκρης της προπέλας του πλοίου. Προσέγγιση: εμβαδά, ολοκληρώματα, συναρτήσεις, γραφική σχεδίαση, πολυωνυμικές συναρτήσεις, πίνακες, χρήση τεχνολογίας. Προεκτάσεις: Τεχνολογία, Φυσική, Αισθητική Αγωγή, Ιστορία.
   Θέμα: Αύξηση Πληθυσμού. Προσέγγιση: πιθανότητες, παράγωγοι, εκθετική συνάρτηση, χρήση τεχνολογίας. Προεκτάσεις: Φυσικές Επιστήμες, Γεωγραφία, Ιστορία.

Στις διαφάνειες που θα προβληθούν θα φανεί η επεξεργασία των παραπάνω θεμάτων, αλλά λόγω έλλειψης χώρου δεν μπορεί να φανεί στην παρουσίαση αυτή. Η αξιολόγηση των εργασιών μπορεί να γίνει από το διδάσκοντα καθηγητή και η αξιολόγησή του μπορεί να αξιολογηθεί από εξωτερικό αξιολογητή. Από τον μαθητή/τρια αναμένεται:

- να οργανώσει και να παρουσιάσει πληροφορίες/δεδομένα σε μορφή πίνακα, με γραφικό και/ή διαγραμματικό τρόπο,
- να γνωρίζει και να χρησιμοποιεί τη μαθηματική ορολογία και τον μαθηματικό συμβολισμό,
- να αναγνωρίζει μοντέλα και δομές σε ποικίλες καταστάσεις και να σχεδιάζει επαγωγικές γενικεύσεις,
- να καταδεικνύει την κατανόηση και την επάρκεια που έχει σε πρακτικές εφαρμογές των μαθηματικών,
- να χρησιμοποιεί τεχνολογικές συσκευές ως μαθηματικά εργαλεία.

Τα κριτήρια αξιολόγησης είναι:

1) η χρήση της ορολογίας και του συμβολισμού,
2) η επικοινωνία,
3) το μαθηματικό περιεχόμενο,
4) τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα,
5) το αν προκύπτουν συμπεράσματα με βάση υποθέσεις και

6) η χρήση της τεχνολογίας (I.B. 1998).

Κάθε ένα από αυτά τα κριτήρια αξιολογείται με συγκεκριμένα "Στάδια επίτευξης". Εδώ, θα αναλύσουμε το 3ο κριτήριο -του μαθηματικού περιεχομένου- ως παράδειγμα. Ο μαθητής, λοιπόν, βαθμολογείται με:

0. αν αναγνωρίζει ότι δεν υπάρχει καθόλου μαθηματικό περιεχόμενο που να σχετίζεται με τη δραστηριότητα.
1. αν αναγνωρίζει μαθηματικό περιεχόμενο ή επιλέγει μία μαθηματική στρατηγική που να σχετίζεται με τη δραστηριότητα.
2. αν αναγνωρίζει μαθηματικό περιεχόμενο και προσπαθεί να χρησιμοποιήσει μία μαθηματική στρατηγική που να σχετίζεται με τη δραστηριότητα και είναι σύμφωνη με το επίπεδο του προγράμματος.
3. αν αναγνωρίζει μαθηματικό περιεχόμενο και χρησιμοποιεί μία μαθηματική στρατηγική που να σχετίζεται με τη δραστηριότητα και είναι σύμφωνη με το επίπεδο του προγράμματος και κάνει μερικά λάθη στην εφαρμογή μαθηματικών τεχνικών.
4. αν αναγνωρίζει μαθηματικό περιεχόμενο και επιτυχώς χρησιμοποιεί μία μαθηματική στρατηγική που να σχετίζεται με τη δραστηριότητα και είναι σύμφωνη με το επίπεδο του προγράμματος και εφαρμόζει μαθηματικές τεχνικές σωστά σε κάθε σημείο της δραστηριότητας.
5. αν επιδεικνύει εργασία που να διακρίνεται για την ακρίβεια, τη βαθιά γνώση και το πνευματικά καλό επίπεδο μαθηματικής κατανόησης.

4. Συμπεράσματα

Από τα παραπάνω μπορεί να φανεί ότι η χρήση των portfolios και των e–portfolios κατά τη διδασκαλία αποτελεί μία σύγχρονη παιδαγωγική μέθοδο, που συνεισφέρει σε μεγάλο βαθμό και στην αξιολόγηση των μαθητών/τριών στα Μαθηματικά. Συνεπώς, είναι απαραίτητο να αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της φιλοσοφίας ενός σύγχρονου αναλυτικού προγράμματος, αφού η σχολική πρακτική θα πρέπει να αναπτύσσει τρόπους διδασκαλίας σε πραγματικές συνθήκες, ώστε να υλοποιεί τους στόχους του Αναλυτικού Προγράμματος, να αξιολογεί τη μάθηση και κατά συνέπεια, την καταλληλότητα του σχεδιασμού.

5. Βιβλιογραφία

Alexander R., (1992) *Policy and Practice in the Primary Curriculum*. London: Routledge, 184.

Australian Educational Councils, (1990) *A National Statement on Mathematics for Australian Schools*.

Black P. & Wiliam D., (2002), *Assessment for Learning: Beyond the Black Box,* http://www.assessment-reform-group.org.uk/publications.html, Τελευταία Προσπέλαση, 12/01/2005.

Birenbaum M., (1996) *Assessment 2000 towards a pluralistic approach to assessment*. In Birenbaum M. Dochy F., Alternatives in assessment of achievements, learning processes & prior knowledge, Kluwer 3–30.

Βοσνιάδου Σ., (2001) *Πώς μαθαίνουν οι μαθητές*, Διεθνής Ακαδημία της εκπαίδευσης, Διεθνές γραφείο εκπαίδευσης της UNESCO.

Cockroft W. H., (1982) *Mathematics counts, London: Her Majesty's Stationery Office*.

De Corte E., (1990) *A state-of-the-art of research on learning and teaching*. Presented at the 1st European Conference on the First Year Experience in Higher Education, Aalborg University, Denmark, April.

Dochy F. & McDowell L., (1997) *Assessment as a tool for learning. Studies in Educational Evaluation*, 23 (4), 279–298.

Driver R. & Oldham V., (1996). A constructivist approach to curriculum development in science. *Studies in Science Education,* 13, 105–122.

International Baccalaureate Organization, (1998), *Diploma Programme Mathematics Higher Level*.

Keeves J. P., (1994) *Methods of assessment in schools*. In T. Husen, & T. Postlethwaite, International encyclopedia of education 362-370. Oxford/New York: Pergamon Press.

Kleinasser A., Horsch E. & Tastad S., (1993) *Walking the talk: moving from a testing culture to an assessment culture*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Atlanta, GA, April 1993.

Kuhs T., (1994) *Portfolio Assessment: Making It Work for the First Time*, Mathematics Teacher, 87 (5), pp. 332–335.

Lambdin D., Walker V., (1994) *Planning for Classroom Portfolio Assessment*, Arithmetic Teacher, 41 (6), 318–324.

Magone E., Cai J., Silver A., Wang N., (1994) *Validating the cognitive complexity and content quality of a mathematics performance assessment*. International Journal Educational Research, 21(4), 317–340.

National Council of Teachers of Mathematics, (2000) *Curriculum and Evaluation standards for School Mathematics*.

National Research Council, (2000) *How people learn: Brain, mind, experience, and school.* Washington, DC: National Academy Press.

Ridgway J. & McCusker S., (2003), *Using computers to assess new educational goals* Assessment in Education: Principles, Policy and Practice, Vol. 10, No 3, 309–328.

Segers M., Dochy F. (1996) *The use of performance indicators for quality assurance in higher education*. Studies in Educational Evaluation, 22 (2), 115–139.

Segers M., Dochy F., & De Corte E. (1999) *Assessment practices and students' knowledge profiles in a problem-based curriculum*. Learning Environments Research, 2, 191–213.

Χιονίδου–Μοσκοφόγλου Μ. (2000) *Πανελλήνιες Εξετάσεις στα Μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου: «Παγίδες» ή Ανοιχτά Προβλήματα;* Επιθεώρηση Επιστημονικών και Εκπαιδευτικών Θεμάτων, 3, 163–172.

Χιονίδου–Μοσκοφόγλου Μ., Δουκάκης Σ. (2004),·*Αναλυτικά προγράμματα Ε.Π.Σ.Σ., Δ.Ε.Π.Π.Σ., Αξιολόγηση μαθητών/τριών στα μαθηματικά: Η περίπτωση του φακέλου εργασιών*, Πρακτικά 21[ου] Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, σελ. 610–621, Τρίκαλα.

Από τη μεθοδική σκέψη στην κριτική της μεθόδου

Νίκος Παπευστρατίου
ΕΠΛ Αναβρύτων

Είτε έχουμε, εμείς οι μαθηματικοί στα σχολεία της Δευτεροβάθμιας, μελετήσει τα προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά είτε όχι, ακολουθώντας τις σπουδές μας, τα βιβλία και, εν τέλει, το αυτονόητο, διδάσκουμε το αντικείμενό μας απλοποιώντας πολλές φορές τα δεδομένα μας έτσι ώστε στον νου των μαθητών μας να διαπλαστεί η βεβαιότητα ότι ένα και ένα κάνουν δύο.

Αν διαβάσουμε τα προγράμματα σπουδών (αναφέρομαι ειδικά στο διαθεματικό ενιαίο πλαίσιο προγράμματος σπουδών μαθηματικών, αλλά και στα άλλα δεν υπάρχουν διαφορές), βρίσκουμε κιόλας εκφρασμένο τον στόχο αυτό ως εξής:

(Τα μαθηματικά) ασκούν τον μαθητή στην μεθοδική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες και τον διδάσκουν να διατυπώνει τα διανοήματά του με τάξη, σαφήνεια, λιτότητα και ακρίβεια.

(Εδώ βρίσκεται πράγματι η σπουδαία προσφορά των μαθηματικών, και του μαθήματος και ημών, εννοώ! Ανακαλύπτεται η σχέση των αριθμών μεταξύ τους, διερευνάται το μέγεθος και η ταξινόμηση, γενικεύεται η γνώση ώστε να διαμορφωθεί η απαραίτητη εικόνα για τον κόσμο που θα δώσει σιγουριά για τις πράξεις και συναισθηματική ασφάλεια για τη ζωή στους μαθητές: ο κόσμος διέπεται από αρχές, άρα δεν έχουμε παρά να τις ακολουθήσουμε για να πορευτούμε, είτε στην πρόσθεση και την αφαίρεση, είτε στη σχεδίαση, είτε στην εφαρμογή.)

Είτε, λοιπόν, διδάσκουμε άλγεβρα, είτε παρουσιάζουμε γεωμετρία είτε αναλύουμε τις ιδιότητες της παραγώγου στους μαθητές του λυκείου, ακόμα και όταν περιοριζόμαστε από την πίεση των εξετάσεων και, **κυρίως**, από την ανάγκη μας να διαπιστώσουμε ότι έγιναν κατανοητά κάποια βασικά πράγματα και μπορούν να εφαρμοστούν ως αρχή και σε άλλες χρήσεις και περιπτώσεις και, κατά συνέπεια συμπληρώνουμε το μάθημά μας με μια πληθώρα ασκήσεων, επιμερισμών δηλαδή και εξειδικεύσεων, νομίζω ότι δεν πρέπει να παραβλέπουμε αυτή τη βασική λειτουργία του μαθήματος, τον κύριο στόχο του, τη διδασκαλία και την εξοικείωση με τις σχέσεις που διέπονται από νόμους.

Και εδώ θα επιμείνω: στο λύκειο πλέον, όταν οι μαθητές και οι μαθήτριές μας έχουν, ακόμα και οι πιο αδιάφοροι, εντάξει στη γνώση τους ότι «ένα και ένα κάνουν δύο», πρέπει να τους βοηθήσουμε, να τους καθοδηγήσουμε σε ανακάλυψη άλλης οπτικής, σε πιο ισχυρή, αλλά όχι φανερή αλήθεια, σε πιο κριτική στάση απέναντι στα πράγματα που έχουν μάθει να βλέπουν ως οργανωμένα. Πρέπει να τους καθοδηγήσουμε να εξετάσουν όλο το βάθος και τις περιπτώσεις μιας υπό εξέτασιν έννοιας και να αντιληφθούν εφαρμογές που δεν φαίνονται να έχουν άμεση σχέση με την προς εξέτασιν θεωρία .

Έχοντας αυτόν το γενικό στόχο, θα προσπαθήσω σήμερα να σας παρουσιάσω, ως τρόπο επίτευξής του, από τα μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου, διάφορα παραδείγματα πάνω στην αντίστροφη συνάρτηση, όπου η διερεύνηση, αναιρώντας τη βεβαιότητα, βαθαίνει τη γνώση και, δίνοντας ευκαιρίες στην κριτική σκέψη, δεν ξέρω τι ακριβώς κάνει, αλλά νομίζω πως είναι καλό!

- Διδάσκουμε στην Γ Λυκείου για την αντίστροφη συνάρτηση (σελ. 153-155) «Αν η f αντιστοιχεί το x στο ψ τότε η f^{-1} αντιστοιχεί το ψ στο x. Δηλαδή η f^{-1} είναι μια αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό λέγεται και αντίστροφη συνάρτηση». Διδάσκουμε επίσης ότι «Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία ψ=x που διχοτομεί τις γωνίες xoψ και x΄o΄ψ΄».

