Η ΕΙΚΑΣΙΑ ΤΟΥ POINCARE ΚΑΙ Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ G. PERELMAN

Ζήνων Λυγάτσικας
Ιανουάριος 2007

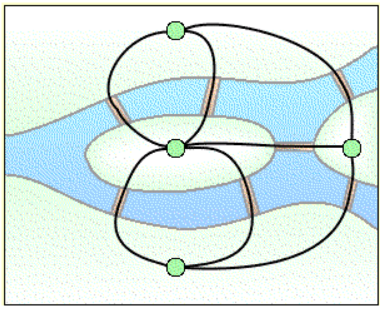
O Grigori Perelman έγινε διάσημος αρνούμενος αρκετά βραβεία. Η τελευταία άρνηση του Μεταλίου του Κλάδου (Fields Metal), το βραβείο με το μεγαλύτερο γόητρο στα Μαθηματικά, ήταν αυτή που τον έφερε στο προσκήνιο. Πέρα από την ανεκδοτική καρικατούρα του λαμπρού αλλά ακοινώνητου επιστήμονα, οι εργασίες του Grigori Perelman έχουν φέρει ένα νέο και εύφορο όραμα της γεωμετρίας στις τρεις διαστάσεις.

Τι είναι η τοπολογία;

Η τοπολογία είναι ένας κλάδος των μαθηματικών η γέννηση του οποίου μας φαίρνει περίπου τρείς αιώνες πίσω στον Leibniz και ειδικότερα στον Euler. Η ιστορία μας αρχίζει από ένα πρόβλημα εκείνης της εποχής που έμεινε γνωστό σαν το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg, παλιά πόλη της ανατολικής Πρωσσίας (σήμερα η ρώσικη πόλη Kaliningrand): θέλουμε να οργανώσουμε στην πόλη Königsberg έναν περίπατο του οποίου η διαδρομή θα περνά μιά φορά και μόνο από καθέ μια των επτά γεφυρών και θα επιστρέφει στην αφετηρία. Αυτό το ερώτημα, που ανήκει ουσιαστικά στη γεωμετρία, δεν έχει καμμία σχέση με τις γεωμετρικές έννοιες της απόστασης ή του σημείου αναφοράς, επειδή αναφέρεται στη σχετική διάταξη των γεφυρών. Οι υποθέσεις μπορούν να κωδικοποιηθούν μόνο σ' έναν γράφο (γράφημα) ο οποίος θα είναι, επίσημα αναφέρεται σαν κύκλος του Euler, ένα γράφημα που περνά ακριβώς από μια και μόνο μια διαδρομή και καταλήγει στην αφετηρία.

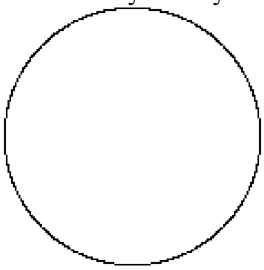
O Euler 1707-1783

Το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg και ο αντίστοιχος γράφος

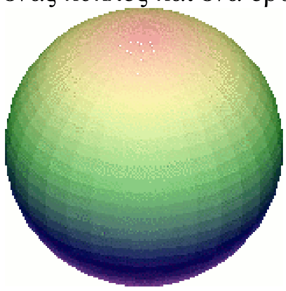


Και, να το πρώτο χαρακτηριστικό της τοπολογίας: Η τοπολογία είναι ο μαθηματικός κλάδος στον οποίο, όπως και στο παραπάνω πρόβλημα, η γεωμετρία είναι πιο ασθενής. Και με αυτό εννοούμε ότι, δύο σχήματα είναι ισοδύναμα αν έχουν «την ίδια μορφή». Δεν υπάρχει παραδείγματος χάρη καμία τοπολογική διαφορά ανάμεσα σε μια κηλίδα μελανιού και έναν δίσκο, ανάμεσα σε ένα τετράγωνο και έναν κύκλο, ή ακόμη ανάμεσα μια σφαίρα και ελλειψοειδές. Η ιδιότητα αυτή να έχουν την ίδια μορφή εκφράζεται μαθηματικώς με την έννοια του ομοιομορφισμού.

Μια κηλίδα μελανιού και ένας δίσκος είναι ομοιομορφικοί...

