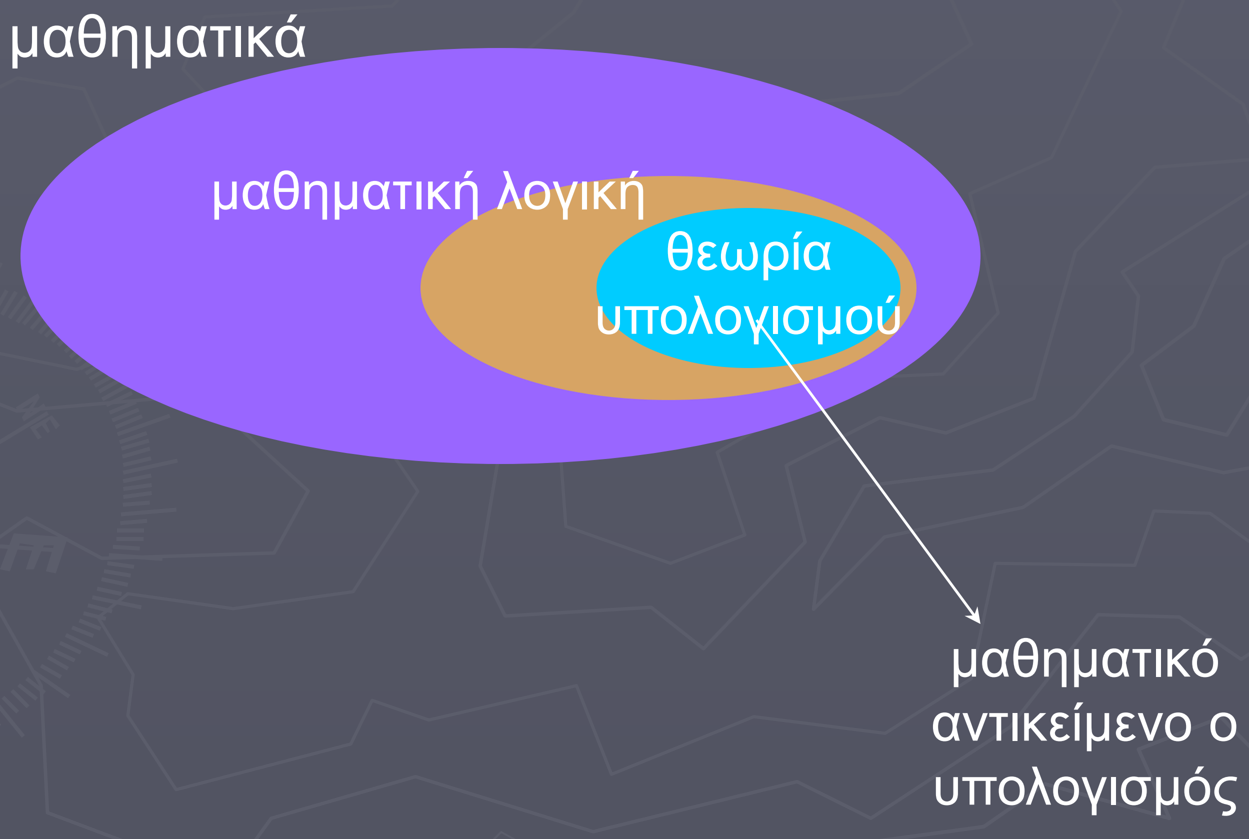
Εξωστρεφής Θεωρία Υπολογισμού

Κωνσταντίνος Δασκαλάκης

Βαρβάκειο → Πολυτεχνείο → Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, Μπέρκλεϋ

Θεωρία Υπολογισμού



Γέννηση της Θεωρίας

Ευκλείδης 300 π. Χ.: αλγόριθμος εύρεσης Μ.Κ.Δ.

Διόφαντος 3ος αιώνας μ. Χ.: διοφαντικές εξισώσεις

al Khwarizmi 8ος αιώνας μ.Χ.: γραμμικές και δευτεροβάθμιες εξισώσεις

Galois-Abel-Ruffini 18ος αιώνας: εξισώσεις 5ου βαθμού "πιο δύσκολες"

Εικασία του Hilbert 1900: υπάρχει αλγόριθμος που αποδεικνύει κάθε αληθή πρόταση ;

Goedel 1931: υπάρχουν αληθείς προτάσεις χωρίς απόδειξη

Turing 1931: απόδειξη του θεωρήματος του Goedel μέσω υπολογιστικού μοντέλου - Turing Machine

Cook, Karp, Levin 70's: Δύσκολοι Υπολογισμοί --- NP-completeness κλασική θωρία:

βασικά υπολογιστικά ερωτήματα

Είναι η αναρρίχηση ο καλύτερος αλγόριθμος;

Εύρεση κορυφής (local maximum)

1	1	2	1	2	1	1
2	2	3	4	2	1	1
4	3	2	5	2	2	2
2	3	2	2	4	1	1
3	3	3	5	7	1	2
1	2	1	2	2	3	1
1	1	2	3	2	1	1

