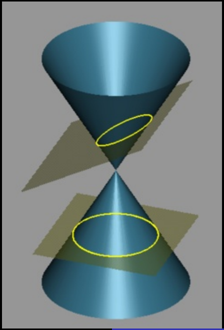
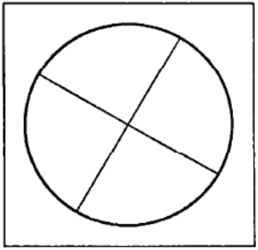
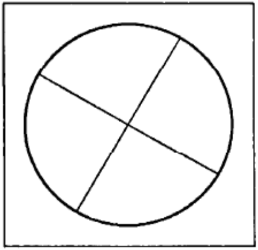
Από τον κύκλο στην έλλειψη

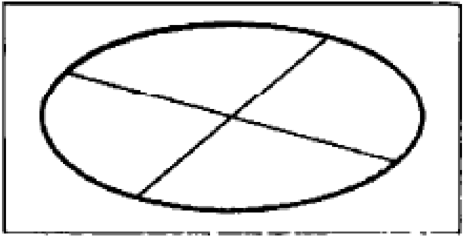
Σιλουανός Μπραζιτίκος

14 Μαρτίου 2015, Τρίκαλα









Ποιές ιδιότητες του σχήματος διατηρούνται;

Ποιές ιδιότητες του σχήματος διατηρούνται;
Τα σημεία της περιφέρειας ισαπέχουν από το κέντρο;

Ποιές ιδιότητες του σχήματος διατηρούνται;
Τα σημεία της περιφέρειας ισαπέχουν από το κέντρο; Όχι!

Ποιές ιδιότητες του σχήματος διατηρούνται;
Τα σημεία της περιφέρειας ισαπέχουν από το κέντρο; Όχι!
Η γωνία των διαγωνίων παραμένει η ίδια;

Ποιές ιδιότητες του σχήματος διατηρούνται;
Τα σημεία της περιφέρειας ισαπέχουν από το κέντρο; Όχι!
Η γωνία των διαγωνίων παραμένει η ίδια; Όχι!

Ποιές ιδιότητες του σχήματος διατηρούνται;
Τα σημεία της περιφέρειας ισαπέχουν από το κέντρο; Όχι!
Η γωνία των διαγωνίων παραμένει η ίδια; Όχι!
Το κέντρο διχοτομεί κάθε διάμετρο;

Ποιές ιδιότητες του σχήματος διατηρούνται;
Τα σημεία της περιφέρειας ισαπέχουν από το κέντρο; Όχι!
Η γωνία των διαγωνίων παραμένει η ίδια; Όχι!
Το κέντρο διχοτομεί κάθε διάμετρο; Ναι!

Ποιές ιδιότητες του σχήματος διατηρούνται;
Τα σημεία της περιφέρειας ισαπέχουν από το κέντρο; Όχι!
Η γωνία των διαγωνίων παραμένει η ίδια; Όχι!
Το κέντρο διχοτομεί κάθε διάμετρο; Ναι!
Στα ακόλουθα θα ασχοληθούμε με συγκεκριμένους μετασχηματισμούς παραμόρφωσης, τους προβολικούς μετασχηματισμούς, και τις ιδιότητες παραμένουν αναλλοίωτες μετά την εφαρμογή τους.

Η ιδέα της προοπτικής πρωτοεμφανίζεται από τους καλλιτέχνες L.Da Vinci, A.Durer. Την εικόνα δηλαδή που σχηματίζει ο καλλιτέχνης μπορούμε να τη σκεπτόμαστε σαν την **προβολή** του πραγματικού αντικειμένου στον καμβά και το κέντρο της προβολής να είναι το μάτι του καλλιτέχνη. Σε αυτή τη διαδικασία τα μήκη και οι γωνίες παραμορφώνονται ανάλογα με τη σχετική θέση των αντικειμένων. Υπάρχουν όμως στοιχεία που παραμένουν αναλλοίωτα;

Η ιδέα της προοπτικής πρωτοεμφανίζεται από τους καλλιτέχνες L.Da Vinci, A.Durer. Την εικόνα δηλαδή που σχηματίζει ο καλλιτέχνης μπορούμε να τη σκεπτόμαστε σαν την **προβολή** του πραγματικού αντικειμένου στον κανβά και το κέντρο της προβολής να είναι το μάτι του καλλιτέχνη. Σε αυτή τη διαδικασία τα μήκη και οι γωνίες παραμορφώνονται ανάλογα με τη σχετική θέση των αντικειμένων. Υπάρχουν όμως στοιχεία που παραμένουν αναλλοίωτα;

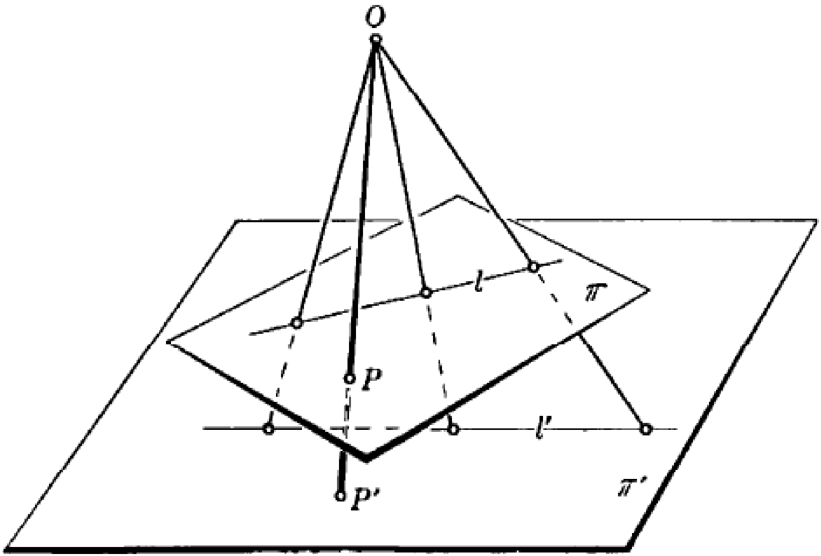
Αυτό είναι το αντικείμενο της προβολικής γεωμετρίας.