- Όταν λοιπόν εμφανίζεται για λύση το πρόβλημα της εύρεσης των κοινών σημείων της μιας συναρτήσεως f και της αντιστρόφου της, έχει γίνει κοινός τόπος στο μυαλό των μαθητών ότι, είτε μας ζητούνται τα κοινά σημεία των συναρτήσεων είτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των συναρτήσεων f και f^{-1} , πρέπει να βρούμε τα κοινά σημεία που περικλείονται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας ψ=x. Βέβαια αυτό είναι το βασικό και το τονίζουμε στη διδασκαλία. Τους καθοδηγούμε να ανατρέχουν σε αυτό ζητώντας να επιλύσουν ασκήσεις της μορφής: (Θεωρούμε τις συναρτήσεις f,g όπου f: $[\frac{1}{2},+\infty)\to[\frac{3}{4},+\infty)$, με $f(x)=x^2-x+1$ και g:$[\frac{3}{4},+\infty)\to[\frac{1}{2},+\infty)$ όπου $g(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{x-\frac{3}{4}}$. Να δειχθεί ότι $f^{-1}(x)=g(x)$ και μετά να λυθεί η εξίσωση: $x^2-x+1=\frac{1}{2}+\sqrt{x-\frac{3}{4}}$). Πρέπει εδώ να επιμείνουμε ότι δεν είναι πάντα έτσι. Δεν τέμνονται οι συναρτήσεις f και f^{-1} μόνο πάνω στην ψ=x. Αυτό ισχύει πάντοτε μόνο όταν η συνάρτηση είναι αύξουσα. Αν η συνάρτηση είναι φθίνουσα, έχει με την αντίστροφή της και άλλα κοινά σημεία εκτός της διχοτόμου της πρώτης γωνίας των αξόνων. Υπενθυμίζω ότι αν η $f:\Delta\to\Re$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής, οι γ.π. των συναρτήσεων f , f^{-1} και ψ =x έχουν ένα **μοναδικό** κοινό σημείο, αλλά η f και f^{-1} κάλλιστα μπορούν να έχουν και άλλα κοινά εκτός της ψ=x. Παράδειγμα: η συνάρτηση $f(x)=1-x^2$, $0\le x\le 1$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση με σύνολο τιμών το [0,1] και έχει αντίστροφη την $f^{-1}=\sqrt{1-x}$, $0\le x\le 1$. Εύκολα οι μαθητές μπορούν να διαπιστώσουν ότι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$, είναι οι $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, x=0 και x=1[33]. Παρατηρούμε επομένως ότι οι κοινές λύσεις δεν ανήκουν όλες στην ευθεία ψ =x, ούτε θα μπορούσε να ισχύει σε μια τέτοια περίπτωση ο νόμος-κανόνας ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι διπλάσιο του εμβαδού που περικλείεται μεταξύ της f και της ευθείας ψ=x.
- Υπάρχουν πολλές ασκήσεις στις οποίες η μονοτονία μιας συνάρτησης είναι βασικό εργαλείο για την εξέταση, ως προς το αν είναι συνάρτηση 1-1, και για την εύρεση της αντιστρόφου.

Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-x$ με $0<\alpha<1$ και $x\in\Re$ (Πανελλήνιες 1992), στην οποία, μετά την μελέτη μονοτονίας, ζητείται λύση της εξίσωσης: $\alpha^{\lambda^2-4}-\alpha^{\lambda-2}=(\lambda^2-4)-(\lambda-2)$. Έχουμε συνηθίσει τους μαθητές στον κλασικό δρόμο: $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε και 1-1. Δεν πρέπει να δώσουμε όμως ένα αντιπαράδειγμα 1-1 συναρτήσεως που να μην είναι γνησίως μονότονη;

Δίνουμε, ως τέτοιο παράδειγμα τη συνάρτηση: f(x)={ x αν $0\le x\le 1$, και 3-x αν $1<x<2$.

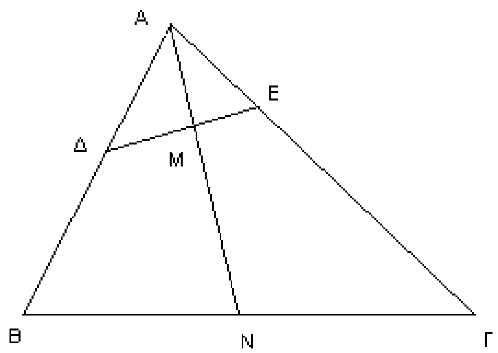
Εδώ εύκολα οι μαθητές μπορούν να διαπιστώσουν ότι είναι 1-1 στους δύο κλάδους και ότι δεν υπάρχουν x_1, x_2, $0<x_1<1<x_2<2$ τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)$. Η συνάρτηση όμως αυτή δεν είναι γνησίως μονότονη[34].

- Αν θελήσουμε να ξεφύγουμε λίγο από την κλασική ασκησιολογία και να αποπειραθούμε μαζί με τους μαθητές διερεύνηση πραγμάτων έξω από τα αναμενόμενα, μπορούμε να θέσουμε το ερώτημα: **Αν Α είναι το πεδίο ορισμού της f**

[33] Για λεπτομερή ανάλυση του θέματος ¨Η εξίσωση $F(x)=F^{-1}(x)$¨ *Ευκλείδης Β' λ.τ. 1/42*

[34] Θα μπορούσαμε βέβαια να αναφέραμε την πρόταση ότι αν μια συνάρτηση είναι 1-1 και συνεχής είναι και γνησίως μονότονη

και B της f^{-1}, έχουν τα A και B τον ίδιο αριθμό στοιχείων; Το πράγμα θα φανεί παράξενο με την πρώτη ματιά (Ιδίως αν καλλιεργήσουμε λίγο την «αβεβαιότητα» αναφέροντας το αμέσως επόμενο παράδειγμα αντιστρόφων συναρτήσεων που υπάρχει στο βιβλίο, της e^x και της lnx. Πώς είναι δυνατόν το σύνολο $(0, +\infty)$ να είναι «ίσο» με το $\Re$.)
Μπορούμε λοιπόν να εξηγήσουμε, φέρνοντας ένα παράδειγμα δύο πεπερασμένων συνόλων με ένα διάγραμμα Venn, ότι, όταν έχουμε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων, τα δύο σύνολα θα είναι ισοδύναμα και οπωσδήποτε θα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Τι γίνεται όμως με τα απειροσύνολα; Μπορούμε λοιπόν νομίζω, χωρίς να επεκταθούμε σε λεπτομέρειες περί αριθμησίμων και μη συνόλων, να εξηγήσουμε πώς ένα σύνολο μπορεί να είναι ισοδύναμο με ένα γνήσιο υποσύνολό του όπως το A={1,2,3,...} με το B={2,4,6,...} και ναι μεν δεν μπορούμε να αριθμήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς, αλλά μπορεί να ορισθεί μια 1-1 συνάρτηση που να αντιστοιχεί κάθε πραγματικό αριθμό έναν από ένα γνήσιο υποσύνολό του όπως γίνεται και στο παράδειγμα της lnx που αναφέρθηκε προηγούμενα..
Αν υπάρχει χρόνος (και μπορούμε να κανονίσουμε να υπάρχει) παρεκβαίνοντας λίγο θα μπορούσαμε να τους δώσουμε ως άσκηση και ένα γεωμετρικό παράδειγμα:
Πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα σημεία ενός ευθυγράμμου τμήματος μπορούν να αντιστοιχηθούν με τα σημεία ενός άλλου τμήματος με διαφορετικό μήκος;



(Αν έχουμε δύο άνισα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και ΔΕ, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε οποιοδήποτε σημείο Μ του ΔΕ ένα σημείο Ν του ΒΓ. Διότι, αν τα ΒΔ και ΓΕ τέμνονται στο Α, σε κάθε σημείο Μ του ΔΕ αντιστοιχούμε την τομή Ν του ΒΓ και ΑΜ. Έτσι τα δύο ευθύγραμμα τμήματα αποδεικνύεται ότι έχουν τον ίδιο αριθμό σημείων.)[35]

Για να αισθανόμαστε και να ξέρουμε πως είμαστε χρήσιμοι δάσκαλοι, για να προσφέρουμε στους μαθητές μας (και να συνειδητοποιούμε περισσότερο και οι ίδιοι) τη σφαιρική και εξαντλητική διερεύνηση των αντικειμένων που διδάσκουμε, αξίζει τον κόπο, κυρίες και κύριοι συνάδελφοι, να κάνουμε ό,τι μπορούμε για να ασκούμε τη μαθηματική σκέψη. Έτσι θα βοηθήσουμε και τα παιδιά (και τους εαυτούς μας...) να αντιμετωπίζουν κριτικά όλες τις συνιστώσες ενός θέματος και να μην είναι απλοί διεκπεραιωτές διαδικασιών.

[35] Για περισσότερες λεπτομέρειες: Ε. Ντζαχρήστος ¨Η έννοια του απείρου στην Ευκλείδεια Γεωμετρία¨ *Μαθηματική Επιθεώρηση* τ.59

Μαθηματικό Trivium

Στον Ανδρέα Βαλαδάκη
Ζήνων Λυγάτσικας
Καθ. Βαρβακείου Σχολής

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εξέλιξη των μαθηματικών έχει ξεπεράσει προ πολλού τις παραδοσιακές ισορροπίες στη διδασκαλία. Δεν έχετε παρά να σκεφτείτε την πρόοδο της τεχνολογίας της πληροφορικής, τους επιστημονικούς τομείς τους προσφάτα επηρεασμένους από τα μαθηματικά όπως η οικονομία, την μοντελοποίηση και ειδικότερα την μοντελοποίηση της ανθρώπινης διάνοιας (δες για περισσότερα στο άρθρο του D. Mumford[36]). Η εξέλιξη αυτή θέτει υπο ερώτηση την κουλτούρα της παραδοσιακής διδασκαλίας. Έχοντας λοιπόν υπ'όψιν αυτό το πλαίσο καθώς και τον ουσιαστικό διάλογο που άρχισε στον χώρο της Ευρώπης για το κοινό πλαίσιο των διπλωμάτων στα Μαθηματικά[37], ας δούμε τρείς αρχές που νομίζουμε οτι μπορούν, με τις υπάρχουσες ελληνικές συνθήκες, να αποτελέσουν ένα πρώτο πειραματικό στάδιο για τον ανασχεδιασμό της θεματολογίας της διδασκαλίας των μαθηματικών στην δευτεροβάθμια εκπ/ση.

1. Αναγνώριση της πολυσημίας του μαθηματικού αντικειμένου, μέσα σε μαθηματικούς τομείς (άλγεβρα-γεωμετρία, κ.λ.π.) και άλλες επιστημονικές περιοχές.
2. Αναπαραγωγή, οργάνωση και ταξινόμηση του μαθηματικού αντικειμένου.
3. Αλλαγή του τρόπου αξιολόγησης του μαθητού.

Σημειώνουμε ότι τα σημεία 1 και 2 είναι δυσδιάκριτα στη παρούσα διδακτέα ύλη. Στο άρθρο αυτό θα ασχοληθούμε μόνο με το πρώτο. Η αναγνώριση της πολυσημίας είναι βασική για την κατανόηση της μαθηματικής επιστήμης, ίσως και ένα από τα κλειδιά των μαθηματικών, όπως θα έλεγε ο Poincare. Με άλλα λόγια: υπάρχουν προβλήματα των οποίων η λύση μπορεί να απλωθεί σε πολλές περιοχές όπως ανάλυση, άλγεβρα, γεωμετρία κ.λ.π.
Σε τι θα μπορούσαν όλα αυτά να φανούν χρήσιμα και μάλιστα στο επίπεδο των μαθηματικών του Λυκείου; Όλο αυτό το σκηνικό θα το παρουσιάσω με μια δραστηριότητα που προτείνω στους μαθητές μου για να κατανοήσουν:

1. τη μαθηματική αφαίρεση,
2. την αναγκαιότητας της ύπαρξης μαθηματικών περιοχών – άλγεβρα – γεωμετρία – ανάλυση – θεωρία αριθμών,
3. τα εργαλεία των διαφόρων αυτών περιοχών.

Μερικά προβλήματα στα μαθηματικά είναι διαχρονικά, διακλαδικά και διεπιστημονικού χαρακτήρα. Διαχρονικά γιατί σε κάθε επίπεδο σπουδών ο μαθητής, ο φοιτητής, ο ερευνητής, μπορεί να επεξεργαστεί ένα στάδιό του. Διακλαδικά, γιατί μπορεί να προσεγγισθεί από πολλούς μαθηματικούς κλάδους (όπως ανάλυση, άλγεβρα, γεωμετρία κ.λ.π.) και διεπιστημονικά γιατί μπορεί να είναι μοντέλο για προβλήματα σε άλλες επιστήμες.

[36] **Mumford D.** (2000). The dawning of the age of stochasticity, in V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax and B. Mazur (Eds) *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, A.M.S.
[37] **Groupe Tuning de Maths** : http://www.europa.eu.int/comm/education/tuning.html

Στο άρθρο αυτό επιλέξαμε ένα πρόβλημα που σχετίζεται με τα εργαλεία της απόδειξης που έδωσε ο Wiles στο Μεγάλο Θεώρημα του Fermat. Ένα άλλο πρόβλημα παρουσιάσαμε το 2004 στη διημερίδα «Σύχρονη διδακτική και Επιμόρφωση» $1^{ο}$ Ε. Λ. Ελληνικού, με τίτλο Δύο ερωτήματα – Συστήματα Συμβολικού Υπολογισμού.

Το πρόβλημα μας αφορά την εύρεση ρητών σημείων (σημείων με ρητές συντεταγμένες) σε κύκλο $x^2 + y^2 = r^2$. Η άσκηση δώθηκε στη κατεύθυνση της Β΄Λυκείου μετά το πέρας του κεφαλαίου που αφορά τις κωνικές τομές και ενσωμάτωσε όλο το κατακερματισμένο επόμενο κεφάλαιο της θεωρίας αριθμών.

Πρίν αναπτύξουμε το θέμα της δραστηριότητας ας δούμε λίγο πως και πιο στάδιο της απόδειξης του Wiles απομονώσαμε.