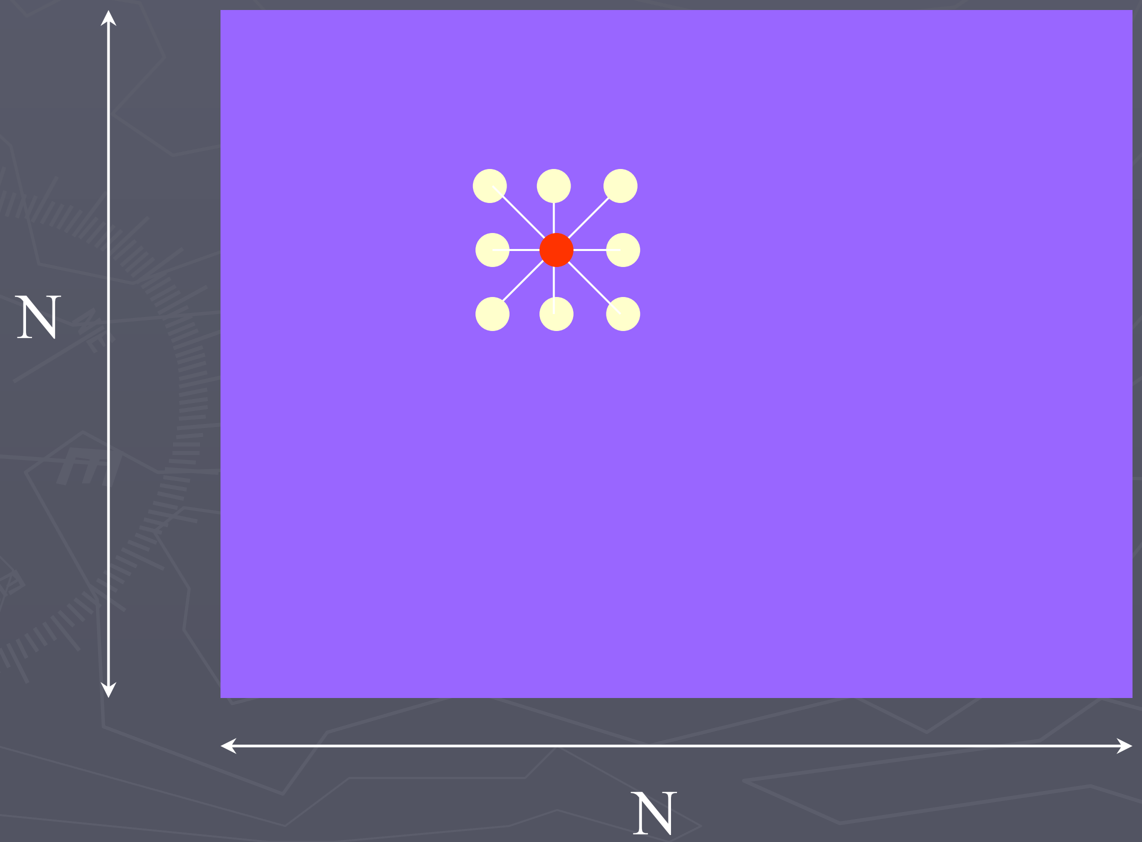
τοπικό μέγιστο
(local maximum)

ολικό μέγιστο
(global maximum)

Εύρεση κορυφής (local maximum)

Είσοδος (input): ένας πίνακας με N x N αριθμούς

Έξοδος (output): μία κορυφή, δηλαδή ένα στοιχείο του πίνακα που είναι μεγαλύτερο ή ίσο από τα γειτονικά του



Αφελής Αλγόριθμος…

Αφελής Αλγόριθμος:

- Κοίταξε ένα *τυχαίο* στοιχείο του πίνακα
-Έλεγξε αν είναι τοπικό μέγιστο
- Αν δεν είναι, επανάλαβε!

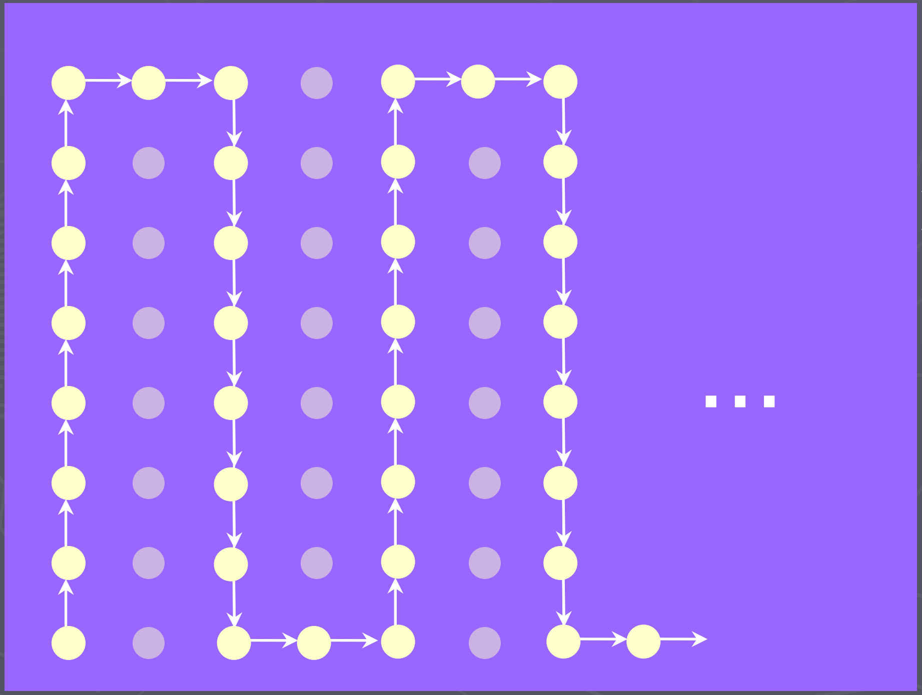
Χειρότερη περίπτωση: θα ελέγξω N^2 αριθμούς

Αναρρίχηση

Αλγόριθμος Αναρρίχησης:

- Άρχισε κάπου τυχαία
-Έλεγξε αν είναι τοπικό μέγιστο
- Αν δεν είναι, τότε πήγαινε στον υψηλότερο γείτονά του