Η ιδέα της προοπτικής πρωτοεμφανίζεται από τους καλλιτέχνες L.Da Vinci, A.Durer. Την εικόνα δηλαδή που σχηματίζει ο καλλιτέχνης μπορούμε να τη σκεπτόμαστε σαν την **προβολή** του πραγματικού αντικειμένου στον κανβά και το κέντρο της προβολής να είναι το μάτι του καλλιτέχνη. Σε αυτή τη διαδικασία τα μήκη και οι γωνίες παραμορφώνονται ανάλογα με τη σχετική θέση των αντικειμένων. Υπάρχουν όμως στοιχεία που παραμένουν αναλλοίωτα;

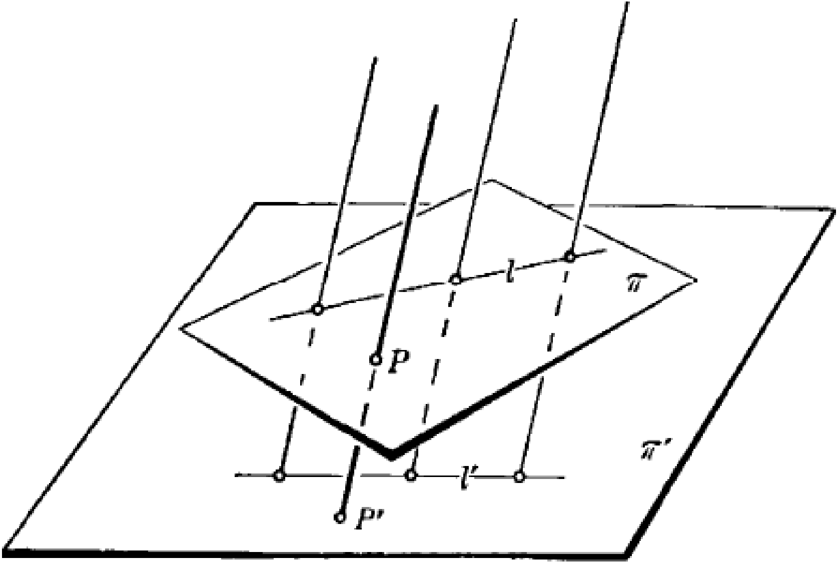
Αυτό είναι το αντικείμενο της προβολικής γεωμετρίας.

Ο πρώτος που ασχολήθηκε συστηματικά: J.V. Poncelet (1788–1867)

Κεντρική προβολή του π στο π' με κέντρο O.



Παράλληλη προβολή του π στο π'.



Ορισμός

Κάθε μετασχηματισμός ενός σχήματος σε ένα άλλο με κεντρική ή παράλληλη προβολή, ή ύστερα από μια πεπερασμένη διαδοχή τέτοιων προβολών, ονομάζεται προβολικός μετασχηματισμός.

Ορισμός

Κάθε μετασχηματισμός ενός σχήματος σε ένα άλλο με κεντρική ή παράλληλη προβολή, ή ύστερα από μια πεπερασμένη διαδοχή τέτοιων προβολών, ονομάζεται προβολικός μετασχηματισμός.

Ιδιότητες προβολικών μετασχηματισμών:

Ορισμός

Κάθε μετασχηματισμός ενός σχήματος σε ένα άλλο με κεντρική ή παράλληλη προβολή, ή ύστερα από μια πεπερασμένη διαδοχή τέτοιων προβολών, ονομάζεται προβολικός μετασχηματισμός.

Ιδιότητες προβολικών μετασχηματισμών:

1. σημείο $\longrightarrow$ σημείο

Ορισμός

Κάθε μετασχηματισμός ενός σχήματος σε ένα άλλο με κεντρική ή παράλληλη προβολή, ή ύστερα από μια πεπερασμένη διαδοχή τέτοιων προβολών, ονομάζεται προβολικός μετασχηματισμός.

Ιδιότητες προβολικών μετασχηματισμών:

1. σημείο $\longrightarrow$ σημείο
2. ευθεία $\longrightarrow$ ευθεία (εκτός από κάποιες περιπτώσεις)

Ορισμός

Κάθε μετασχηματισμός ενός σχήματος σε ένα άλλο με κεντρική ή παράλληλη προβολή, ή ύστερα από μια πεπερασμένη διαδοχή τέτοιων προβολών, ονομάζεται προβολικός μετασχηματισμός.

Ιδιότητες προβολικών μετασχηματισμών:

1. σημείο $\longrightarrow$ σημείο
2. ευθεία $\longrightarrow$ ευθεία (εκτός από κάποιες περιπτώσεις)
3. (σημείο,ευθεία) $\longrightarrow$ (σημείο,ευθεία)

Ορισμός

Κάθε μετασχηματισμός ενός σχήματος σε ένα άλλο με κεντρική ή παράλληλη προβολή, ή ύστερα από μια πεπερασμένη διαδοχή τέτοιων προβολών, ονομάζεται προβολικός μετασχηματισμός.