<u>Ιστορία</u>

Όλοι γνωρίζουμε την απόδειξη του **Wiles** στον ισχυρισμό του **Fermat** ότι:

> **για ένα ακέραιο n μεγαλύτερο ή ίσο του 3, δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι a, b και c έτσι ώστε : $a^n + b^n = c^n$.**

Όπως συνηθίζεται σήμερα στη Μαθηματική έρευνα έτσι και ο Wiles χρησιμοποίησε avant-garde εργαλεία συνδυάζοντας διαφορετικούς μαθηματικούς τομείς (άλγεβρα, γεωμετρία, ανάλυση κλπ). Η απόδειξη – η οποία είναι πιο ενδιαφέρουσα από το ίδιο το θεώρημα – είναι φυσικά αρκετά δύσκολο να εξηγηθεί στους μαθητές μας αλλά υπάρχει κάποιο σημείο όπου μπορούμε κάλλιστα να το προσεγγίσουμε στη τάξη. Το σημείο αυτό είναι το πρώτο στάδιο του ισχυρισμού Mordell.

<u>Εικασία Mordell</u>

Στη θεωρία αριθμών η εικασία του Mordell μελετάει βασικά αποτελέσματα ερευνώντας τις ρητές ρίζες Διοφαντικών εξισώσεων. Η εικασία αυτή αποδείχθηκε από τον Falting το 1983 (**Fields Medal),** και από τότε αναφέρεται στη βιβλιογραφία σαν θεώρημα Falting.

Υποθέστε ότι έχουμε μια αλγεβρική καμπύλη *C* ορισμένη στο **Q** (πρόκειται για ένα πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές). Υποθέστε επίσης ότι η X είναι μη-ιδιάζουσα (non-singular), δεν πρόκειται όμως για ένα υπαρκτό περιορισμό, μπορεί και να απαλειφθεί. Το ερώτημα είναι το εξής: <u>πόσα ρητά σημεία έχει;</u>

Η απάντηση εξαρτάται από το γένος της καμπύλης. Υπάρχουν τρείς περιπτώσεις. Να είναι γένους 0, 1 ή μεγαλύτερο. Για καμπύλες γένους 0 είναι ήδη από παλιά γνωστή η απάντηση. Ο Mordell έλυσε το πρόβλημα για καμπύλες γένους 1 και ισχυρίστηκε τη γνωστή πρόταση που φέρει το όνομα εικασία Mordell, για καμπύλες γένους > 1.

Το πλήρες αποτέλεσμα είναι το εξής:

Έστω X μια μη-ιδιάζουσα καμπύλη στους ρητούς με γένος g[38]. Τότε ο αριθμός των ρητών σημείων είναι ο εξής:

α) Για την περίπτωση g = 0 (η *C* είναι μια κωνική): κανένα ή άπειρα σημεία.

[38] Το γένος μιας καμπύλης είναι ο αριθμός των οπών μιας καμπύλης.

β) Για την περίπτωση g = 1 (η *C* είναι μια ελλειπτική καμπύλη[39]) κανένα σημείο η ένας πεπερασμένος αριθμός σημείων με μια συγκεκριμμένη δομή (Theorem Mordell-Weil).

γ) Για την περίπτωση g = 2, έχουμε το θεώρημα Falting.

Η δραστηριότητα που προτείνουμε αφορά τη περίπτωση α). Η έρευνα των σημείων μιας καμπύλης με ρητές συντεταγμένες έχει αναπτυχθεί θεαματικά τα τελευταία χρόνια σε διάφορους Μαθηματικούς τομείς. Ας σημειώσουμε έναν που θα μπορούσε να μας φανεί χρήσιμος στο μέλλον.

Διακριτή Γεωμετρία: Οι οθόνες των υπολογιστών έχουν έναν πεπερασμένο αριθμό σημείων τα οποία θεωρούνται διακριτά σε αντίθεση με τον συνεχή χαρακτήρα των σημείων του ευκλειδίου χώρου. **Ένα πρόβλημα συναντάμε στην επιλογή της βέλτιστης διακριτής προσέγγισης ενός συνεχούς συνόλου όπως για παράδειγμα η αναπαράσταση μιας καμπύλης.** Έτσι η επιλογή των σημείων με ρητές συντεταγμένες οι οποίες μετά από μια κατάλληλη επιλογή της κλίμακας μπορεί να γίνουν ακέραιες, είναι μια ικανοποιητική επιλογή. Αυτό όμως θα αποτελέσει το θέμα μιας άλλης εργασίας.

Άρα λοιπόν, η δραστηριότητά μας μπορεί να θεωρηθεί το πρώτο στάδιο στη προσέγγιση ενός πραγματικά ωραίου προβλήματος με διαχρονική και διακλαδική ισχή.

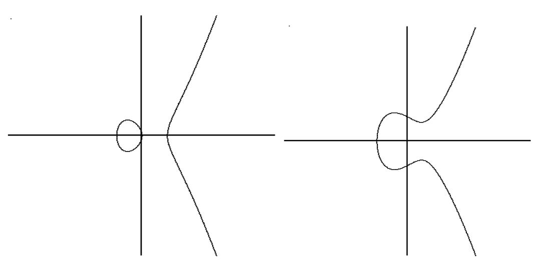
Η ανατομία του προβλήματος

Το αντικείμενο του προβλήματος είναι η εύρεση των ρητών ριζών εξίσωσης. Από τη Γεωμετρία θα δανειστούμε τη μεθοδολογία παραμετρικοποίησης καμπύλης και τον χειρισμό των διαγραμμάτων για τη λύση εξίσωσης. Θα δούμε επίσης τη γεωμετρική οργάνωση ριζών μιας τέτοιας εξίσωσης. Από τη θεωρία Αριθμών θα χρειαστούμε τη διαιρετότητα ακεραίων, τον μέγιστο κοινό διαιρέτη και τέλος, θα μετρήσουμε την πυκνότητα των ρητών ριζών καμπύλης με εργαλεία της Ανάλυσης.

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

(Το πείραμα)

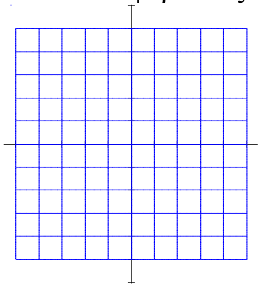
[39] Μία **ελλειπτική καμπύλη** είναι το γράφημα εξισώσεων της μορφής $\mathbf{y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c}$ **με** $\mathbf{a, b, c \in Q}$. (το όνομα οφείλεται στο ελλειπτικό ολοκλήρωμα. Μια ελλειπτική καμπύλη πάνω στο **C** είναι για παράδειγμα ένας χώρος Riemman). Δίνουμε το γράφημα δύο τέτοιων καμπυλών.



$y^2=x^3-1$ $\qquad$ $y^2=x^3-x+1$

Σχεδιάστε έναν κύκλο *C* με κέντρο ένα σημείο Ο και ακτίνα 5 μονάδες στον παρακάτω πίνακα.

- Βρείτε 12 σημεία του κύκλου με ακέραιες συντεταγμένες.
- Σημειώστε τα σημεία αυτά και φέρτε τις αντίστοιχες ακτίνες.



- Σχεδιάστε έναν άλλο κύκλο D με κέντρο το Ο και ακτίνα 1 μονάδα.
- Σημειώστε 12 σημεία του κύκλου D με ακέραιες συντεταγμένες.
- Βρείτε μια σχέση των ακεραίων σημείων του κύκλου C με τον κύκλο D.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Τα 12 σημεία του κύκλου C είναι:

(0,5) (0,-5) (5,0) (-5,0)
(3,4) (-3,4) (3,-4) (-3,-4)
(4,3) (-4,3) (4,-3) (-4,-3)

2. Ο μαθητής πρέπει να παρατηρήσει ότι τα σημεία του κύκλου D με ακέραιες συντεταγμένες είναι τα σημεία τομής του κύκλου με τις ακτίνες των σημείων του κύκλου C. Αυτά είναι:

(0,1) (0,-1) (1,0) (-1,0)
(3/5,4/5) (-3/5,4/5) (3/5,-4/5) (-3/5,-4/5)
(4/5,3/5) (-4/5,3/5) (4/5,-3/5) (-4/5,-3/5)

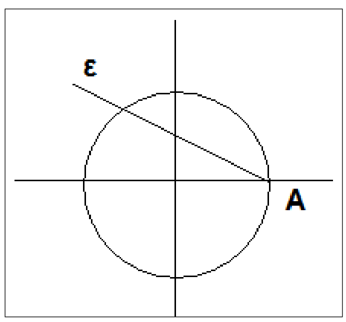
3. Η αλγεβρική σχέση που συνδέει τα σημεία του D με αυτά του C είναι η εξής:

Αν (α,β) ένα από τα 12 σημεία του C. τότε $\alpha^2+\beta^2=5^2$. Τότε $\frac{\alpha^2}{5^2}+\frac{\beta^2}{5^2}=1$, και έτσι το σημείο (α/5,β/5) είναι σημείο του D.

Αυτό είναι μια παρατήρηρση που θα μας είναι χρήσιμη στην εύρεση των ρητών σημείων του μοναδιαίου κύκλου.

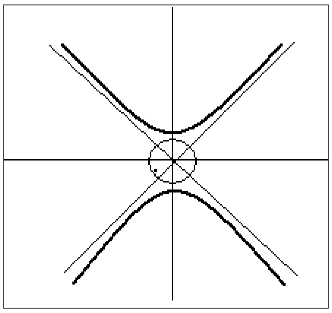
3. <u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2</u>

Έστω $x^2 + y^2 = 1$ ο μοναδιαίος κύκλος. Να βρείτε τη μορφή των ρητών n και m έτσι ώστε το σημείο (n,m) να είναι σημείο του κύκλου.



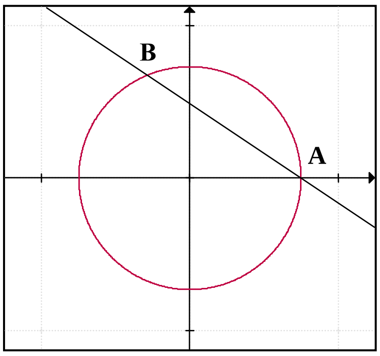
Υπόδειξη: Ένα ρητό σημείο του κύκλου είναι το Α(1,0). Μια ευθεία που διέρχεται από το Α και τέμνει τον κύκλο στο Β έχει εξίσωση y=λ(x-1). Απαιτήστε το Β να είναι ένα ρητό σημείο.

Βρείτε τα ρητά σημεία της υπερβολής $x^2+1 = y^2$. Τι σχέση υπάρχει με τα ρητά σημεία του μοναδιαίου κύκλου;



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Πρόκειται για ρητή παραμετρικοποίηση του κύκλου.



Έστω x, y, z ∈ ℕ με z ≠ 0, τέτοιο ώστε $\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}=1$

⇔ $x^2+y^2 = z^2$. (1)

Η εύρεση των ακεραίων (x,y,z) έτσι ώστε να ικανοποιείται η (1) είναι γνωστό πρόβλημα με πολύ γνωστή επίσης λύση[40].

Η (1) μετασχηματίζεται στην $y^2 = z^2 - x^2 \Leftrightarrow y^2 = (z+x)(z-x)$. Εύκολα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι αριθμοί z+x και z-x είναι άρτιοι. Άρα:

$$\frac{x+z}{2}\times\frac{z-x}{2}=\left(\frac{y}{2}\right)^2$$

Αφού (x,y)=1 (επειδή $y^2 = z^2 - x^2$) οι αριθμοί (x+z)/2 και (z-x)/2 είναι πρώτοι μεταξύ τους. Θέτω $u^2=\frac{z+x}{2}$ και $v^2=\frac{z-x}{2}$ όπου u,v > 0 και (u,v) = 1. Είναι εύκολο να δούμε ότι $x = u^2 – v^2$, y = 2uv και $z= u^2 + v^2$, είναι μια λύση της (1).

Αυτή είναι η γνωστή αριθμητική λύση. Ας δούμε τώρα μια απόδειξη προσαρμοσμένη στην ύλη της Αναλυτικής Γεωμετρίας της Β τάξης.

Το σημείο Α(1,0) είναι ένα σημείο του κύκλου με ρητούς συντελεστές. Έστω (ε) : y = α (x-1) με α ∈ **R**. Ψάχνουμε το δεύτερο σημείο Β που είναι η τομή της ευθείας και του κύκλου. Λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=\alpha(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \{x=1, y=0 \\ \begin{cases} x=\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1} \\ y=\dfrac{-2\alpha}{\alpha^2+1} \end{cases} \end{cases} \quad (*)$$

---

[40] Δές **G.H. Hardy and E.M. Wright**: An introduction to the theory of numbers Fifth edition, Clarendon Press – Oxford, 1979, σελίδα 191.

η πρώτη λύση είναι το σημείο Α. Το Β για να έχει ρητές συντεταγμένες πρέπει α $\in$**Q**.

Έστω $\alpha = \frac{p}{q}$. Τότε η (*) γίνεται:

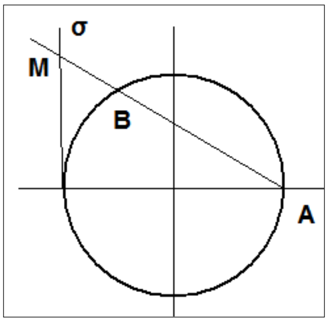
$$(\Sigma) : \begin{cases} x = \dfrac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}, \quad y = \dfrac{-2pq}{p^2 + q^2} \end{cases}$$

Αν θέσω : $X = p^2 - q^2$, $Y = 2pq$ και $Z = p^2 + q^2$

έχω την **<u>πυθαγόρεια τριάδα</u>**[41]**.** Εύκολα επαληθεύω ότι $X^2 + Y^2 = Z^2$.