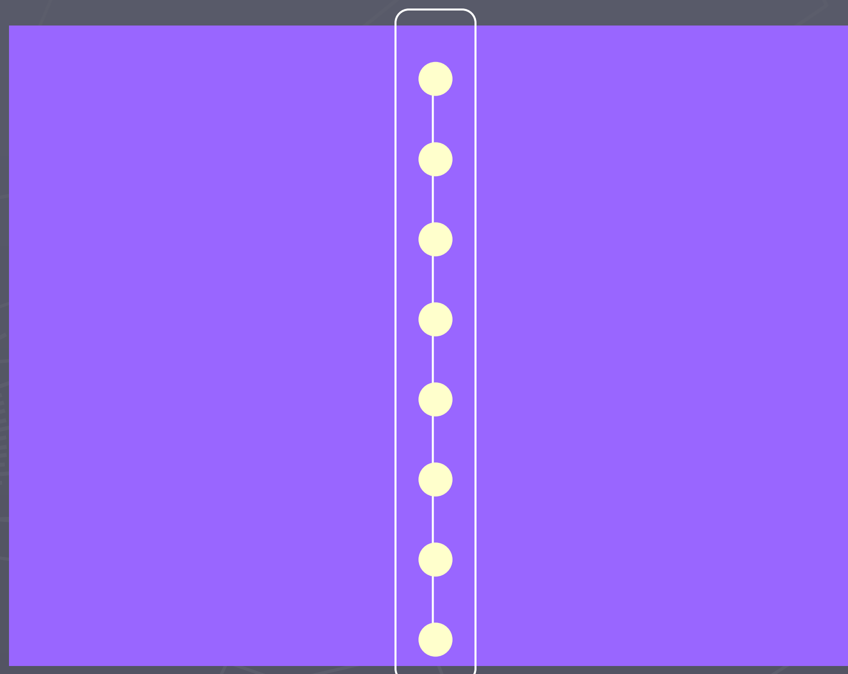
Χειρότερη περίπτωση:



Πρέπει να ελέγξω $N^2/2$ αριθμούς

Βέλτιστος Αλγόριθμος

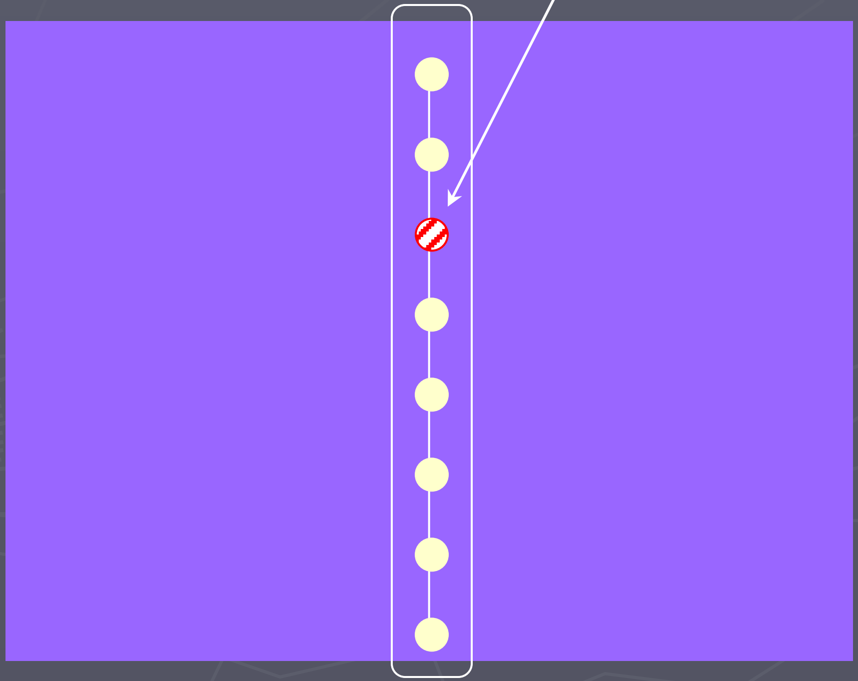
βρες το μεγαλύτερο στοιχείο της μεσαίας στήλης



Βέλτιστος Αλγόριθμος

2 περιπτώσεις:

το στοιχείο είναι &τοπικό μέγιστο :)

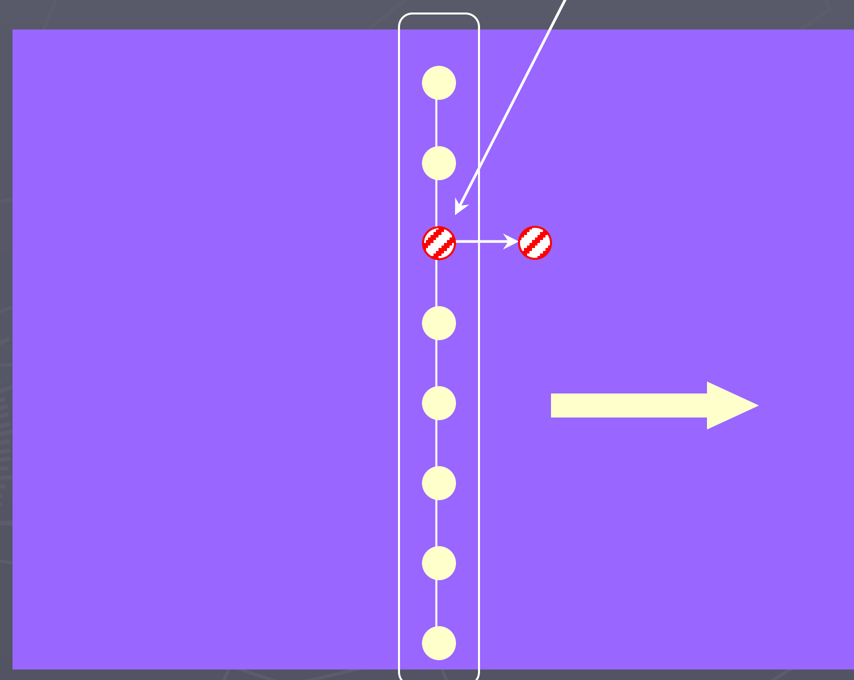


Βέλτιστος Αλγόριθμος

2 περιπτώσεις:

το στοιχείο είναι &τοπικό μέγιστο :)