Ιδιότητες προβολικών μετασχηματισμών:

1. σημείο $\longrightarrow$ σημείο
2. ευθεία $\longrightarrow$ ευθεία (εκτός από κάποιες περιπτώσεις)
3. (σημείο,ευθεία) $\longrightarrow$ (σημείο,ευθεία)
4. συνευθειακά σημεία $\longrightarrow$ συνευθειακά σημεία

Ορισμός

Κάθε μετασχηματισμός ενός σχήματος σε ένα άλλο με κεντρική ή παράλληλη προβολή, ή ύστερα από μια πεπερασμένη διαδοχή τέτοιων προβολών, ονομάζεται προβολικός μετασχηματισμός.

Ιδιότητες προβολικών μετασχηματισμών:

1. σημείο $\longrightarrow$ σημείο
2. ευθεία $\longrightarrow$ ευθεία (εκτός από κάποιες περιπτώσεις)
3. (σημείο,ευθεία) $\longrightarrow$ (σημείο,ευθεία)
4. συνευθειακά σημεία $\longrightarrow$ συνευθειακά σημεία
5. συντρέχουσες ευθείες $\longrightarrow$ συντρέχουσες ευθείες

Ορισμός

Κάθε μετασχηματισμός ενός σχήματος σε ένα άλλο με κεντρική ή παράλληλη προβολή, ή ύστερα από μια πεπερασμένη διαδοχή τέτοιων προβολών, ονομάζεται προβολικός μετασχηματισμός.

Ιδιότητες προβολικών μετασχηματισμών:

1. σημείο $\longrightarrow$ σημείο
2. ευθεία $\longrightarrow$ ευθεία (εκτός από κάποιες περιπτώσεις)
3. (σημείο,ευθεία) $\longrightarrow$ (σημείο,ευθεία)
4. συνευθειακά σημεία $\longrightarrow$ συνευθειακά σημεία
5. συντρέχουσες ευθείες $\longrightarrow$ συντρέχουσες ευθείες

Καμία ποσότητα που περιέχει μόνο τρία σημεία δεν παραμένει αναλλοίωτη.

Ορισμός

Κάθε μετασχηματισμός ενός σχήματος σε ένα άλλο με κεντρική ή παράλληλη προβολή, ή ύστερα από μια πεπερασμένη διαδοχή τέτοιων προβολών, ονομάζεται προβολικός μετασχηματισμός.

Ιδιότητες προβολικών μετασχηματισμών:

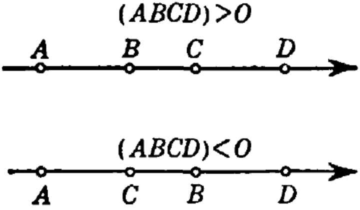
1. σημείο $\longrightarrow$ σημείο
2. ευθεία $\longrightarrow$ ευθεία (εκτός από κάποιες περιπτώσεις)
3. (σημείο,ευθεία) $\longrightarrow$ (σημείο,ευθεία)
4. συνευθειακά σημεία $\longrightarrow$ συνευθειακά σημεία
5. συντρέχουσες ευθείες $\longrightarrow$ συντρέχουσες ευθείες

Καμία ποσότητα που περιέχει μόνο τρία σημεία δεν παραμένει αναλλοίωτη.
Για οποιαδήποτε τέσσερα σημεία όμως υπάρχει μία ποσότητα που παραμένει αναλλοίωτη. Αυτή είναι ο διπλός λόγος.

Ορισμός

Θεωρούμε τέσσερα σημεία A, B, C, D σε μία ευθεία και ορίζουμε και μία θετική διεύθυνση. Ο διπλός λόγος ορίζεται ως η ποσότητα:

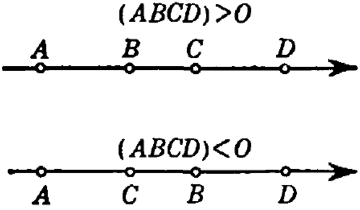
$$(A, B, C, D) := \frac{CA}{CB} \div \frac{DA}{DB}.$$



Ορισμός

Θεωρούμε τέσσερα σημεία A, B, C, D σε μία ευθεία και ορίζουμε και μία θετική διεύθυνση. Ο διπλός λόγος ορίζεται ως η ποσότητα:

$$(A, B, C, D) := \frac{CA}{CB} \div \frac{DA}{DB}.$$

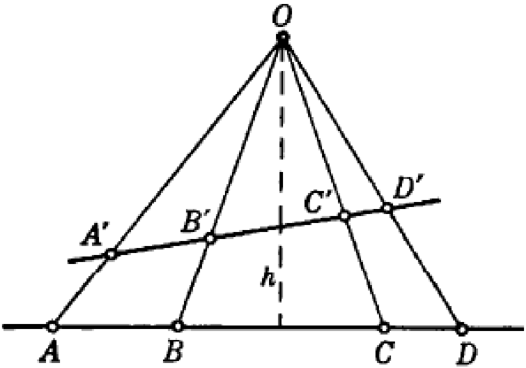


Θεώρημα

Ο διπλός λόγος παραμένει αναλλοίωτος από μία οποιαδήποτε κεντρική ή παράλληλη προβολή.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

$$\frac{CA}{CB} \div \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA} = \frac{OA \cdot OC \cdot \sin \angle COA}{OB \cdot OC \cdot \sin \angle COB} \cdot \frac{OB \cdot OD \cdot \sin \angle DOB}{OA \cdot OD \cdot \sin \angle DOA}.$$