<u>Συμπέρασμα : Ο κύκλος μας έχει άπειρα ρητά σημεία για x και y από τη σχέση (Σ).</u>

2. Η χάραξη της βοηθητικής ευθείας είναι γνωστή τακτική παραμετρικοποίησης μιας καμπύλης. Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο βρίσκοντας την στερεογραφική προβολή Μ του Β πάνω στην εφαπτομένη σ, με κέντρο το Α.



Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής:

Έστω M(-1, 2t) ένα κινητό σημείο της κάθετης εφαπτομένης σ του κύκλου με t $\in$ **Q**, το 2 δεν έχει ιδιαίτερη αιτία να υπάρχει. Αν Β έχει συντεταγμένες (x,y), τότε y = t (1 – x). Στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως παραπάνω.

3. Η απεικόνιση **Q** $\rightarrow$ {ρητά σημεία της $x^2+y^2=1$, εκτός του (1,0) }, είναι 1-1. Η απεικόνιση αναλυτικά είναι η

$$t \rightarrow Q_t = \left(\frac{t^2 - 1}{1 + t^2}, \frac{-2t}{1 + t^2} \right)$$

Πράγματι, έστω ο ρητός t, τότε αν κατασκευάσουμε το ρητό σημείο της καμπύλης Q_t, η ευθεία AQ_t , όπου Α το σημείο (1,0), έχει κλίση t, και αντιστρόφως. Αν Q ($\neq$A) ρητό σημείο του κύκλου έτσι ώστε AQ να έχει κλίση t, το Q τότε συμπίπτει με το Q_t γιατί η AQ_t έχει κλίση επίσης t.

4. Πόσα τέτοια «ωραία» σημεία μπορούμε να βρούμε στον κύκλο; Αν πάρουμε ένα διάστημα, όσο μικρό θέλουμε στη περιφέρεια, μπορούμε να βρούμε ένα ρητό σημείο στο εσωτερικό του διαστήματος; Αυτό είναι το πέρασμα του προβλήματός μας στην ανάλυση το οποίο θα παρουσιάσουμε μελλοντικά.

Προς το παρών μπορούμε να λύσουμε ένα πιο απλό πρόβλημα. Θα δείξουμε ότι για κάθε σημείο Α του κύκλου μπορώ να βρω δύο ακέραιους u και v, έτσι ώστε το σημείο με συντεταγμένες της μορφής (x,y) της παραπάνω σχέσης (Σ), προσεγγίζει όσο θέλουμε το Α.

Έστω r ένας πραγματικός ίσος με την εφ(θ), όπου θ η γωνία που σχηματίζει ένα σημείο Β του κύκλου. Μπορούμε να θεωρήσουμε τις εξισώσεις στο (Σ) σαν τις παραμετρικές εξισώσεις του σημείου Β, όπου u και v όχι αναγκαστικά ακέραιοι. Τότε:

$$r = \frac{2uv}{u^2 - v^2} \Leftrightarrow rv^2 + 2uv - ru^2 = 0$$

---

[41] Δές επίσης σελ. 19 εφ. 1 βιβλίο Α Λυκείου, Ανδρεαδάκη, κ.α. ή Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης Β Λυκείου Αδαμόπουλος Λ. κ.α. σελ. 170.

Λύνοντας την δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς v και παίρνοντας το θετικό v, έχω:

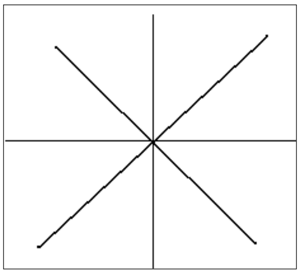
$$\frac{v}{u}=\frac{\sqrt{r^2+1}-1}{r}$$

Αν θέλω τα u και v να είναι ακέραιοι, τότε με την μέθοδο των συνεχιζόμενων κλασμάτων (continued fraction) μπορώ να βρώ μια ρητή προσέγγιση όσο κλειστή θέλω στο A. Έτσι για παράδειγμα αν θ=π/4, το r=1, και u=70 , v = 29.

5. Αν $x,y,z \in \mathbb{Z}$ με $x^2 + y^2 = z^2$, θέτω $u = x/y$ και $v = z/y$, τότε $u^2+1=v^2$. Έτσι για να βρούμε τα ρητά σημεία του κύκλου, βρίσκουμε αυτομάτως τα ρητά σημεία της υπερβολής και αντιστρόφως.

□

1. <u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3</u>



Βρείτε τα ρητά σημεία της καμπύλης $x^2 = 2y^2$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Η $x^2 = 2y^2$ γράφεται ισοδύναμα: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2$. Η τελευταία εξίσωση είναι γνωστό ότι δεν έχει ακέραιες λύσεις αν $y \neq 0$ (δες βιβλίο Α΄ Λυκείου). Η $x^2 = 2y^2$ λοιπόν δεν έχει ρητά σημεία εκτός του (0,0).

□

2. <u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4</u>

Έστω $x^2 + y^2 = 2$. Να βρείτε τη μορφή των ρητών n και m έτσι ώστε το σημείο (n,m) να είναι σημείο του κύκλου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Έστω $x, y, z \in \mathbb{N}$ με $z \neq 0$, τέτοιο ώστε $\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}=2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2z^2$ (1).

Αν θέσω $x = u + v$ και $y = u - v$ (**), η (1) γίνεται $u^2 + v^2 = z^2$ (2). Άρα κάθε πυθαγόρεια τριάδα ακεραίων είναι λύση της (2). Έτσι η τριάδα :

$$u = q^2 - p^2,\quad v = 2pq \quad \& \quad z = p^2 + q^2 \text{ με } p, q \in \mathbb{N}$$

είναι μια λύση της (2). Τότε σύμφωνα με τον μετασχηματισμό (**) έχω:

$$\begin{cases} x = q^2 - p^2 + 2pq \\ y = q^2 - p^2 - 2pq \\ z = p^2 + q^2 \end{cases}$$

η οποία είναι λύση της (1).

Συνεπώς μια ρητή λύση της αρχικής εξίσωσης $x^2 + y^2 = 2$ θα είναι η

$$(\Sigma)\ :\ \begin{cases} x = \dfrac{q^2 - p^2 + 2pq}{p^2 + q^2} \\ y = \dfrac{q^2 - p^2 - 2pq}{p^2 + q^2} \end{cases}$$

<u>Συμπέρασμα: Ο κύκλος έχει άπειρα ρητά σημεία που δίνονται από τη σχέση (Σ).</u>

□

3. ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

1. **Έστω $x^2 + y^2 = 3$. Να εξετάσετε αν υπάρχουν ρητά σημεία στον κύκλο.**
2. **Δείξτε ότι ο $\sqrt{3}$ είναι άρρητος.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν x, y και z $\in \subseteq$, τότε $\left(\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}=3\right) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3z^2$ (1). Αν τα x, y και z έχουν κοινό διαιρέτη $\neq 1$, διαιρούμε τα δύο μέλη της (1) με αυτόν, οπότε προκύπτει μια εξίσωση όπου (x,y,z) = 1. Αν (x,y,z) είναι μια λύση της (1) τότε ένας το λιγότερο από τους x, y είναι περιτός αν όχι, το 2 θα είναι διαιρέτης των x, y και z.

1. Έστω x=2p και y=2q+1. Τότε η (1)
$$4p^2 + 4q^2 + 4q + 1 = 3z^2$$
Άρα z είναι αναγκαστικά περιτός, έστω z = 2r + 1 τότε $4p^2 + 4q^2 + 4q - 12r^2 - 12r = 2$, αδύνατο, το 4 διαιρεί το 1^o μέλος αλλά όχι το 2^o. Άρα (1) δεν έχει ακέραιες λύσεις με x=2p και y=2q+1.
2. Έστω x=2p+1 και y=2q+1. Τότε η (1) γίνεται
$$4p^2 + 4p + 4q^2 + 4q + 2 = 3z^2$$
άρα z = 2r και
$$(1) \Rightarrow 4p^2 + 4p + 4q^2 + 4q - 12r^2 = -2$$
αδύνατο. Άρα η (1) δεν έχει ακέραιες λύσεις με x=2p+1 και y=2q+1.

Συμπέρασμα: Ο κύκλος δεν έχει ρητά σημεία.

2. Το αποτέλεσμα στο 1. είναι ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα από μια ευθεία απόδειξη του ότι το $\sqrt{3}$ είναι άρρητος.

□

4. ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6 (Ακέραια Σημεία πάνω σε ευθεία)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ : Έστω $ax + by = c$ (1) ευθεία. Να βρείτε τη μορφή των ακεραίων n και m έτσι ώστε το σημείο (n,m) να είναι σημείο της ευθείας. ***(Διοφαντική εξίσωση)***

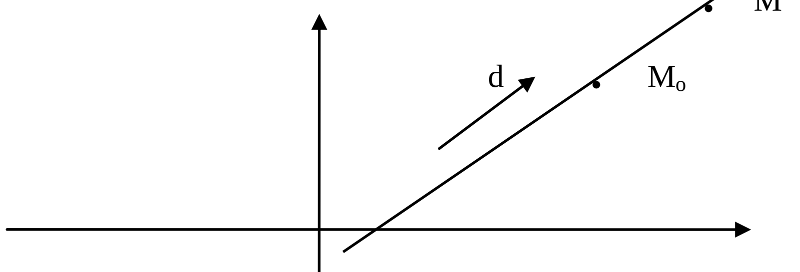
Μπορείτε να δείτε, πρίν περάσουμε στη γενική λύση, τα εξής παραδείγματα: 3x – 5y = 13, 2 x – 4 y = 12, 2 x + 4 y = 3.

Υποθέτω (a,b,c) = 1. Αν όχι διαιρώ 1^o και 2^o μέλος με αυτόν. Αν (a,b) =d $\neq$ 1, και d δεν διαιρεί τον c, τότε δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις. Υποθέτω λοιπόν ότι η εξίσωση της ευθείας έχει (a,b,c) = 1. Αφού (a,b) = 1, υπάρχουν u και v ακέραιοι (θεώρημα του **Bezout)** έτσι ώστε

$$a\,u + b\,v = 1 \Leftrightarrow a\,(c\,u) + b\,(c\,v) = c \qquad (2)$$

Έστω M_0 (x_0,y_0) σημείο της ευθείας με ακέραιες συντεταγμένες και $\vec{d} = (-b, a)$ ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία με τις πιο μικρές (απολύτως) ακέραιες συντεταγμένες. Αν M(x,y) ένα άλλο σημείο της ευθείας τότε

$$\overrightarrow{M_0M} = k\vec{d} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = -kb \Leftrightarrow x = x_0 - kb \\ y - y_0 = ka \Leftrightarrow y = y_0 + ka \end{cases} \quad (*)$$



Θεωρήστε τώρα σαν $M_0(cu,cv)$ με ακέραιες συντεταγμένες απο σχέση (2). Αν αντικαταστήσω στη σχέση (*) έχω:

$$\begin{cases} x = cu - kb \\ y = cv + ka \end{cases} \quad (**), \text{ k ακέραιος}$$

<u>Συμπέρασμα: Η ευθεία έχει ακέραια σημεία (**) αν (a,b,c)=1.</u> □

5. <u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</u>

1. Η ενδιαφέρουσα ιστορία της απόδειξης του θεωρήματος του Fermat περιγράφεται ωραία στο βιβλίο του A. Aczel με τον ελληνικό τίτλο «Πως ο A. Weils έλυσε το τελευταίο θεώρημα του Fermat» των εκδόσεων Τροχαλία. Η μετάφραση είναι του καθηγητού του Βαρβακείου Λυκείου Α. Βαλαδάκη, ο οποίος είχε την ευγενή καλοσύνη να μου το αφιερώσει. Σε ένδειξη ευχαριστίας του αφιερώνω και εγώ με τη σειρά μου το άρθρο.

2. Με ενδιαφέρον παρακολουθήσαμε τον φετεινό διαγωνισμό ΑΡΧΙΜΗΔΗ της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Το τέταρτο θέμα αφορούσε την εύρεση ακεραίων σημείων πάνω σε μια έλλειψη. Η αρχική εξίσωση μετά από παραγοντοποίηση έπαιρνε τη μορφή $x^2 - xy + y^2 = k^2$ (1), η οποία είναι η έλλειψη $\frac{x^2}{\frac{2}{3}k^2} + \frac{y^2}{2k^2} = 1$ (2), μετά από στροφή των αξόνων κατά 45^o. Αυτό απλοποιεί κατά πολύ το πρόβλημα και καθιστά όλη την ευριστική προσπάθεια εντοπισμού φράγματος των x και y περιττή (είναι παρατήρηση στο βιβλίο της κατεύθυνσης στη Β' Λυκείου). Ποιά είναι τα ακέραια σημεία της (2);

3. Η υπερβολή $x^2 - y^2d = 1$, με d φυσικό και όχι τέλειο τετράγωνο έχει

- ρητά σημεία.

(Γενικά έχει άπειρα ρητά σημεία. Η απόδειξη είναι περίπου η ίδια όπως στο Πρόβλημα 2.)

- ακέραια σημεία. (Δύσκολο πρόβλημα, δές θεώρημα Pell-Fermat.)

HOBBITS και ORKS.
Ένα πρόβλημα με τους ήρωες του Tolkien.[42]

Ηλίας Ανδριανός, 2ο Πειραματικό Λύκειο Αθηνών
Παναγιώτα Κοταρίνου, 2ο Λύκειο Ιλίου
Αλίκη Μπασιάκου, Ζάννειο Πειραματικό Γυμνάσιο Πειραιά

Καθηγητές Μαθηματικών, M.ed. Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών από το Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών.