κάποιος γείτονας είναι μεγαλύτερος



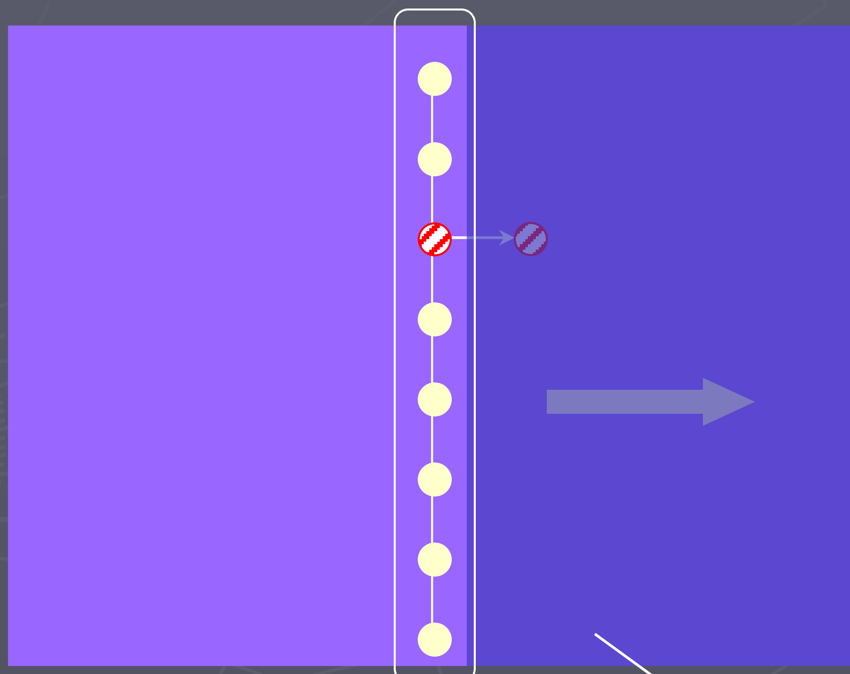
Ισχυρισμός: Υπάρχει κορυφή από τη μεριά αυτού του γείτονα!

Γιατί;

Βέλτιστος Αλγόριθμος

2 περιπτώσεις:

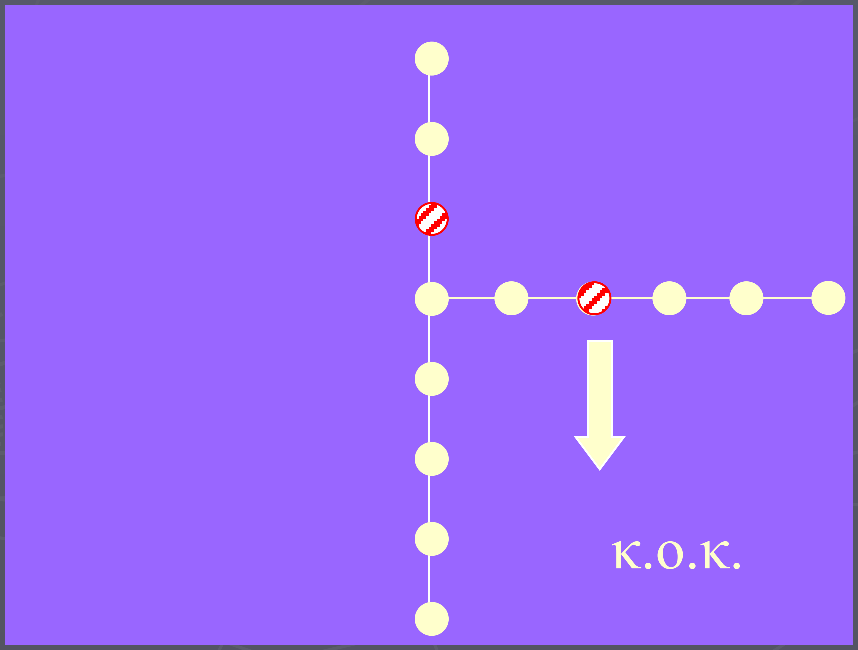
- το στοιχείο είναι τοπικό μέγιστο :)
- **κάποιος γείτονας είναι μεγαλύτερος**



Ισχυρισμός: Υπάρχει κορυφή από τη μεριά αυτού του γείτονα!

περιορίστηκε η αναζήτηση σε $N^2/2$ στοιχεία

Βέλτιστος Αλγόριθμος



Ελέγχουμε τη μεσαία γραμμή του μισού

Τελικά θα ελέγχθούν μόνο 2·N στοιχεία!