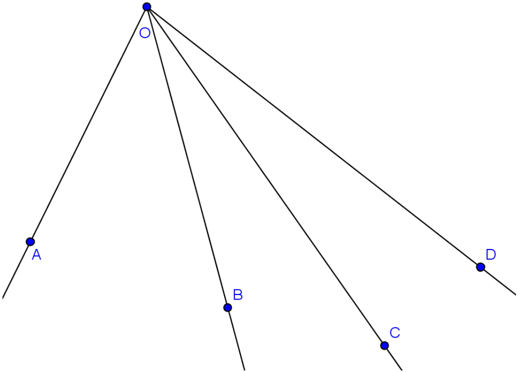


Ισχύει ότι $(A, B, C, D) := \frac{CA}{CB} \div \frac{DA}{DB}$, επομένως όταν θεωρήσουμε το D να απομακρύνεται προς το άπειρο, είναι φυσιολογικό να ορίσουμε

$$(A, B, C, \infty) := \frac{CA}{CB}.$$

Για μία δέσμη τεσσάρων ευθειών που συντρέχουν σε σημείο O ή ισοδύναμα μία δέσμη τεσσάρων ημιευθειών με κοινή αρχή, ο ορισμός του διπλού λόγου είναι παρόμοιος.

$$O(A, B, C, D) := (OA, OB, OC, OD) := \frac{\sin(OA, OC)}{\sin(OB, OC)} \div \frac{\sin(OA, OD)}{\sin(OB, OD)}.$$



Ιδιότητα του κύκλου: Οι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο γωνίες είναι ίσες.

Ιδιότητα του κύκλου: Οι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο γωνίες είναι ίσες.
Είναι σωστό αυτό για την έλλειψη;

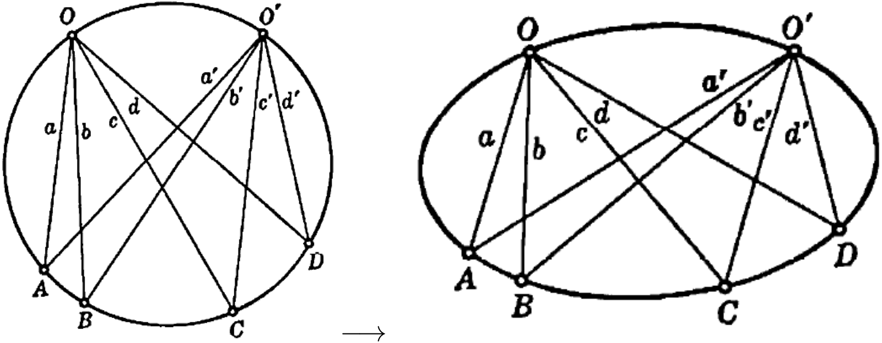
Ιδιότητα του κύκλου: Οι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο γωνίες είναι ίσες.

Είναι σωστό αυτό για την έλλειψη; Όχι!

Ιδιότητα του κύκλου: Οι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο γωνίες είναι ίσες.

Είναι σωστό αυτό για την έλλειψη; Όχι!

Θα περάσουμε μία παρόμοια ιδιότητα στην έλλειψη μέσω του αναλλοίωτου του διπλού λόγου ως προς τους προβολικούς μετασχηματισμούς.



Έτσι έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{E}$ μία έλλειψη και τέσσερα σημεία A, B, C, D σε αυτήν. Τότε για κάθε σημείο O στην έλλειψη έχουμε ότι ο διπλός λόγος (OA, OB, OC, OD) είναι ανεξάρτητος του O.

Έτσι έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

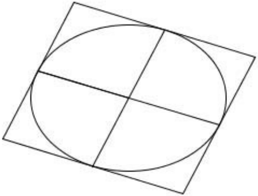
Θεώρημα

Έστω $\mathcal{E}$ μία έλλειψη και τέσσερα σημεία A, B, C, D σε αυτήν. Τότε για κάθε σημείο O στην έλλειψη έχουμε ότι ο διπλός λόγος (OA, OB, OC, OD) είναι ανεξάρτητος του O.

Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν έχουμε μία κλειστή καμπύλη K και δύο σημεία O, O' στην K ώστε για κάθε τετράδα A, B, C, D ο διπλός λόγος των ευθειών που ορίζεται από το O και το O' να είναι ο ίδιος τότε η K είναι έλλειψη.

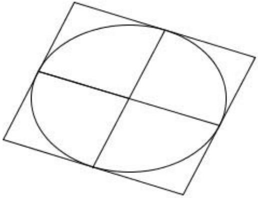
Θεώρημα

(Newton) Σε μία έλλειψη όλα τα περιγράψιμα παραλληλόγραμμα έχουν εμβαδό $4ab$*, όπου* a, b *είναι τα μήκη του μικρού και του μεγάλου άξονα της έλλειψης.*



Θεώρημα

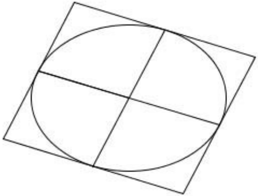
(Newton) Σε μία έλλειψη όλα τα περιγράψιμα παραλληλόγραμμα έχουν εμβαδό $4ab$, όπου a, b είναι τα μήκη του μικρού και του μεγάλου άξονα της έλλειψης.



Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό του ξυλουργού στέλνουμε την έλλειψη σε κύκλο και τα παραλληλόγραμμα γίνονται τα αντίστοιχα τετράγωνα που είναι περιγεγραμμένα στον κύκλο.

Θεώρημα

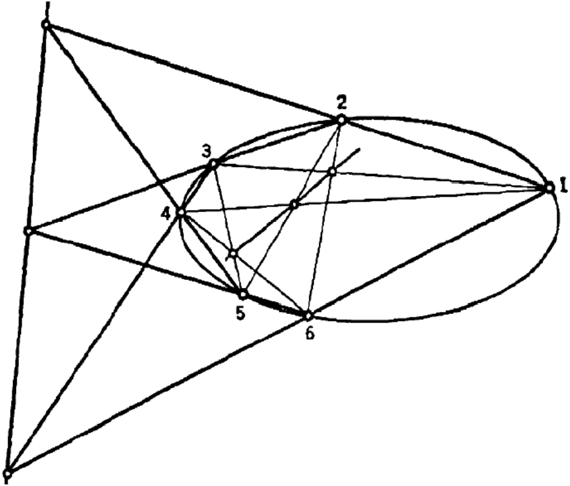
(Newton) Σε μία έλλειψη όλα τα περιγράψιμα παραλληλόγραμμα έχουν εμβαδό $4ab$, όπου a, b είναι τα μήκη του μικρού και του μεγάλου άξονα της έλλειψης.



Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό του ξυλουργού στέλνουμε την έλλειψη σε κύκλο και τα παραλληλόγραμμα γίνονται τα αντίστοιχα τετράγωνα που είναι περιγεγραμμένα στον κύκλο. Αυτά έχουν το ίδιο εμβαδό και επειδή ο μετασχηματισμός διατηρεί το λόγο των εμβαδών, όλα τα παραλληλόγραμμα θα έχουν το ίδιο εμβαδό με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που δημιουργείται από τους κύριους άξονες της έλλειψης και έχει εμβαδό $4ab$.

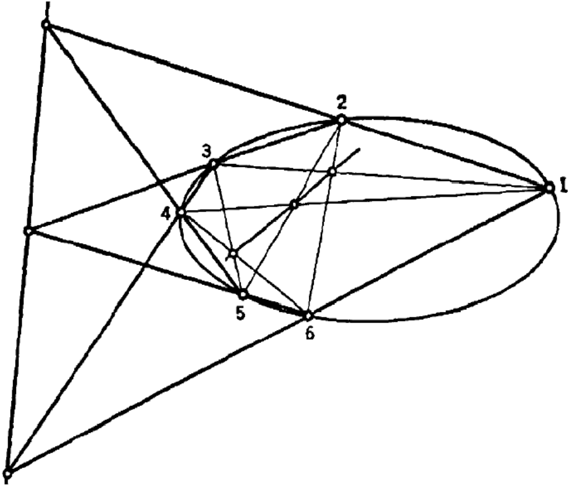
Θεώρημα

(Pascal) Δίνονται έξι σημεία $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *σε μία έλλειψη. Τα σημεία τομής των ευθειών* $(1,2) \cap (4,5)$, $(2,3) \cap (5,6)$ *και* $(3,4) \cap (6,1)$ *είναι συνευθειακά.*

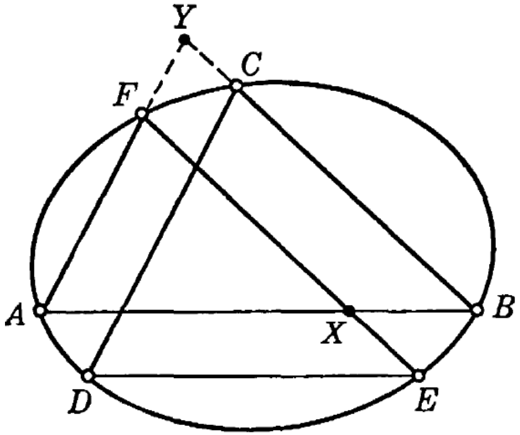


Θεώρημα

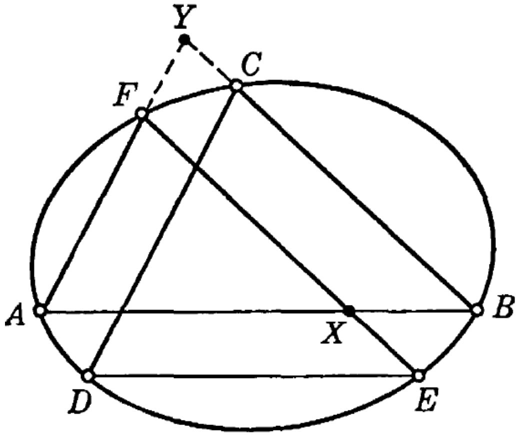
(Pascal) Δίνονται έξι σημεία $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *σε μία έλλειψη. Τα σημεία τομής των ευθειών* $(1,2) \cap (4,5)$, $(2,3) \cap (5,6)$ *και* $(3,4) \cap (6,1)$ *είναι συνευθειακά.*



Απόδειξη. Θεωρούμε τον προβολικό μετασχηματισμό που είναι τέτοιος ώστε $AB//ED$ και $FA//CD$. Τότε μένει να δείξουμε ότι $CB//FE$. Η ευθεία που θα συνδέει τα σημεία τομής θα είναι η ευθεία στο άπειρο. Από το θεώρημα σταθερού διπλού λόγου έχουμε ότι $C(F,A,B,D) = E(F,A,B,D)$. Τότε
$(F,A,Y,\infty) = (X,A,B,\infty)$, επομένως $\frac{YF}{YA} = \frac{BX}{BA}$.