Κίμων Κοντώσης και **Φώτης Καλαφάτης**

Φοιτητές του Τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Αθηνών

Περίληψη

Στην εισήγηση περιγράφεται μια διδακτική πρόταση, με σκοπό την εισαγωγή της επαγωγικής διαδικασίας σε μαθητές γυμνασίου και της μαθηματικής επαγωγής σε μαθητές Λυκείου. Η διδασκαλία αυτή βασίζεται σε ένα πρόβλημα που χρησιμοποιήθηκε από τους ERNST KAI NEWEL το 1969 στην προσομοίωση των υπολογιστικών μοντέλων σκέψης με ηλεκτρονικό υπολογιστή (Hayes Nicky,1998) και είναι το εξής:

Εφτά Hobbits έχουν συλλάβει εφτά Orks στα σύνορα του Shire. Πρέπει να περάσουν τους αιχμαλώτους τους από ένα ποτάμι, το Brandywine, για να τους μεταφέρουν στο αστυνομικό τμήμα του Bree. Βρίσκονται στην όχθη Α του ποταμού και έχουν μία βάρκα, η οποία μπορεί να μεταφέρει στην όχθη Β μόνον δύο άτομα κάθε φορά. Η μεταφορά πρέπει να γίνει με τέτοιον τρόπο ώστε να είναι εξασφαλισμένο ότι ανά πάσα στιγμή ο αριθμός των Hobbits που θα βρίσκονται σε κάθε όχθη να είναι μεγαλύτερος ή το πολύ-πολύ ίσος με τον αριθμό των Orks που θα βρίσκονται στην ίδια όχθη. Αν υπήρχαν περισσότεροι Orks από ότι Hobbits σε οποιαδήποτε στιγμή, οι Orks θα υπερίσχυαν των Hobbits και θα τους σκότωναν (Hayes Nicky,1998).

Το πρόβλημα συνίσταται στον προσδιορισμό του **ελαχίστου** πλήθους των μεταβάσεων που πρέπει να γίνουν συνολικά από την μια όχθη ως την άλλη, ώστε να περάσουν το ποτάμι χωρίς να πάθει κανείς τίποτε. Το πλήθος αυτό εξαρτάται από το πλήθος των Hobbits και Orks που υπάρχουν. Επομένως το πρόβλημα προσφέρεται για την εισαγωγή της έννοιας της **επαγωγής** και εν συνεχεία της **μαθηματικής επαγωγής**.

Ο διδακτικός στόχος είναι να αντιληφθούν οι μαθητές ότι η **επαγωγή** είναι η μέθοδος της ανακάλυψης γενικών νόμων με την παρατήρηση και το συνδυασμό ειδικών περιπτώσεων, ενώ η **μαθηματική επαγωγή** είναι μέθοδος απόδειξης που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά (Polya, 1973, σελ.114).

[42] Η εισήγηση στηρίχτηκε σε εργασία που έγινε κατά το χειμερινό εξάμηνο 2000-2001 στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών του Μαθηματικού Τμήματος του Ε. Κ. Πανεπιστημίου, στα πλαίσια του μαθήματος «Θέματα Ειδικής Διδακτικής».

Η εισήγηση (αλλά και η διδακτική πρόταση) συμπληρώνεται από μια ιστορική αναδρομή στην έννοια της επαγωγής. Θεωρούμε ότι η ιστορική συνιστώσα είναι απαραίτητη για την ολοκλήρωση της κατανόησης μιας έννοιας.

Το πρόβλημα συνοδεύεται από interactive software παιχνίδι και απευθύνεται σε μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου.

Εκπαιδευτικό Λογισμικό: Σε γλώσσα Visual Basic 5.0, με χρήση του DirectX8.0.

Εισαγωγή

Έχοντας την πεποίθηση ότι η δημιουργία και η επίλυση προβλημάτων βρίσκεται στην καρδιά της όποιας παιδευτικής διαδικασίας, προσπαθούμε και εμείς μέσα στη σχολική τάξη να εμπλέξουμε τα παιδιά στην επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος.

Με αφορμή ένα ανοιχτό πρόβλημα, το οποίο έχει εν γένει το πλεονέκτημα να ενεργοποιεί τα παιδιά, προσπαθούμε να δημιουργήσουμε μια κατάσταση έρευνας μέσα στην τάξη. Θα καλλιεργήσουμε κατ' αυτόν τον τρόπο τις κατάλληλες συνθήκες, ώστε να αναπτυχθεί η **δημιουργική αμφιβολία** στα παιδιά. Αυτό θα οδηγήσει και στην ανάπτυξη της κριτικής και δημιουργικής τους σκέψης, της φαντασίας τους, της διαίσθησης και της ενόρασης, που είναι σημαντικές συνιστώσες της μαθηματικής σκέψης.

Για να διαπιστώσουμε, όμως, την εμβέλεια και την ποιοτική χροιά των ανοιχτών προβλημάτων ας προσπαθήσουμε να δούμε πρώτα τι καλούμε ανοιχτό πρόβλημα.

Σύμφωνα με τον Schoenfeld «πρόβλημα είναι ένα πλέγμα ερωτημάτων, των οποίων οι απαντήσεις δεν απαιτούν μια διανοητική διαδρομή σ' ένα προκαθορισμένο μονοπάτι σκέψης, αλλά τη δημιουργία αυτού τούτου του μονοπατιού προς τις απαντήσεις».

Η άποψη του Schoenfeld εκφράζεται και από μία ομάδα του IREM της Λυών: «Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά του «ανοιχτού προβλήματος» είναι ότι δεν προκύπτει από την εκφώνηση ούτε η μέθοδος ούτε η λύση» (Κοντογιάννης, 1999 – 2000).

Αυτή ακριβώς είναι και η «αρχή» αναζήτησης της μεθόδου. (Είναι παιδευτικά προτιμότερο να μην περιορίζεται η διαδικασία λύσεως στην άμεση εφαρμογή αποτελεσμάτων πρόσφατα παρουσιασμένων στην τάξη).

Αφού λοιπόν η μέθοδος πορείας προς τις απαντήσεις δεν προδίδεται από την αρχική διατύπωση, ανοίγεται ένας δρόμος για ένα παιδευτικό ταξίδι αναζήτησης μιας κατάλληλης μεθόδου προσέγγισης. Σημασία δεν έχει μόνον η Ιθάκη – που αντιπροσωπεύει τη λύση ή τις λύσεις του προβλήματος – αλλά κυρίως το ταξίδι των μαθητών προς την Ιθάκη.

Οι μαθησιακές διαδρομές και η γόνιμη μαθηματική έρευνα πριν από το τέλος κάνουν το ανοιχτό πρόβλημα αποδοτικό εργαλείο στη διδακτική πράξη και μάλιστα, ανάλογα και με την ηλικία των μαθητών, αποδοτικότερο εκεί όπου οι αναγκαίες διαδικασίες αποκτούν πιο γνήσια χροιά προσομοίωσης στις διαδικασίες του ερευνητή.

Σύμφωνα με την μαθησιακή αρχή του κονστρουκτιβισμού, η γνώση δεν «απορροφάται» παθητικά από το περιβάλλον, αλλά κατασκευάζεται ενεργητικά από το υποκείμενο.

Σ' αυτά τα πλαίσια λοιπόν, δίνουμε στην τάξη το παρακάτω «ανοιχτό πρόβλημα» για να δουλέψουμε σε ομάδες.

Οι Hobbits και οι Orks

Εφτά Hobbits έχουν συλλάβει εφτά Orks στα σύνορα του Shire. Πρέπει να περάσουν τους αιχμαλώτους τους από ένα ποτάμι, το Brandywine, για να τους μεταφέρουν στο αστυνομικό τμήμα του Bree. Βρίσκονται στην όχθη του ποταμού και έχουν μία βάρκα, η οποία μπορεί να μεταφέρει μόνον δύο άτομα κάθε φορά. Η μεταφορά πρέπει να γίνει με τέτοιον τρόπο ώστε να είναι εξασφαλισμένο ότι ανά πάσα στιγμή ο αριθμός των Hobbits που θα βρίσκονται σε κάθε όχθη να είναι μεγαλύτερος ή το πολύ-πολύ ίσος με τον αριθμό των Orks που θα βρίσκονται στην ίδια όχθη. Αν υπήρχαν περισσότεροι Orks από ότι Hobbits σε οποιαδήποτε στιγμή, οι Orks θα υπερίσχυαν των Hobbits και θα τους σκότωναν.

Πώς θα έπρεπε να χειριστούν το πρόβλημα ώστε να περάσουν το ποτάμι χωρίς να πάθει κανείς τίποτε;

Διδακτική πρόταση

Το πρόβλημα έχει μια σαφώς προσδιορισμένη αρχική κατάσταση και μια σαφώς προσδιορισμένη τελική κατάσταση.

Ένας πρώτος στόχος μας θα είναι να κατανοήσουν οι μαθητές ότι η κατάλληλη ερμηνεία των υποθέσεων ενός προβλήματος μπορεί να αποδειχθεί καθοριστική για τη λύση του. Ένας δεύτερος στόχος είναι να αναπτύξουν μια εικασία για τη λύση του προβλήματος μειώνοντας το δεδομένο αριθμό των Hobbits και Orks.

Αρχικά θα αφήσουμε τα παιδιά να ασχοληθούν με το πρόβλημα όπως είναι. Αφού διαπιστώσουν ότι είναι δύσκολο να βρουν μια στρατηγική για την επίλυσή του, θα τα καθοδηγήσουμε με κατάλληλες ερωτήσεις.

1η Ερώτηση

Θα μπορούσατε να λύσετε το πρόβλημα αν είχαμε μόνον έναν Hobbit και έναν Ork στην όχθη Α; (Όχθη Α ονομάζουμε την πρώτη όχθη και όχθη Β την απέναντι όχθη, στην οποία πρέπει να φθάσουν).

Το πρόβλημα αυτό είναι πολύ απλό γιατί χρειάζεται μόνον μία κίνηση της βάρκας. Στη βάρκα επιβιβάζεται το ένα και μοναδικό Hobbit και το ένα και μοναδικό Ork και μεταφέρονται από την όχθη Α στην όχθη Β.

2η Ερώτηση

Αν είχαμε δύο Hobbits και δύο Orks στην όχθη Α, πόσες κινήσεις της βάρκας θα χρειάζονταν για να μεταφερθούν στην όχθη Β;

Εξετάζουμε τα βήματα που πρέπει να γίνουν για να μεταφερθούν οι 2 Hobbits και οι 2 Orks:

1η Κίνηση (Μετάβαση) ⇨

Στη βάρκα επιβιβάζεται το ένα Hobbit και το ένα Ork. Το Hobbit αποβιβάζεται στην όχθη Β.

Όχθη Α	*Βάρκα*	*Όχθη Β*
1 Hobbit 1 Ork	***1 Hobbit 1 Ork***	

1 Hobbit 1 Ork	**1 Ork**	**1 Hobbit**

Στην όχθη Α έχουν απομείνει 1 Hobbit και 1 Ork.
Στην όχθη Β έχει αποβιβαστεί 1 Hobbit.

2η Κίνηση (Επιστροφή) ⇦

Η βάρκα επιστρέφει στην όχθη Α με το ένα Ork, το οποίο δεν αποβιβάζεται.

Όχθη Α	*Βάρκα*	*Όχθη Β*
1 Hobbit 1 Ork	**1 Ork**	**1 Hobbit**

3η Κίνηση (Μετάβαση) ⇨

Στη βάρκα επιβιβάζεται το ένα Ork , το οποίο αποβιβάζεται στην όχθη Β.

Όχθη Α	***Βάρκα***	***Όχθη Β***
1 Hobbit	**2 Ork**	**1 Hobbit**
1 Hobbit	**1 Ork**	**1 Hobbit 1 Ork**

Στην όχθη Α έχει απομείνει 1 Hobbit.
Στην όχθη Β έχουν αποβιβαστεί 1 Hobbit και 1 Ork.

4η Κίνηση (Επιστροφή) ⇦

Η βάρκα επιστρέφει στην όχθη Α με το ένα Ork, το οποίο αποβιβάζεται.

Όχθη Α	*Βάρκα*	*Όχθη Β*
1 Hobbit	**1 Ork**	**1 Hobbit 1 Ork**
1 Hobbit 1 Ork		**1 Hobbit 1 Ork**

Στην όχθη Α υπάρχουν τώρα 1 Hobbit και 1 Ork.
Στην όχθη Β έχουν αποβιβαστεί 1 Hobbit και 1 Ork.

5η Κίνηση (Μετάβαση) ⇨

Η μεταφορά του εναπομείναντος ζευγαριού από την όχθη Α στην όχθη Β, που αντιστοιχεί στην προηγούμενη περίπτωση.

Όχθη Α	*Βάρκα*	*Όχθη Β*
	1 Hobbit 1 Ork	**1 Hobbit 1 Ork**
		2 Hobbit 2 Ork

Μέχρι στιγμής παρατηρούμε ότι, όταν έχουμε παραπάνω από ένα ζευγάρια Hobbits και Orks, ο αριθμός $κ_1$ των κινήσεων της βάρκας για τη μεταφορά του 1ου ζευγαριού Hobbits και Orks από την όχθη Α στην όχθη Β και την επιστροφή της βάρκας στην όχθη Α για να μπορεί να συνεχιστεί η διαδικασία μεταφοράς, είναι σταθερός και ίσος με 4. Μόνον για το τελευταίο ζευγάρι που απομένει στην όχθη Α και πρέπει να μεταφερθεί στην όχθη Β χρειάζεται 1 κίνηση της βάρκας. Άρα:

- Αν $κ_2$ είναι ο αριθμός των κινήσεων της βάρκας για τη μεταφορά 2 ζευγαριών, θα είναι:

$$κ_2 = κ_1 + 1$$

- Αν $κ_3$ είναι ο αριθμός των κινήσεων της βάρκας για τη μεταφορά 3 ζευγαριών, θα είναι:

$$κ_3 = κ_1 + κ_2 = κ_1 + κ_1 + 1 = 2κ_1 + 1.$$

Εύκολα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, αν έχουμε 7 ζευγάρια, ο ζητούμενος αριθμός των κινήσεων της βάρκας θα είναι:

$κ_7 = 6κ_1 + 1$, δηλαδή $κ_7 = 6κ_1 + 1 = 6 \cdot 4 + 1 = 25$ κινήσεις.