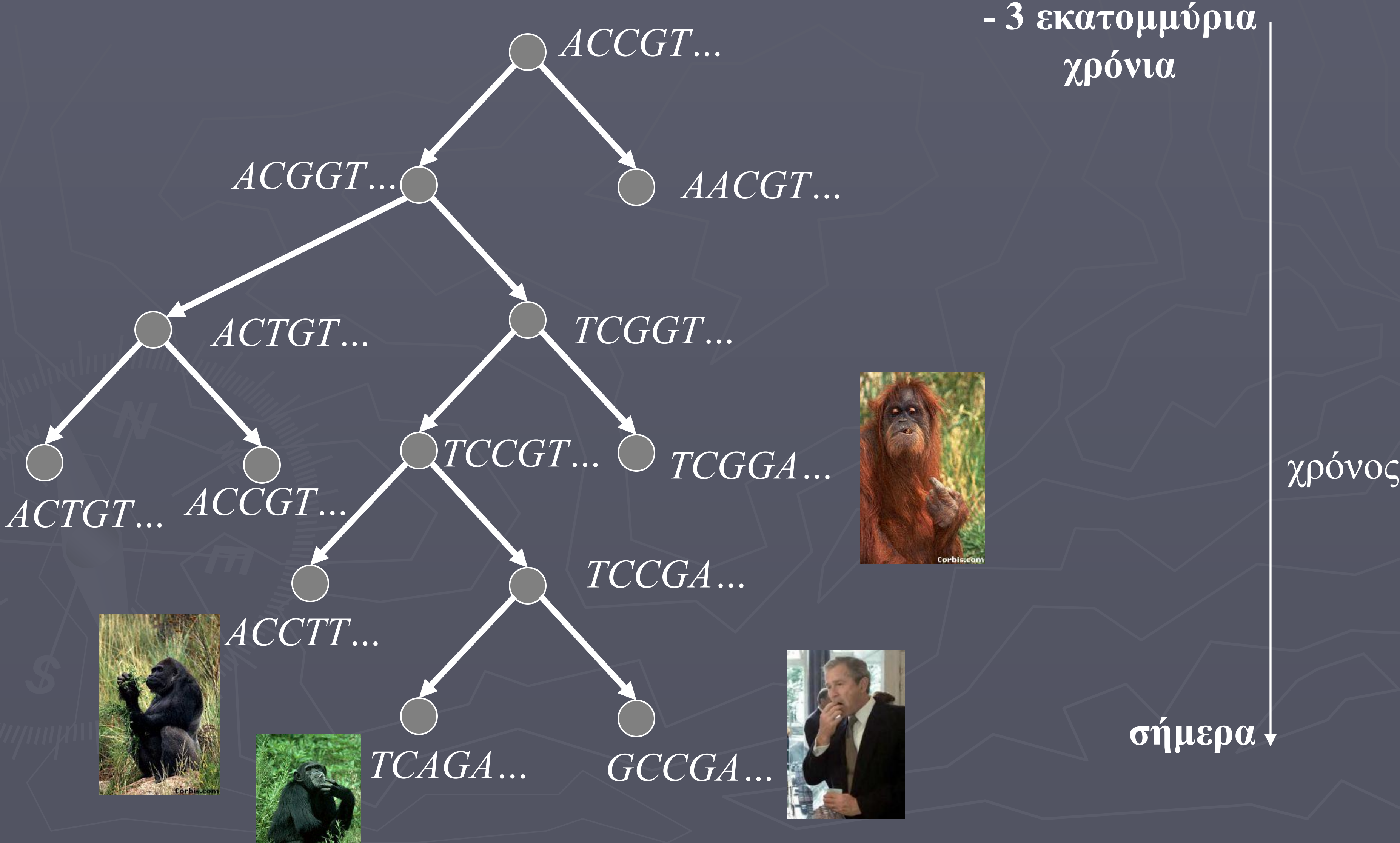
Θεωρία Υπολογισμού το ’70

Θεωρία υπολογισμού σήμερα

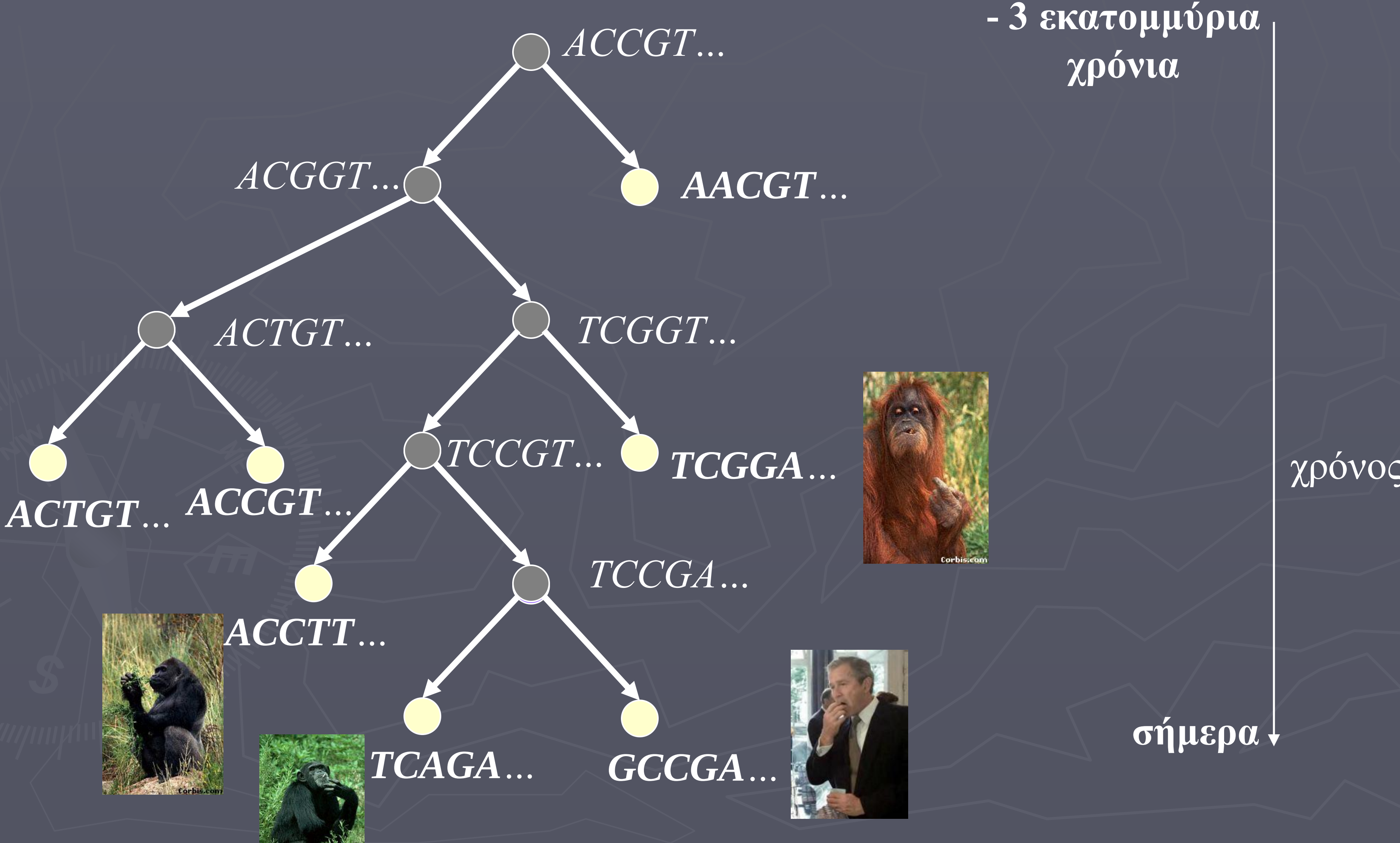
υπολογιστική βιολογία

- computational biology

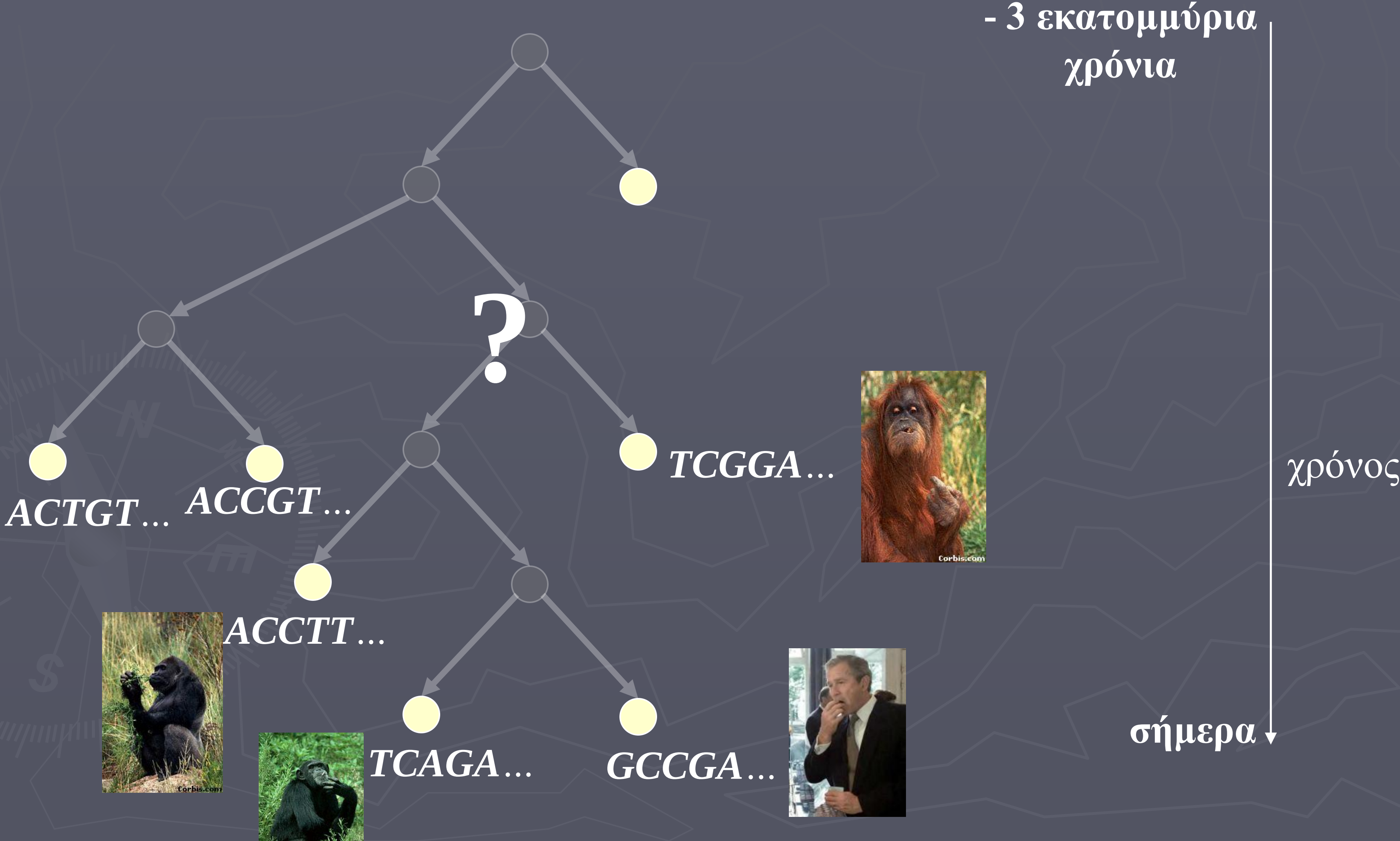
η εξέλιξη των ειδών



το υπολογιστικό πρόβλημα



το υπολογιστικό πρόβλημα



υπολογιστική στατιστική

- computational statistics

Ανακάτεμα τράπουλας

Γιατί ανακατεύουμε την τράπουλα;

γιατί θέλουμε να αρχίσουμε την παρτίδα με μία εντελώς τυχαία διάταξη των 52 χαρτιών της τράπουλας

Πόσες διατάξεις υπάρχουν;

$$52! \approx 2^{257} \approx 10^{77}$$

Πως παίρνουμε μια τυχαία διάταξη;

- ζάρι με 10^{77} έδρες!
- ανακάτεμα $\approx$ ζάρι

αλγόριθμος - πως αναλύεται;

Ανακάτεμα τράπουλας

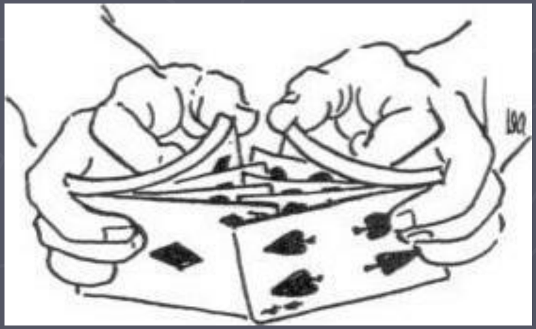
Προσομοιώση τέλειου ζαριού:

- Top-in-at-Random: *πάρε το πάνω χαρτί και βάλ'το κάπου τυχαία:*

Πόσες επαναλήψεις χρειάζονται για τέλειο ζάρι;

297 επαναλήψεις

- Riffle Shuffle:



Πόσες επαναλήψεις χρειάζονται για τέλειο ζάρι;

μόνο 7 επαναλήψεις

υπολογιστική θεωρία παιγνίων

- computational game theory

Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί

		33%	33%	33%
		Πέτρα	Χαρτί	Ψαλίδι
33%	Πέτρα	0,0	-1,1	1,-1
33%	Χαρτί	1,-1	0,0	-1,1
33%	Ψαλίδι	-1,1	1,-1	0,0

Ισορροπία:

Ένα ζεύγος στρατηγικών ώστε κανείς παίκτης να μην έχει συμφέρον να αλλάξει τη στρατηγική του.

von Neumann & Morgenstern:

πάντα υπάρχει σε "zero-sum" παιχνίδια

Αλλαγμένη Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί

		25%	33%	42%
		Πέτρα	Χαρτί	Ψαλίδι
33%	Πέτρα	0,0	-1,1	1,-1
33%	Χαρτί	2,-1	0,0	-1,1
33%	Ψαλίδι	-1,1	1,-1	0,0

Δεν είναι πια zero-sum!