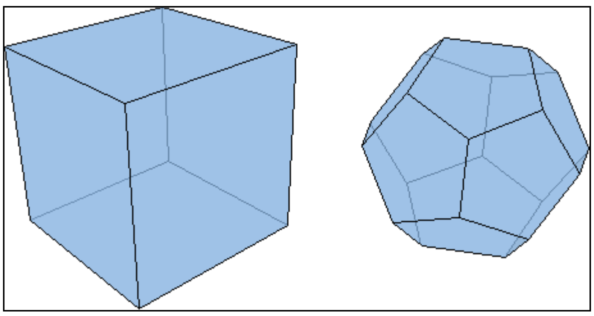


... όπως ένας κύκλος και ένα ορθογώνιο,



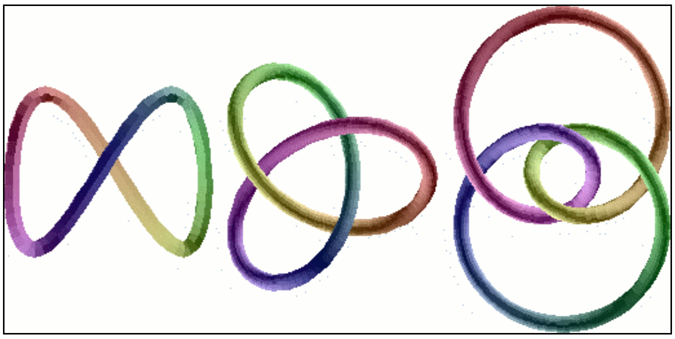
... ή ακόμα μια σφαίρα και ένα ελλειψοειδές

Στα 1736, ο Euler έδειξε ότι το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg δεν λύνεται και για να το αποδείξει όρισε το «βαθμό» μιας κορυφής μέσα γράφο (είναι ο αριθμός των γραμμών που φτάνουν στην κορυφή). Μία διαδρομή είναι κύκλος του Euler όταν ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος αριθμός. Η παρουσία όμως μια τουλάχιστον κορυφής περιττού βαθμού στο πρόβλημα των γεφυρών Königsberg, απαγορεύει την ύπαρξη ενός κύκλου του Euler, και έτσι το αίνιγμα δεν έχει λύση. Ο κύκλος του Euler λοιπόν είναι ένα αντικείμενο με μια χαρακτηριστική ιδιότητα αμετάβλητη. Κατά ένα τρόπο πιό γενικό, θα λέγαμε επίσης ότι το αντικείμενο της τοπολογίας είναι να παρουσιάσει τα αμετάβλητα των ιδιοτήτων των αντικειμένων που μελετά. Μεταξύ των αμεταβλήτων, αναφέρουμε την γνωστή χαρακτηριστική των Euler-Poincaré, που εισήχθει από τον Euler στα 1752 για τα κυρτά πολύεδρα. Η χαρακτηριστική αυτή είναι ότι ο αριθμός των πλευρών και των κορυφών μειωμένος από τον αριθμό των ακμών σ'ένα κυρτό πολύγωνο είναι πάντα 2.



Ένας κύβος έχει 6 πλευρές, 12 ακμές και 8 κορυφές: η χαρακτηριστική των Euler-Poincaré είναι 6+8-12=2.
Στο δωδεκαέδρο:12 πλευρές, 30 ακμές και 20 κορυφές (12+20-30=2).

Πιό πρόσφατα και μέσα σε άλλη ταξινόμιση στην θεωρία των κόμβων, που μελετά τις διαφορετικές διαμορφώσεις που μπορεί να πάρει μια μπούκλα μέσα στο χώρο, η τοπολογία γνωρίζει μια δεύτερη σπουδαία ανακάλυψη νέων σταθερών (τα πολυώνυμα Jones, 1983). Παρόλα αυτά, κάποιοι κόμβοι δέχονται τα ίδια πολυώνυμα Jones και έτσι η έρευνα των αμετάβλητων ιδιοτήτων μένει κατά ένα μεγάλο μέρος ανοικτή, απόδειξη ότι η τοπολογία κρύβει ακόμη σήμερα πολλά μυστήρια.