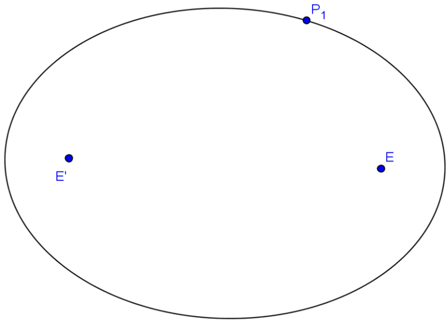


Απόδειξη. Θεωρούμε τον προβολικό μετασχηματισμό που είναι τέτοιος ώστε $AB//ED$ και $FA//CD$. Τότε μένει να δείξουμε ότι $CB//FE$. Η ευθεία που θα συνδέει τα σημεία τομής θα είναι η ευθεία στο άπειρο. Από το θεώρημα σταθερού διπλού λόγου έχουμε ότι $C(F, A, B, D) = E(F, A, B, D)$. Τότε $(F, A, Y, \infty) = (X, A, B, \infty)$, επομένως $\frac{YF}{YA} = \frac{BX}{BA}$.



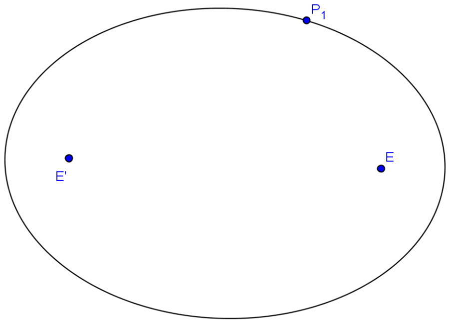
Κατασκευή

Δίνεται έλλειψη με εστίες E, E' και τυχαίο σημείο P_1 στην περιφέρειά της. Να κατασκευαστεί η εφαπτομένη της έλλειψης στο P_1.

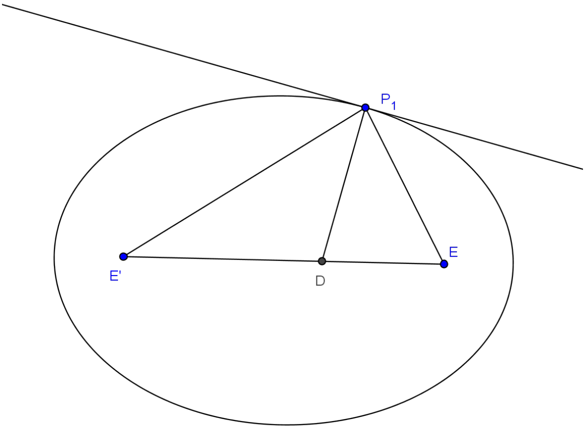


Κατασκευή

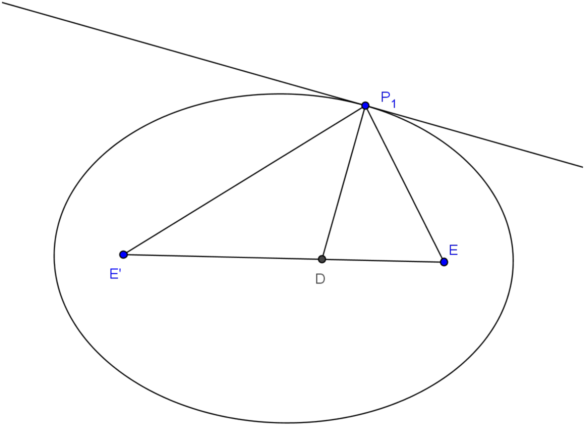
Δίνεται έλλειψη με εστίες E, E' και τυχαίο σημείο P_1 στην περιφέρειά της. Να κατασκευαστεί η εφαπτομένη της έλλειψης στο P_1.



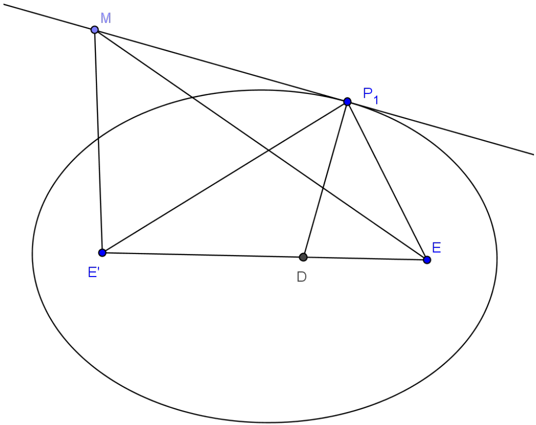
Φέρνουμε τη διχοτόμο P_1D της γωνίας $E'\widehat{P_1}E$ και την ευθεία $x'x$ κάθετη στην P_1D στο σημείο P_1. Θα δείξω ότι η $x'x$ είναι η ζητούμενη εφαπτομένη.