Ερώτηση – Δημιουργική αμφιβολία:

«Μπορούμε να βρούμε τώρα τον αριθμό των κινήσεων όταν έχουμε οποιονδήποτε αριθμό ζευγαριών Hobbits και Orks;»

Με αυτόν τον τρόπο εισάγεται η αναγκαιότητα ύπαρξης γενικής αντιμετώπισης του προβλήματος, δηλαδή η μέθοδος της τελείας επαγωγής.

Δικαιούμαστε να υποθέσουμε ότι η τάξη θα καταλήξει στην εξής εικασία:

«Αν έχουμε ν ζευγάρια, ο αριθμός των κινήσεων της βάρκας θα είναι:

$\boldsymbol{κ_ν = 4(ν-1) + 1}$

Στο σημείο αυτό εμφανίζεται **η δημιουργική αμφιβολία** (από την οποία και θα προκύψει η αναγκαιότητα μιας μεθόδου για την επιβεβαίωση, πέραν πάσης αμφιβολίας, της εικασίας):

Πώς είμαστε βέβαιοι ότι η σχέση $\boldsymbol{κ_ν = 4(ν-1) + 1}$, που ισχύει για μερικές συγκεκριμένες (μικρές) τιμές του ν, θα ισχύει αναγκαστικά για κάθε φυσικό αριθμό ν;

Είναι κοινός τόπος ότι πάμπολλες φορές γενικεύουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από μερικές δοκιμές. Είναι αυτό σωστό; Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Ο Euler παρατήρησε ότι ο τύπος $ν^2 + ν + 41$ μας δίνει τους πρώτους αριθμούς για $ν = 0, 1, 2, 3, ..., 39$. Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε το ν με οποιονδήποτε από τους αριθμούς αυτούς προκύπτει πρώτος αριθμός. Αλλά για $ν = 40$ έχουμε

$\boldsymbol{40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot 41}$ σύνθετος αριθμός.

Έτσι προκύπτει με φυσικό τρόπο η ανάγκη για αναζήτηση μιας έγκυρης μεθόδου για την ασφαλή εξαγωγή συμπερασμάτων. Δηλαδή προκύπτει η ερώτηση:

«Πώς πρέπει να ενεργήσουμε για να είμαστε σίγουροι ότι μια τέτοια πρόταση ισχύει για οποιονδήποτε αριθμό ζευγαριών Hobbits και Orks , δηλαδή ότι ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς;»

Την έγκυρη αυτή μέθοδο εξασφαλίζει το επαγωγικό βήμα, το οποίο πρέπει να αποδειχθεί:

Αν ο αριθμός των κινήσεων της βάρκας όταν έχουμε ν ζευγάρια Hobbits και Orks είναι $κ_ν = \boldsymbol{4(ν - 1) + 1}$, τότε ο αριθμός των κινήσεων της βάρκας όταν έχουμε ν +1 ζευγάρια Hobbits και Orks θα είναι $\boldsymbol{κ_{ν+1} = 4ν + 1}$.

Πράγματι, αν έχουμε **ν +1** ζευγάρια Hobbits και Orks, οι κινήσεις για να μεταφερθεί ένα ακόμη ζευγάρι στην απέναντι όχθη είναι και πάλι οι γνωστές 4 κινήσεις.

Άρα $\boldsymbol{κ_{ν+1} = κ_ν + 4 = [4(ν - 1) + 1] + 4 = 4ν + 1}$.

Περιγραφή του λογισμικού

Για την παρουσίαση αυτή κατασκευάστηκε και αναπτύχθηκε από εμάς πρωτότυπο λογισμικό με τίτλο HOBBITS και ORCS. Το λογισμικό αυτό είναι ένα παιχνίδι - εφαρμογή του προβλήματος. Στόχος του είναι τα παιδιά να κατανοήσουν το πρόβλημα και τις μαθηματικές προεκτάσεις του με το παίξιμο του παιχνιδιού αυτού.

Το παιχνίδι αυτό έχει ένα φιλικό και απλό για τα παιδιά περιβάλλον, με χιουμοριστικά στοιχεία. Κατά την εκκίνηση του προγράμματος εμφανίζεται ένα "παράθυρο", μέσα στο οποίο απεικονίζεται ένα τοπίο, με ένα ποτάμι να το χωρίζει στα δύο. Στην αριστερή μεριά του τοπίου βρίσκονται παρατεταγμένα τέσσερα Orks και τέσσερα Hobbits, με ζωγραφισμένες φιγούρες που θυμίζουν τα μυθικά πλάσματα του Tolkien. Στην ίδια όχθη του ποταμού βρίσκεται και μια βάρκα η οποία επιπλέει. Έτσι ξεκινάει ένα παιχνίδι με τέσσερα Hobbits και Orks...

Ο παίχτης διατάζει τα πλάσματα να επιβιβαστούν στη βάρκα ή να αποβιβαστούν από αυτή με ένα απλό κλικ του ποντικιού επάνω τους, ενώ το ίδιο απλά η βάρκα μετακινείται από τη μία όχθη στην άλλη. Η κίνηση κατά το περπάτημα είναι παραστατική με ζωγραφισμένα καρέ, ενώ υπάρχουν και κάποιες "καρτουνίστικες" σκηνές σε περίπτωση νίκης ή ήττας του παιχνιδιού καθώς και ήχοι με χιουμοριστικό χαρακτήρα.

Το λογισμικό έχει τις εξής δυνατότητες:

- Μπορεί να εφαρμοστεί για Ν ζευγάρια Hobbits και Orks.
- Καταμετράει τις κινήσεις της βάρκας.
- Εμφανίζει σχετικό μήνυμα όταν τα παιδιά λύσουν το πρόβλημα με μεγαλύτερο αριθμό κινήσεων από το βέλτιστο.
- Ο χρήστης μπορεί να πάρει πίσω έως και τρεις λάθος κινήσεις.
- Ρυθμίζεται η ταχύτητα του παιχνιδιού (π.χ. ταχύτητα περπατήματος)
- Έχει ενσωματωμένη βοήθεια χρήσης.

Η ανάπτυξη του λογισμικού έγινε σε γλώσσα Visual Basic 5.0, με χρήση του DirectX8.0. Διαθέτει έως 24bit color γραφικά σε ανάλυση τουλάχιστον 800x600.

Ο προγραμματισμός έγινε από τον Κίμωνα Κοντώση και τα γραφικά από τον Φώτη Καλαφάτη.

Ιστορική αναδρομή

Η επαγωγική μέθοδος χρησιμοποιείται σε πολλές επιστήμες, για τη μετάβαση από το μερικό στο γενικό, από τη μερική περίπτωση στο γενικό κανόνα. Παρ' όλ' αυτά η επαγωγική μέθοδος δεν αποδεικνύει την ισχύ του γενικού κανόνα, αλλά απλώς υποδεικνύει τον κανόνα. Βέβαια, αυτό είναι οπωσδήποτε το πρώτο βήμα προς την ανακάλυψη. Όπως αναφέρει ο Polya:

«Στα μαθηματικά, όπως και στις φυσικές επιστήμες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση και την επαγωγή για την ανακάλυψη γενικών νόμων. Υπάρχει όμως μια διαφορά. Στις φυσικές επιστήμες δεν υπάρχει άλλο μέσον υψηλοτέρου κύρους από την παρατήρηση και την επαγωγή, ενώ στα μαθηματικά υπάρχει. Είναι η αυστηρή απόδειξη» (Polya, 1973, σελ.117).

Όπως προκύπτει από τα κείμενα των Νεοπυθαγορείων φιλοσόφων (Ιάμβλιχος, Θέων ο Σμυρνεύς), ήδη από την εποχή των Πυθαγορείων, στα πλαίσια της Θεωρίας Αριθμών, όπως την είχαν αναπτύξει οι Πυθαγόρειοι, εχρησιμοποιείτο μια μορφή ατελούς επαγωγής. Ο Πρόκλος μάλιστα αναφέρει μία πρόταση, στην οποία, με εφαρμογή της γεωμετρικής άλγεβρας στη Θεωρία Αριθμών, γίνεται η απόδειξη του επαγωγικού βήματος, το οποίο είναι και η ουσία της μαθηματικής επαγωγής (Νεγρεπόντης, 2000 – 2001).

Αργότερα, όμως, ο Αριστοτέλης, αν και χρησιμοποιούσε την επαγωγική μέθοδο για την εξαγωγή συμπερασμάτων για το γενικό ξεκινώντας από το μερικό, υπερτόνισε τη σημασία του παραγωγικού συλλογισμού, σύμφωνα με τον οποίον, από την αλήθεια μιας πρότασης για ένα σύνολο, συμπεραίνουμε την αλήθεια για τα επιμέρους στοιχεία ή υποσύνολά του.

Ο (ελληνικής καταγωγής) Ιταλός μαθηματικός Francesco Maurolico (Μαυρόλυκος), όμως, χρησιμοποιεί το 1557 μια μέθοδο ανάλογη με αυτήν των Πυθαγορείων για να αποδείξει ότι «το άθροισμα ενός πλήθους περιττών σε διαδοχική σειρά, με αφετηρία τη μονάδα, δίνει το τετράγωνο του πλήθους των περιττών». Για την απόδειξη της πρότασης αυτής ο Μαυρόλυκος χρησιμοποίησε την πρόταση: «κάθε τετράγωνο, όταν αυξηθεί με τον επόμενό του στην τάξη περιττό, δίνει το επόμενο στην τάξη τετράγωνο».

Ο Φραγκίσκος Βάκων, τον $16^{ο}$ αιώνα, αντιτίθεται στον παραγωγικό τρόπο σκέψης του Αριστοτέλη. Υποστηρίζει όμως, ότι η ατελής επαγωγή είναι παιδαριώδης, διότι στηρίζει τα συμπεράσματά της σε πολύ μικρό αριθμό περιπτώσεων και μόνον αυτές μπορεί να ελέγξει. Δημιουργεί έτσι τις προϋποθέσεις για την επεξεργασία της μαθηματικής επαγωγής.

Το $17^{ο}$ αιώνα ο J. Bernoulli ήταν ο πρώτος, ο οποίος, φέρνοντας αντιπαραδείγματα απέδειξε ότι η επαγωγική μέθοδος δεν ήταν αρκετή για την εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων.

Γεννήθηκε συνεπώς η αναγκαιότητα μιας μεθόδου για την επιβεβαίωση, πέραν πάσης αμφιβολίας, της εικασίας, στην οποία οδηγούσε η επαγωγική μέθοδος. Έτσι δημιουργήθηκε η μαθηματική ή τέλεια επαγωγή όπως είναι σήμερα και εμφανίστηκε για πρώτη φορά σε τέλεια μορφή από τον Pascal το 1654 στην απόδειξη μιας ιδιότητας του ομώνυμου τριγώνου Pascal, μιας ιδιότητας που ισχύει σε όλες τις γραμμές του τριγώνου. Ο Pascal, διατυπώνοντας την ιδιότητα αυτή, γράφει:

«*Αν η πρόταση αυτή έχει έναν άπειρο αριθμό περιπτώσεων, θα δώσω μια πολύ σύντομη απόδειξη υποθέτοντας δύο λήμματα.*

- *Το πρώτο, που είναι προφανές, είναι ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει στη 2η γραμμή.*
- *Το δεύτερο είναι ότι αν αυτή η ιδιότητα ισχύει σε μια τυχαία γραμμή, τότε θα ισχύει απαραίτητα και στην επόμενη γραμμή.*

Από αυτό γίνεται φανερό ότι η πρόταση αληθεύει σε κάθε περίπτωση, γιατί η ιδιότητα ισχύει στη 2η γραμμή, λόγω του πρώτου λήμματος· Έτσι λόγω του δευτέρου λήμματος θα ισχύει και στην 3η γραμμή, άρα και στην 4η κ.ο.κ., μέχρι το άπειρο.» (Αδαμόπουλος κ.α. 2000)

Αργότερα, το 1889, ο Giuseppe Peano (1852 – 1932), στο έργο του «Arithmetices principia nova methodo exposita» συμπεριέλαβε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής στα πέντε αξιώματά του για τη θεμελίωση της αριθμητικής.

Βιβλιογραφία

1. Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ., Σβέρκου Α., (2000) *Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης Β΄ Ενιαίου Λυκείου*, Αθήνα: Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο - Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.
2. Hayes Nicky, (1998) *Εισαγωγή στην Ψυχολογία*, Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

3. Κολέζα Ε.Γ., Μακρή Κ.Ν., Σούρλα Κ.Β., (1993) *Θέματα διδακτικής των Μαθηματικών*, Αθήνα: Gutenberg.
4. Κοντογιάννη Ι., (1999 – 2000) *Συνοπτικές ενδεικτικές σημειώσεις για τις ανάγκες επιμορφωτικού σεμιναρίου*.
5. Νεγρεπόντη Στ., *Σημειώσεις παραδόσεων από το μάθημα* «*Ιστορία των Μαθηματικών – Τα Στοιχεία του Ευκλείδη*», χειμερινό εξάμηνο 2000 – 2001.
6. Polya, (1973) *How to solve it*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
7. Στράντζαλου Χρ., *Σημειώσεις παραδόσεων από το μάθημα* «*Θέματα Ειδικής Διδακτικής*», χειμερινό εξάμηνο 2000 – 2001.
8. Τουμάση Μπ., (1994) *Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών*, Αθήνα: Gutenberg.
9. Van der Waerden, B.L. (2000) *Η αφύπνιση της Επιστήμης*, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Ο χρυσός αριθμός Φ

Καββαδά Ευαγγελία
Καθηγήτρια Ενιαίου Πειραματικού Λυκείου Βαρβακείου Σχολής

Η αισθητική έλξη των μαθηματικών έχει διαπιστωθεί τόσο στην παθητική ενατένιση όσο και στην ερευνητική επιδίωξη.