Ισορροπία:

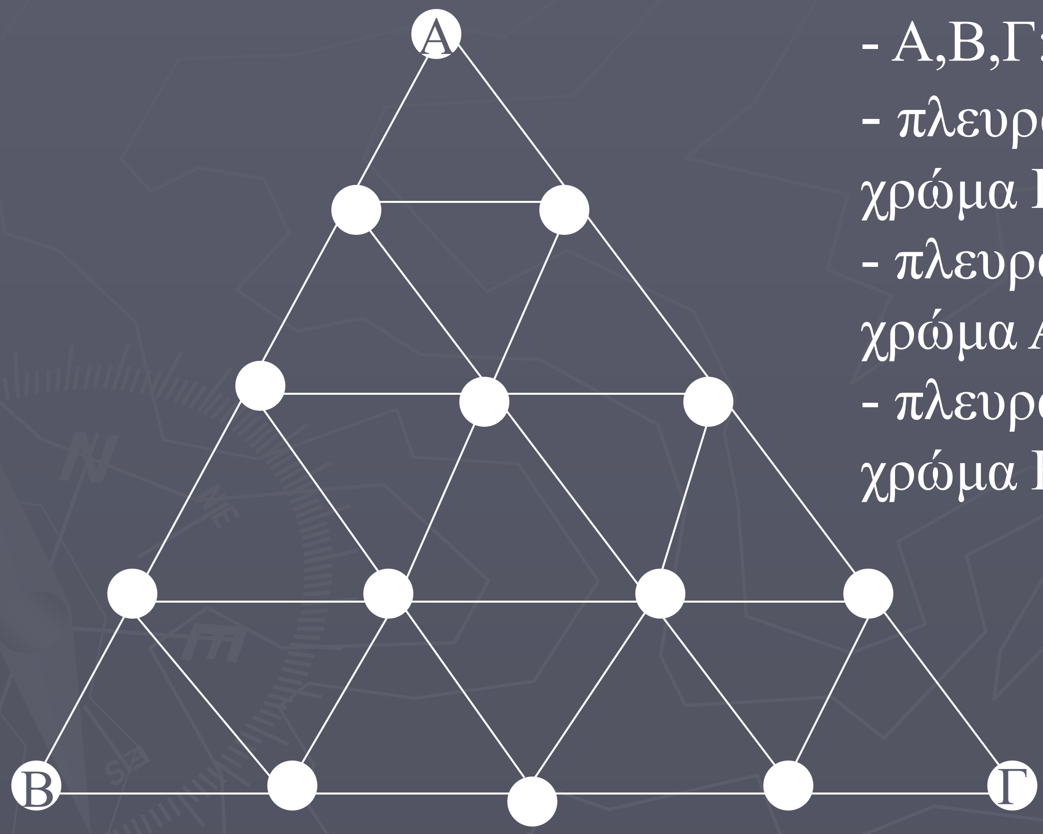
Ένα ζεύγος στρατηγικών ώστε κανείς παίκτης να μην έχει συμφέρον να αλλάξει τη στρατηγική του.

John Nash ’51:

Πάντα υπάρχει ισορροπία!

⇐ **Brouwer’s Fixed Point Theorem**

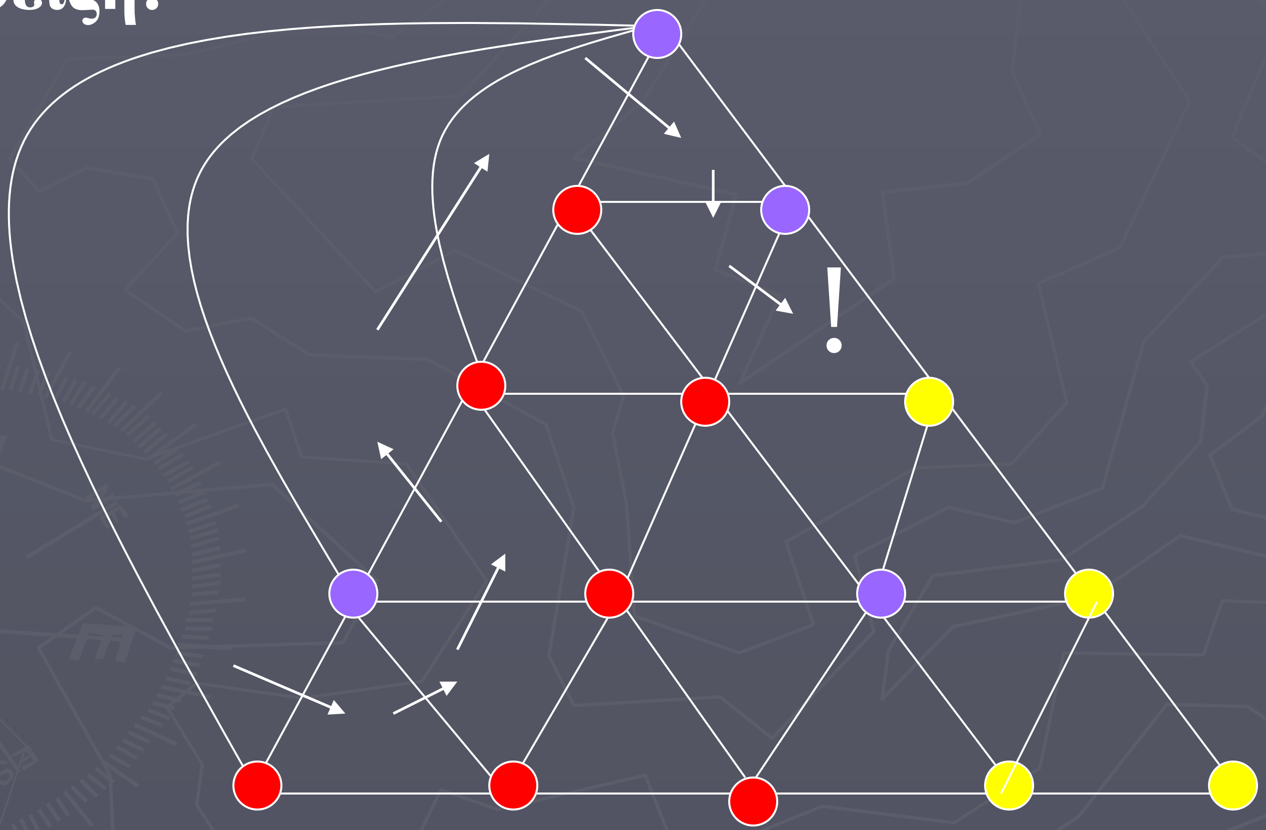
Λήμμα του Sperner: Κάθε νόμιμος χρωματισμός ενός τριγώνου έχει ένα μικρό τριχρωματικό τρίγωνο.