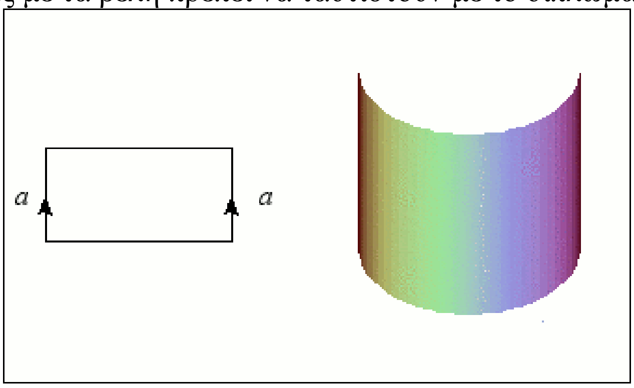


Απο τα αριστερά προς τα δεξιά, ο στοιχειώδης κόμβος (ένας κύκλος περιστραμένος), ο κόμβος του τριφυλλιού και ο κόμβος του οκτώ: αυτοί τρεις κόμβοι είναι όλοι διακεκριμμένοι μεταξύ τους, με την έννοια ότι για να πάρουμε τον έναν διαδοχικά από τον άλλο πρέπει να κόψουμε τον αρχικό.

Με ένα χαρτί και λίγο κόλλα…

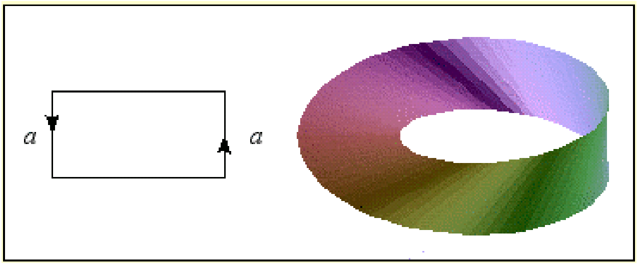
Τα αντικείμενα της τοπολογίας, ονομάζονται *τοπολογικές πολλαπλότητες (topological varieties)*, διαμορφώνουν έναν ζωολογικό κήπο δύσκολα κατανοητό αλλά πλούσιο: τιτάνια προσπάθεια να βάλουμε μια τάξη, έργο αποκλειστικά των μαθηματικών, οι οποίοι όπως θα δούμε δεν έχουν χάσει τη φαντασία τους και έτσι αποδέχοντε την πρόκληση. Αλλά πριν να δούμε τις νεωτεριστικές ιδέες του Poincaré ιδιαίτερα, ας κάνουμε μια γρήγορη συνάντηση με μερικά πολύ γνωστά αντικείμενα της τοπολογίας…

Έχουμε συναντήσει ήδη τα γραφήματα και τους κόμβους, που είναι της διάστασης 1. Τα σχήματα τα πιο απλά μετά τις καμπύλες είναι φυσικά οι επιφάνειες (τα είδη διάστασης 2). Εφόσον ένας δίσκος είναι ομοιομορφικός σε ένα ορθογώνιο, αρκεί μια λωρίδα χαρτιού και λίγο κόλλα για να φτιάξουμε την πρώτη πολλαπλότητα: τον κύλινδρο, τον οποίο ακόμα και ένα παιδί ξέρει εύκολα να κατασκευάσει κάνοντας να συμπέσουν οι δύο απέναντι πλευρές. Η αντίστοιχη μαθηματική πράξη είναι μόλις και μετά βίας πιό περίπλοκη και στη θέση «της τοπολογικής κόλλας» θα βάζαμε αυτή του συνόλου πηλίκου. Αυτή η ένωση συμβολίζεται από το αριστερό σχεδιάγραμμα της εικόνας: οι πλευρές με τα βέλη πρέπει να ταυτιστούν με το δίπλωμα.



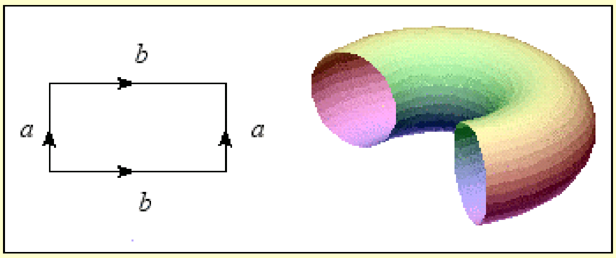
Κατασκευή ενός κυλίνδρου κολλόντας τις πλευρές ενός ορθογωνίου παραλ/μού.