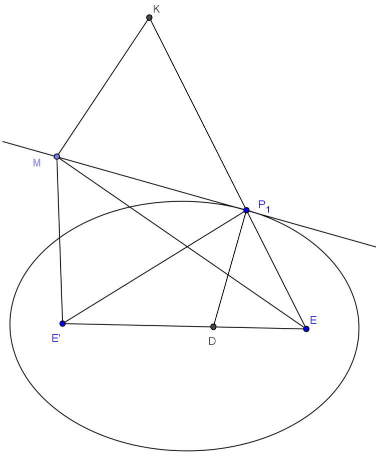
Φέρνουμε τη διχοτόμο P_1D της γωνίας $E'\widehat{P_1}E$ και την ευθεία $x'x$ κάθετη στην P_1D στο σημείο P_1. Θα δείξω ότι η $x'x$ είναι η ζητούμενη εφαπτομένη.



Έστω M τυχαίο σημείο της $x'x$ διαφορετικό του P_1. Αρκεί να δείξω ότι το M είναι εξωτερικό σημείο της έλλειψης. Είναι $P_1E' + P_1E = 2a$. Θα δείξω ότι $ME' + ME > 2a$.

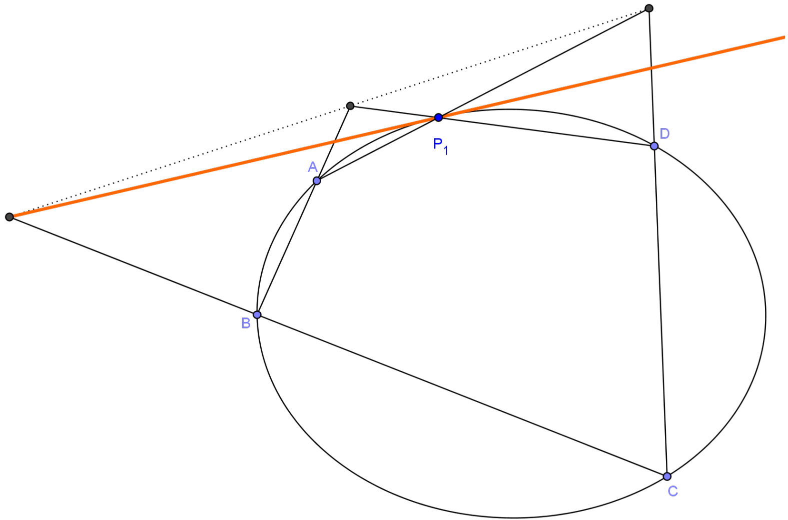


Στην προέκταση της EP_1 παίρνω σημείο K, ώστε $P_1K = P_1E'$.



Τα τρίγωνα $P_1KM, P_1E'M$ είναι ίσα, άρα $MK = ME'$. Οπότε $ME' + ME = MK + ME > KE = KP_1 + P_1E = P_1E' + P_1E = 2a$.

Κατασκευή χωρίς τις εστίες μόνο με κανόνα! Θεώρημα Pascal στο $ABCDP_1P_1$.

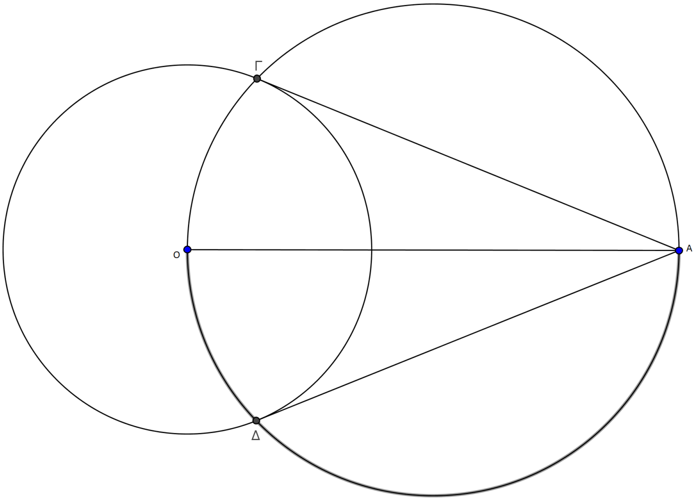


Κατασκευή

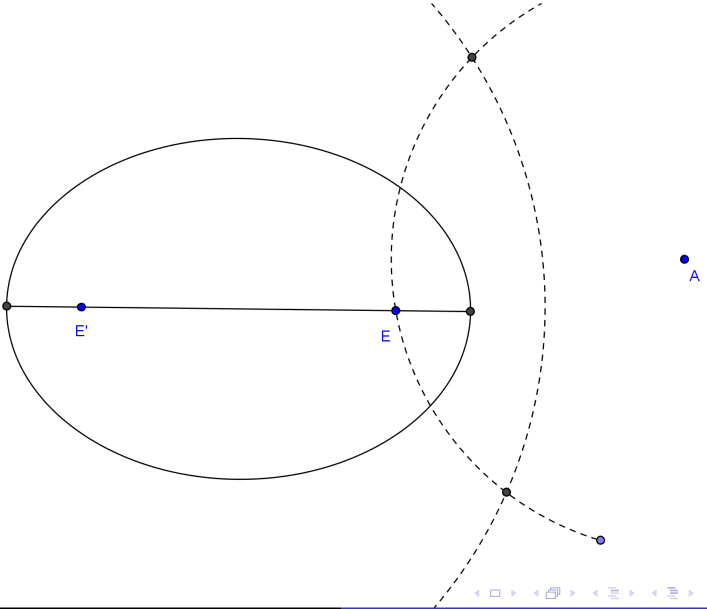
Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο A εκτός αυτού. Να κατασκευαστούν οι εφαπτομένες από το A στον κύκλο.