- Α,Β,Γ: διαφορετικά χρώματα
- πλευρά ΑΒ δεν χρησιμοποιεί το χρώμα Γ
- πλευρά ΒΓ δεν χρησιμοποιεί το χρώμα Α
- πλευρά ΑΓ δεν χρησιμοποεί το χρώμα Β

Λήμμα του Sperner: Κάθε νόμιμος χρωματισμός ενός τριγώνου έχει ένα τριχρωματικό τρίγωνο.

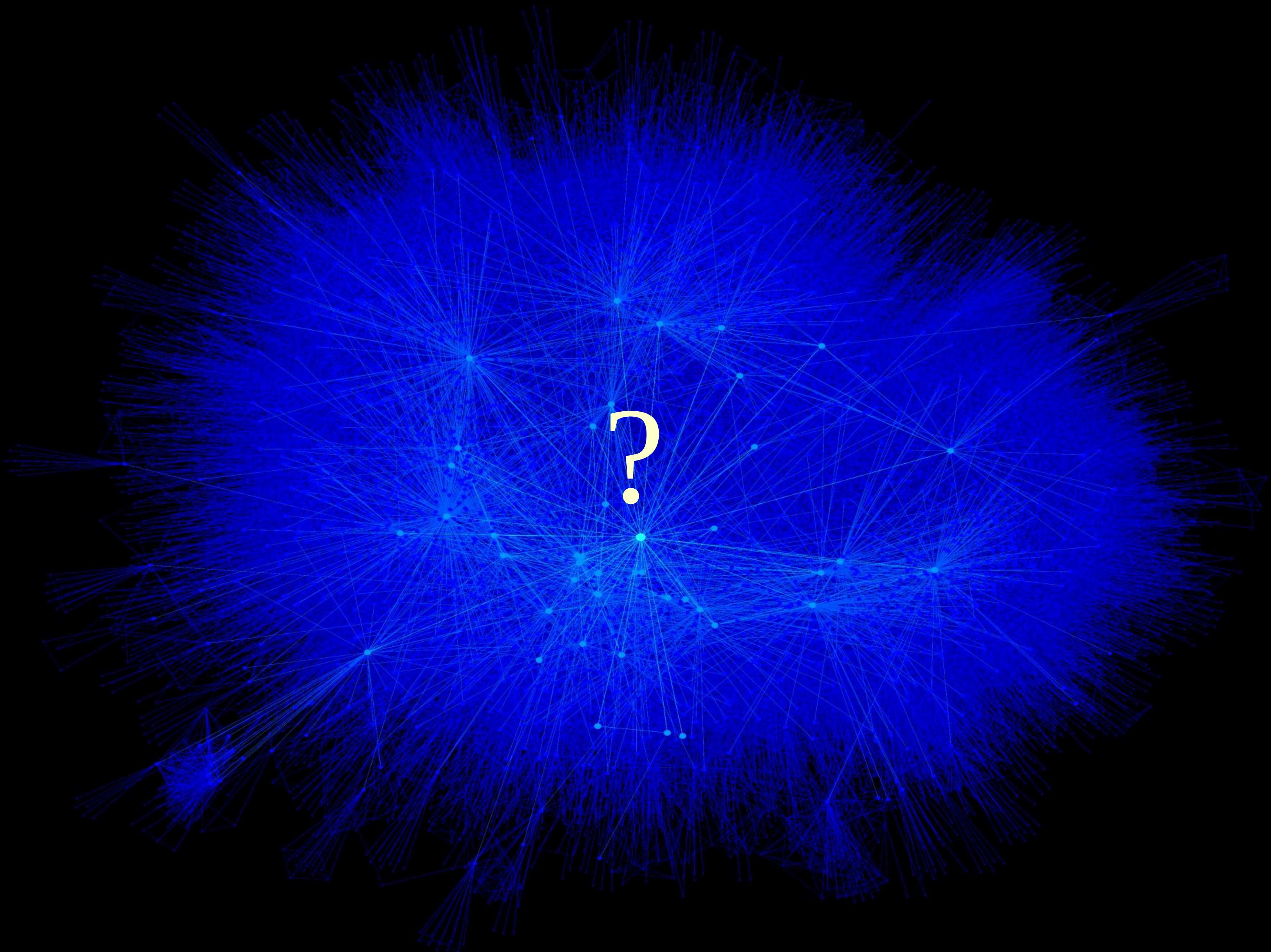
Απόδειξη:



Εφαρμογές…

παίγνιο =

αγορά	→	**ισορροπία τιμών**
Internet	→	**ισορροπία κίνησης πακέτων**
δρόμοι	→	**ισορροπία στην κίνηση της Αθήνας**
facebook, hi5, myspace, …	→	**δομή του κοινωνικού δικτύου**



Πληροφορική στο Μπέρκλεϋ …