Στην εποχή μας έχει καταστεί πασιφανές ότι αν θέλουμε να κατανοήσουμε τη Φύση πρέπει να συνομιλούμε με αυτή στη γλώσσα που εκείνη μας μιλά, δηλαδή στη γλώσσα των μαθηματικών. Δεν θα ήταν υπερβολή να ισχυρισθούμε ότι «η καλή υγεία» των θετικών επιστημών εξαρτάται κατά ένα μεγάλο ποσοστό από το βαθμό επιτυχίας κατά τον οποίο μεταφέρουμε τα μαθηματικά επιτεύγματα στο ευρύ κοινό και όχι μόνο σε ένα στενό κύκλο μαθηματικών και εκπαιδευτικών. Ο Albert Einstein πίστευε ότι αν ο καθένας απευθύνεται σε ολίγους ειδικούς κάθε τομέα της επιστήμης του περιορίζοντας τη γνώση σε μια μικρή ομάδα, τότε οδηγούμε σε νέκρωση το φιλοσοφικό πνεύμα του λαού και αυτό οδηγεί σε πνευματική πενία. Πρέπει να δώσουμε ευσυνείδητα και με τρόπο ευφυή την ευκαιρία σε όλους να αποκτήσουν εμπειρίες από τις προσπάθειες και τα αποτελέσματα της επιστημονικής έρευνας.

Το θέμα της εισήγησής μου είναι το μυστήριο ενός αριθμού που ονομάζεται «χρυσός αριθμός». Η εμφάνισή του σε πολλούς και απρόσμενους χώρους συνδέεται με την ιδέα της καλαισθησίας και της αρμονίας. Ο χρυσός αριθμός αποδεικνύει την αισθητική αξία των Μαθηματικών.

Το αισθητικό στοιχείο θεωρείται ως το καλύτερο και διαχρονικότερο μέσο για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ο χρυσός αριθμός εμφανίζεται στο πρόβλημα της διαίρεσης ενός ευθύγραμμου τμήματος σε «χρυσή τομή».

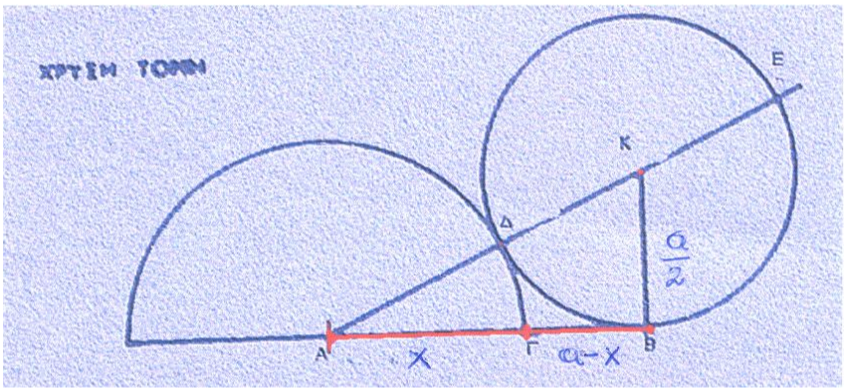
Όταν λέμε «χρυσή τομή» τμήματος εννοούμε την διαίρεσή του σε δύο άνισα μέρη ώστε ο λόγος του μεγαλύτερου μήκους προς το μικρότερο να ισούται με το λόγο του συνολικού μήκους του τμήματος προς το μεγαλύτερο.

Δηλ. αν είναι

ΑΒ=α και Γ το σημείο που το διαιρεί σε χρυσή τομή δηλ ΑΓ=Χ τότε ισχύει :

Εξίσωση (Ι)

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\alpha - x}$$



Λύνοντας την εξίσωση (Ι) ως προς x και συμβολίζοντας με το γράμμα Φ τον κοινό λόγο βρίσκουμε ότι:

$$\varphi = \frac{\alpha}{\chi} = \frac{\chi}{\alpha-\chi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$$

Ο λόγος φ ή ο αντίστροφός του $\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 0{,}618\ldots$ καλείται «χρυσός λόγος» ή χρυσός αριθμός ή «χρυσή αναλογία» ή όπως την αποκαλούσε ο Kepler «Θεία αναλογία» "The divine proportion". Ο Ιταλός Μοναχός Luca Pacioli δημοσίευσε το 1509 την σχετικά με την χρυσή τομή διατριβή του "De divina proportione" την οποία εικονογράφησε ο Leonardo Da Vinci.

Ιστορικά Στοιχεία

Η χρυσή τομή βρίσκεται στο έργο του Ευκλείδη ΣΤΟΙΧΕΙΑ (βιβλίο ΙΙ.11). Στον Ευκλείδη η πρόταση είναι: Να τμηθεί δοθείσα ευθεία ώστε το ορθογώνιο το περιεχόμενο από της άλλης ευθείας και ενός των τμημάτων να είναι ίσο με το τετράγωνο του λοιπού τμήματος.

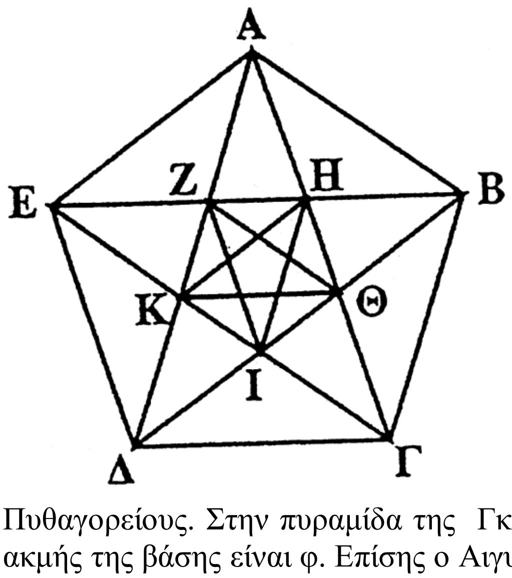
Ο Ευκλείδης στο έργο του ΣΤΟΙΧΕΙΑ (βιβλίο XIII) πραγματεύεται τα πέντε κανονικά κυρτά πολύεδρα. Τα τέσσερα απ' αυτά συνδέονται με τη χρυσή τομή. Πιο ειδικά συνδέονται με το χρυσό ορθογώνιο και τα κανονικά πεντάγωνα.

Χρυσό ορθογώνιο ονομάζεται το ορθογώνιο που ο λόγος των πλευρών του είναι φ.

Τα πέντε αυτά κανονικά στερεά συνδέθηκαν με το όνομα του Πλάτωνα και είχαν ιδιαίτερη σημασία για την Πλατωνική Φιλοσοφία

Ο Kepler τον $16^{ο}$ αιώνα πραγματεύθηκε ένα πλάνο διάταξης των πλανητών του ηλιακού μα συστήματος πάνω σε σφαίρες εγγεγραμμένες και περιγεγραμμένες στα Πλατωνικά Στερεά.

Το πρόβλημα της Χρυσής Τομής ήταν γνωστό πολύ πριν από τον Ευκλείδη από τους Πυθαγορείους. Η διατύπωση ήταν η εξής:
Να κατασκευασθεί ορθογώνιο ισοδύναμο με τετράγωνο πλευράς α που να έχει για βάση την πλευρά α κατάλληλα προεκτεινόμενη και ύψος ίσο με την προέκταση αυτή. Δηλ. $x(x+\alpha) = \alpha^2$

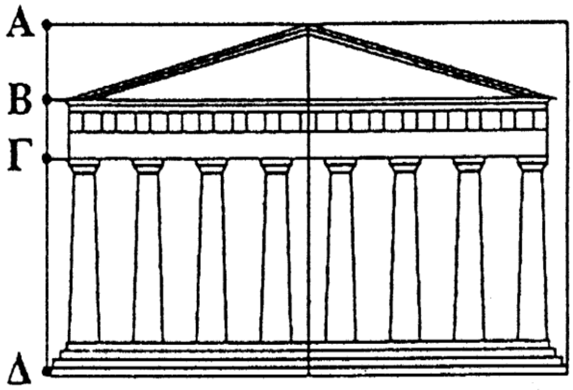


Οι πυθαγόρειοι είχαν ως σύμβολο της Σχολής τους την «πεντάλφα» ένα αστέρι με πέντε κορυφές εγγεγραμμένες σε κανονικό πεντάγωνο. Αν φέρουμε τις διαγωνίους του σχηματίζεται ένα μικρότερο αστέρι κ.ο.κ. Κάθε σημείο τομής των διαγωνίων διαιρεί τις διαγώνιες σε δύο άνισα τμήματα με λόγο φ.

Δεν γνωρίζουμε αν η κατασκευή του πενταγώνου από τους πυθαγόρειους είναι η ίδια με αυτή που περιγράφεται στον Ευκλείδη στο βιβλίο ΣΤΟΙΧΕΙΑ IV11.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι ο λόγος φ εμφανίζεται εκατοντάδες χρόνια πριν τους Πυθαγορείους. Στην πυραμίδα της Γκίζας ο λόγος του ύψους της προς το μισό της ακμής της βάσης είναι φ. Επίσης ο Αιγυπτιακός πάπυρος Rhind αναφέρεται στον ιερό λόγο φ.

Στις αρχές του αιώνα μας εισηγείται και υιοθετείται το Ελληνικό Γράμμα φ να συμβολίζει τον χρυσό αριθμό. Είναι το αρχικό γράμμα του ονόματος του Φειδία που θεωρείται κορυφαίος αντιπρόσωπος στην αρμονία της Τέχνης.



Ο Παρθενώνας των Αθηνών εάν προστεθεί το κατεστρεμένο αέτωμά του προσαρμόζεται σχεδόν ακριβώς στο χρυσό ορθογώνιο.

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \varphi, \quad \frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΑΔ}} = \varphi, \quad \frac{\text{μήκος}}{\text{πλάτος}} = \varphi$$

Ο αρχιτέκτων Le Corbusier κάνει συνειδητή χρήση του χρυσού ορθογωνίου. Το χρυσό ορθογώνιο εκτός της Αρχιτεκτονικής συναντάται και σε έργα ζωγραφικής. Ο Leonardo Da Vinci το χρησιμοποιεί σε πολλά έργα του. Ζωγράφισε το πρόσωπο της Mona Lisa ώστε να χωράει τέλεια σε χρυσό ορθογώνιο και δόμησε τον υπόλοιπο πίνακα γύρω από το πρόσωπο χωρίζοντας το επίσης σε χρυσά ορθογώνια.

Ο Leonardo Da Vinci υποστήριζε ότι ο ομφαλός είναι το σημείο που χωρίζει το ανθρώπινο σώμα σε μέσο και άκρο λόγο δηλαδή σε αναλογία φ.

Οι Γερμανοί ψυχολόγοι Gustav Theodor Fechner (1801-1887) και Wilhelm Wundt (1832-1920) παρατήρησαν, σε μια σειρά ψυχολογικών πειραμάτων, ότι οι περισσότεροι άνθρωποι προτιμούν, υποσυνείδητα, τις διαστάσεις του χρυσού ορθογωνίου, όταν αυτοί επιλέγουν ζωγραφικούς πίνακες, κάρτες, καθρέπτες, δέματα και άλλα αντικείμενα αυτού του σχήματος. Όμως οι ψυχολόγοι δεν φαίνεται να γνωρίζουν γιατί το χρυσό ορθογώνιο ασκεί μια τόσο μεγάλη αισθητική γοητεία. Η απάντηση ίσως βρίσκεται στο ανθρώπινο DNA του οποίου μια τομή φαίνεται να ενσωματώνεται άψογα σε χρυσό δεκάγωνο.

Οι Αριθμοί Fibouacci

Η αναλογία της χρυσής τομής παράγεται και από την ακολουθία των αριθμών 1, 1, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

Κάθε όρος εκτός των δύο πρώτων είναι άθροισμα των δύο προηγούμενων.

Δηλ. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1}$ $\nu>2$

Οι όροι της ακολουθίας αυτής είναι γνωστοί ως «αριθμοί Fibonacci». Ανακαλύφθηκαν από τον ιταλό μαθηματικό του 13ου αιώνα Filius Bonacci.

Το πηλίκο κάθε αριθμού της ακολουθίας δια του προηγούμενου τείνει στο χρυσό λόγο φ.

1 + 1 = 2	
1 + 2 = 3	3 / 2 = 1.5
2 + 3 = 5	5 / 3 = 1.66
3 + 5 = 8	8 / 5 = 1.6
5 + 8 = 13	13 / 8 = 1.62
8 + 13 = 21	21 / 13 = 1.615
13 + 21 = 34	34 / 21 = 1.619
21 + 34 = 55	55 / 34 = 1.617
34 + 55 = 89	89 / 55 = 1.618
55 + 89 = 144	144 / 89 = 1.6179
89 + 144 = 233	233 / 144 = 1.61805
144 + 233 = 377	377 / 233 = 1.618025
233 + 377 = 610	610 / 377 = 1.618037
377 + 610 = 987	987 / 610 = 1.618032
610 + 987 = 1597	1597 / 987 = 1.6180344
987 + 1597 = 2584	2584 / 1597 = 1.6180338
1597 + 2584 = 4181	4181 / 2584 = 1.6180340
2584 + 4181 = 6765	6765 / 4181 = 1.61803396
4181 + 6765 = 10946	10946 / 6765 = 1.61803399
6765 + 10946 = 17711	17711 / 10946 = 1.618033985
10946 + 17711 = 28657 κλπ.	28657 / 17711 = 1.6180339901 κλπ.