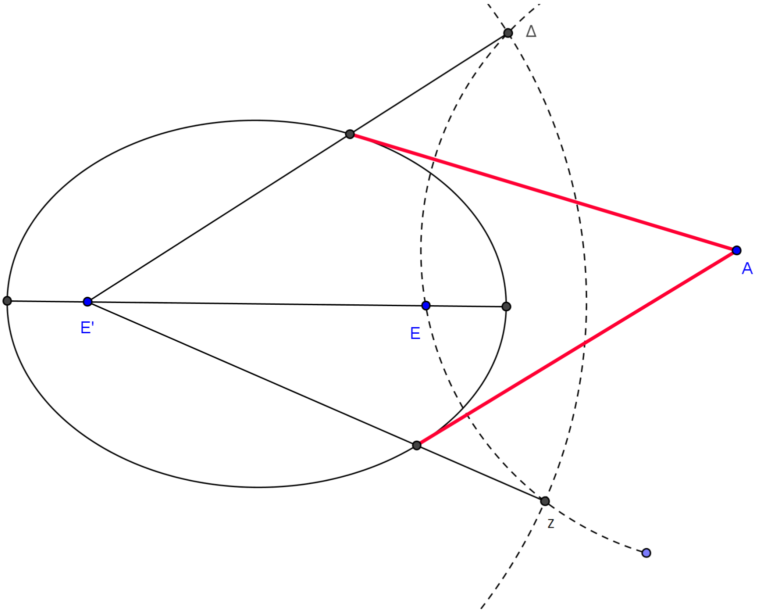
Κατασκευή

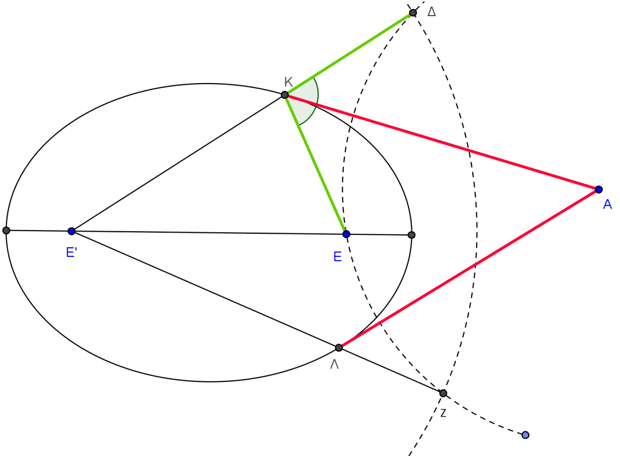
Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο A εκτός αυτού. Να κατασκευαστούν οι εφαπτομένες από το A στον κύκλο.



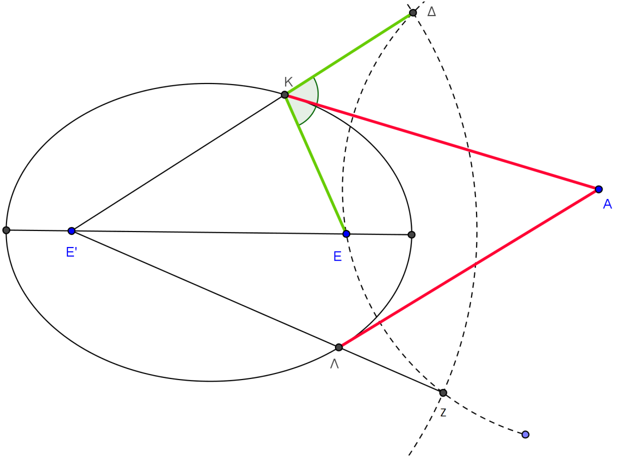
Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κάνουμε την ίδια κατασκευή στην έλλειψη.



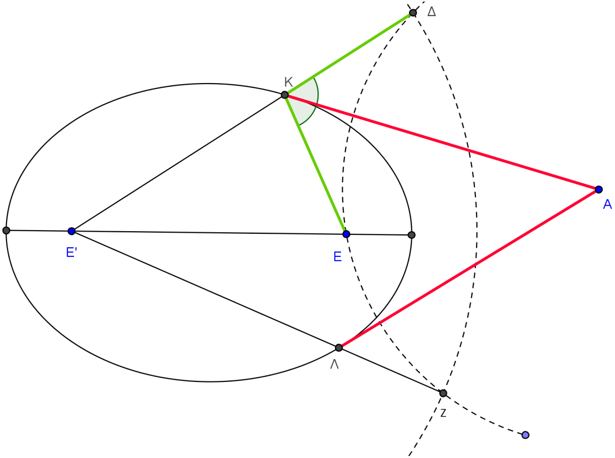

Δ
A
E'
E
Z



Έχουμε ότι $E'K + KE = 2a = E'\Delta = E'K + K\Delta$ άρα $KE = K\Delta$.



Έχουμε ότι $E'K + KE = 2a = E'\Delta = E'K + K\Delta$ άρα $KE = K\Delta$. AK μεσοκάθετος $E\Delta$



Έχουμε ότι $E'K + KE = 2a = E'\Delta = E'K + K\Delta$ άρα $KE = K\Delta$. AK μεσοκάθετος $E\Delta$ οπότε AK εξωτερική διχοτόμος.

Σας ευχαριστώ !!!