Έχουμε $\frac{13}{8} = 1{,}625$, $\frac{21}{13} = 1{,}615$

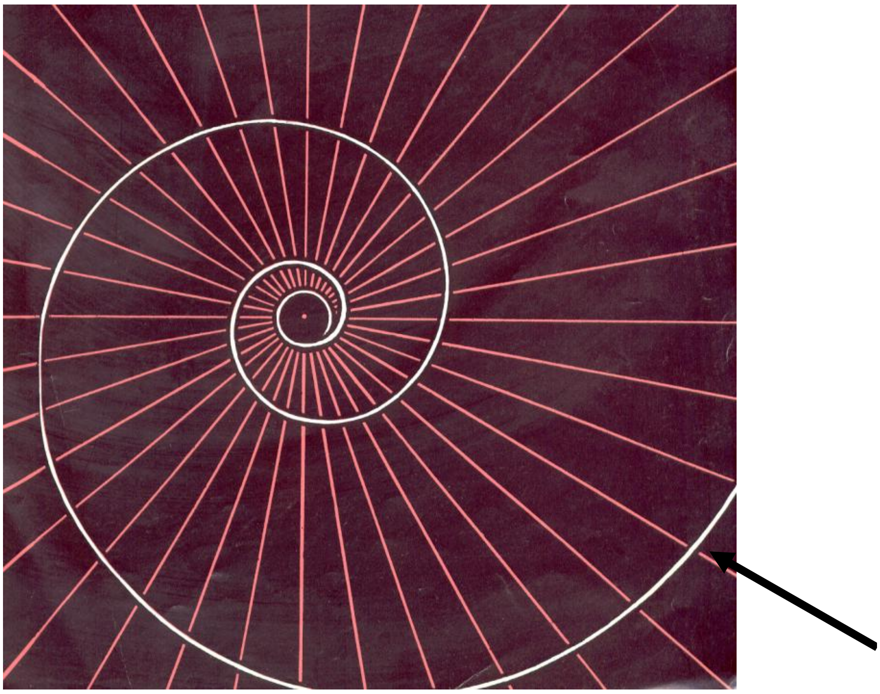
$\frac{34}{21} = 1{,}619$ $\frac{55}{34} = 1{,}618$ κ.ο.κ.

Δηλ. $\lim \frac{\alpha\nu+1}{\alpha\nu} = \varphi$

Το φ και η Φύση

Η λογαριθμική σπείρα είναι το μαθηματικό μοντέλο κάποιων φυσικών αντικειμένων που θα ακολουθήσουν. Η Λογαριθμική σπείρα είναι η γραφική παράσταση μιας εκθετικής εξίσωσης που σε πολικές συντεταγμένες είναι της μορφής:

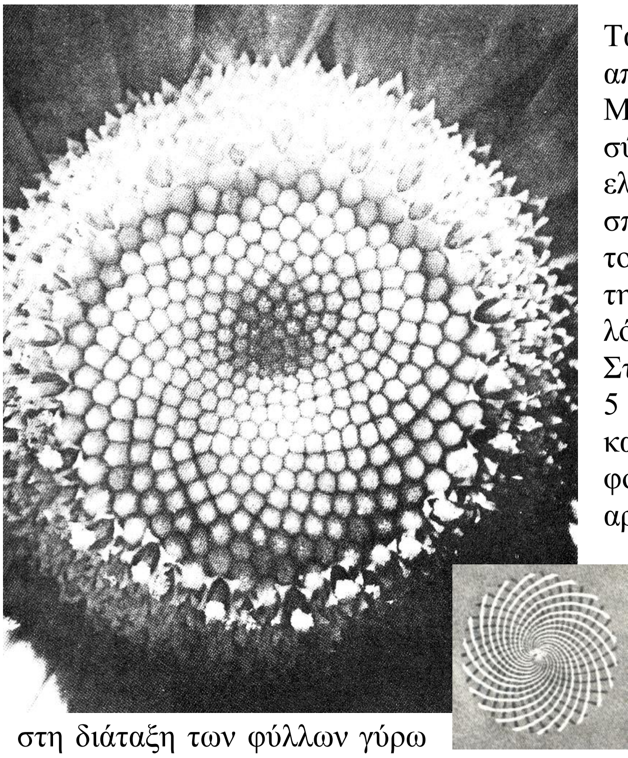
$r = \alpha \odot q^{\theta}$ $\alpha > 1$, $\alpha > 0$ θ Ε |



Ελικοειδή γραμμή

Στη Λογαριθμική σπείρα οι ακτίνες τέμνουν υπό ίσες γωνίες την ελικοειδή γραμμή.

Η βασική μαθηματική ιδιότητα της ισογώνιας σπείρας αντιστοιχεί στη βιολογική αρχή που καθορίζει την ανάπτυξη των κοχυλιών.



Τα μικροσκοπικά ανθάκια που αποτελούν το κέντρο της Μαργαρίτας ξεχωρίζουν σε δύο σύνολα από ένα ορισμένο αριθμό ελικοειδών γραμμών – σπειρών. 21 σπείρε έχουν την φορά των δεικτών του ρολογιού και 34 σπείρες έχουν την αντίθετη φορά. Η εμφάνιση του λόγου φ = 34 / 21,

Στο κώνο του κουκουναριού έχουμε 5 σπείρες προς την μια κατεύθυνση και 8 σπείρες προς την άλλη. Στις φολίδες του ανανά οι αντίστοιχοι αριθμοί είναι 8 και 13. Οι αριθμοί που απαντώνται είναι διαδοχικοί όροι ακολουθίας Fibonacci και έχουν λόγο φ.

Η ακολουθία Fibonacci κάνει την εμφάνισή της στα ηλιοτρόπια, στη διάταξη των φύλλων γύρω από το μίσχο. Εμφανίζεται στην ανάπτυξη των βελόνων αρκετών ειδών ελάτων, στα φοινικόδεντρα, στους δακτυλίους των κορμών τους.

Η φύση δεν προσπαθεί να χρησιμοποιήσει την ακολουθία Fibonacci εμφανίζεται ως αποτέλεσμα μιας βαθύτερης φυσικής διαδικασίας.

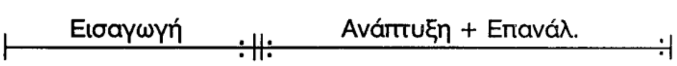
Το φ και οι σονάτες για πιάνο του Mozart

Από τους αρχαιότατους χρόνους τα μαθηματικά και η μουσική διαπλέκονται αρμονικά μεταξύ τους και δεν εκπλήσσει καθόλου το γεγονός σ’ ένα άτομο να συνυπάρχουν το ταλέντο της Μουσικής και των Μαθηματικών.

Ο Mozart είχε αφοσιωθεί εξολοκλήρου στη μελέτη των αριθμών όπως αναφέρει η αδελφή του η Nanerl. Αλλά και ο Alfred Einstein βιογράφος του Mozart αναφέρει ότι η ευχαρίστησή του να παίζει με τους αριθμούς παρέμεινε στο Mozart εφ’ όρου ζωής.

Σε ηλικία 18 ετών έχει συνθέσει την πρώτη σονάτα. Ο Mozart γράφει 19 Σονάτες τις περισσότερες σε ηλικία μεταξύ 18 και 22 ετών.

Ο Mozart διαιρεί κάθε μέρος μιας σονάτας σε δύο τμήματα «Εισαγωγή» στην οποία εισάγει το Μουσικό θέμα και την «Ανάπτυξη και Επανάληψη» όπου το θέμα αναπτύσσεται και επαναλαμβάνεται.

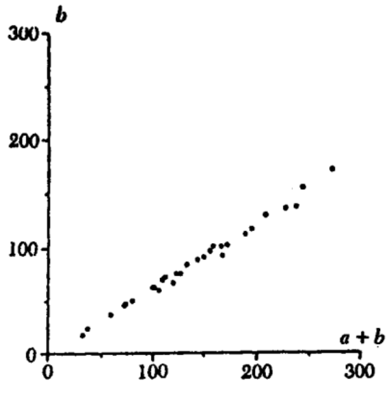


α **b**

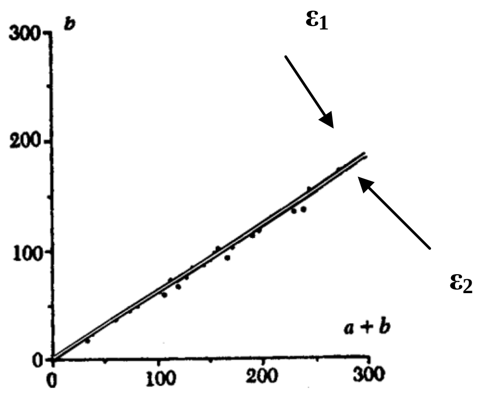
ΠΙΝΑΚΑΣ

Köchel	*a*	*b*	*a* + *b*
279, I	38	62	100
279, II	28	46	74
279, III	56	102	158
280, I	56	88	144
280, II	24	36	60
280, III	77	113	190
281, I	40	69	109
281, II	46	60	106
282, I	15	18	33
282, III	39	63	102
283, I	53	67	120
283, II	14	23	37
283, III	102	171	273
284, I	51	76	127
309, I	58	97	155
310, I	49	84	133
311, I	39	73	112
330, I	58	92	150
330, III	68	103	171
332, I	93	136	229
332, III	90	155	245
333, I	63	102	165
333, II	31	50	81
457, I	74	93	167
533, I	102	137	239
533, II	46	76	122
545, I	28	45	73
547a, I	78	118	196
570, I	79	130	209

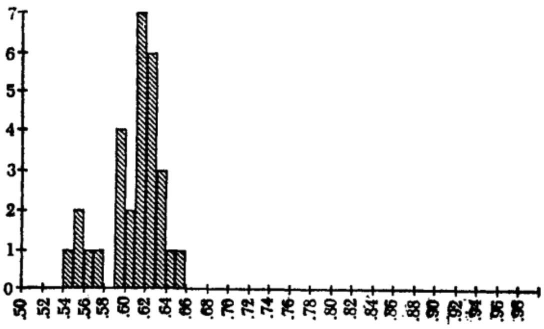
πίνακας παρέχει μια συλλογή δεδομένων για όλα τα μέρη στις Σονάτες του Mozart τα οποία είναι διηρημένα σε δύο τμήματα ο καθένα από τα οποία επαναλαμβάνεται κατά την εκτέλεση.
Το α παριστάνει το μήκος «εισαγωγής» και το b το μήκος του τμήματος «Ανάπτυξης και Επανάληψης».
Το πρώτο μέρος της πρώτης σονάτας που στον πίνακα φέρει τον αριθμό K279 έχει μήκος 100 μουσικά μέτρα που διαιρείται με χρυσή τομή σε μέρη 38 και 62 62/38 .φ.
Το ίδιο συμβαίνει και με το δεύτερο μέρος της ίδιας σονάτας. Το μήκος 74 διαιρείται πλησιέστερα στη χρυσή τομή από τα μήκη 28 και 46.
Για να αξιολογήσουμε τον βαθμό συνέπειας των δεδομένων, δηλαδή αν η διαίρεση σε τμήματα είναι έτσι ώστε οι λόγοι b / α + b να βρίσκονται κοντά στη χρυσή τομή φ τότε πρέπει τα σημεία (α + b, b) να βρίσκονται πολύ κοντά στη γραμμή με εξίσωση ψ = φ ⊙ χ
Στο σχήμα 1 βλέπουμε τις θέσεις των σημείων (α + b, b) που αντιστοιχούν στα δεδομένα του πίνακα. Παρατηρούμε ότι τα σημεία πλησιάζουν πάρα πολύ μια ευθεία γραμμή.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Κατανομή συχνοτήτων των

b / (a + b) του πίνακα.

Σχήμα 3

Στη Στατιστική με την Μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων χαράζουμε ευθεία η οποία πλησιάζει τα σημεία του σχήματος, την γραμμή παλινδρόμησης όπως ονομάζεται. Στο σχήμα 2, φαίνονται δύο γραμμές. Η γραμμή $\psi = \varphi \odot \chi$ (ε_1) και η γραμμή παλινδρόμησης $\psi = -0{,}003241 + 0{,}6091\chi$ (ε_2).

Η γραμμή $\psi = \varphi \odot \chi$ βρίσκεται πάνω και ελάχιστα διαφέρει από την γραμμή παλινδρομήσεως.

Η τιμή του συντελεστού συσχέτισης είναι r = 0,99 και θεωρείται ικανοποιητικός αν έχει τιμή r = 1 ή r = -1.

Η απεικόνιση της κατανομής συχνοτήτων σχήμα 3, δείχνει ότι ο λόγος b / a+b συγκλίνει κοντά στο χρυσό λόγο.

Άρα ο Mozart υπήρξε συνεπής στη διαίρεση των μερών της σονάτας ώστε να ακολουθείται η χρυσή τομή.

Θα κλείσω την εισήγησή μου και τη Διημερίδα με τα λόγια του Τσέχου Μουσικοκριτικού Eduard Hanslick (1884-1904) «Η Μουσική στη Φύση και η Μουσική του ανθρώπου ανήκουν σε δύο διαφορετικές κατηγορίες. Η οδός μετάβασης από την πρώτη κατηγορία στη δεύτερη διέρχεται δια της Επιστήμης των Μαθηματικών».

Σας ευχαριστώ που με ακούσατε.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Περιοδικό «Ο Ευκλείδης», Έκδοση της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

2. Πρακτικά Ακαδημίας Αθηνών, τ. 73 (1998), Τευχ. Β΄, Εισήγηση του Ακαδημαϊκού κ. Νικολάου Αρτεμιάδη.

3. J. Benjafield and C. Davis, The golden number and the structure of connotation, Journal of Aesthetics and Art Critism 36 (1978) 423-427.

4. Eduard Hanslich, The Beautiful in Music, translated by Gustav Cohen, Liberal Arts Press, Indianapolis, 1957.