Αν η λωρίδα του χαρτιού είναι αρκετά μακριά, μπορούμε επίσης να την κάμψουμε μια μισή στροφή πριν την ένωση: τότε θα πάρουμε την διάσημη ταινία του Möbius, στη μνήμη του μαθηματικού που την φαντάστηκε το 1858. Είναι το το πιό απλό παράδειγμα μιας μη-προσανατολοσμένης τοπολογικής πολλαπλότητας: η ταινία του Möbius δέχεται μια μόνο πλευρά, ούτε εσωτερικό ούτε εξωτερικό (για τον λόγο αυτό λέγεται μη-προσανατολισμένη). Στο σχεδιάγραμμα, τα βέλη είναι αντίθετα για να δείξουν την αντιστροφή των προσανατολισμών πλευρών που ενώνονται μεταξύ τους.



Κατασκευή της ταινίας του Möbius.

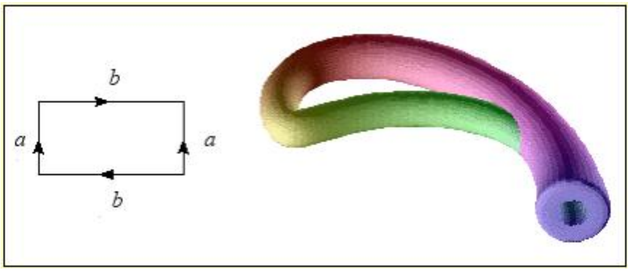
Ας επιστρέψουμε τώρα στον κύλινδρο, στον οποίο θα κολλήσουμε τα δύο κυκλικά άκρα: το αποτέλεσμα θα είναι ένας δακτύλιος. Όπως η σφαίρα, έτσι και ο δακτύλιος είναι μια τοπολογική πολλαπλότητα χωρίς άκρα και προσανατολοσμένος. Αλλά, διακρίνεται καθαρά από τη σφαίρα από την ύπαρξη μιας «τρύπας».



Κατασκευή του δακτυλίου.

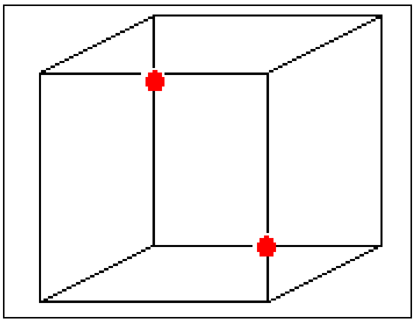
Είναι σχετικά απλό να κατασκευάσουμε μια ταινία του Möbius κάμπτοντας μια λωρίδα του χαρτιού. Αν κολλήσουμε τώρα τα χείλη ενός κυλίνδρου με αντίθετο προσανατολισμό έχουμε ένα νέο προκλητικό αντικείμενο η κατασκευή του οποίου απαιτεί να περάσουμε από το εσωτερικό του κυλίνδρου με μια προβληματική διασταύρωση μέσα στο τρισδιάστατο χώρο. Αλλά με πολύ θάρρος και με πίστη ότι τίποτα δεν είναι αδύνατο, μπορούμε να πάρουμε το παράξενο αυτό αντικείμενο που καλείται φιάλη του Klein, στο όνομα του γερμανού μαθηματικού που το βρήκε στο τέλος του XIX ου αιώνα.


Η φιάλη του Klein από γυαλί που κατασκεύασε ο Clifford Stoll.

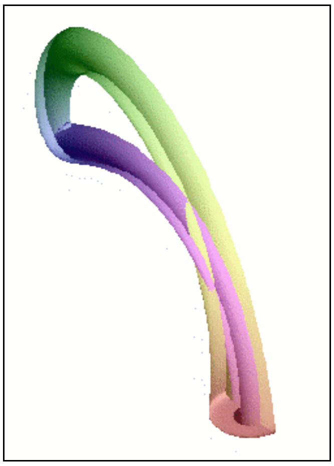


Κατασκευή της φιάλης του Klein.

Παρόλα αυτά, εφόσον ξεκινάμε από ένα ορθογώνιο του οποίου τα άκρα ξανακολλιούνται μεταξύ τους, δεν πρέπει να δούμε την τομή σαν κάτι που είναι ορατό, όπως στις παραπάνω εικόνες. Η δυσκολία γεννιέται από το ότι ζούμε μέσα σε έναν τρισδιάστατο χώρο, και ότι για να δείξουμε όπως πρέπει την κατασκευή της φιάλης του Klein, θα χρειαζόμασταν να έχουμε μια επιπλέον διάσταση: η τομή της φιάλης Klein με τον εαυτο της είναι το ίδιο εξωπραγματική όπως αυτή που συνήθως αγνοούμε στην τρισδιάστατη αναπαράσταση του κύβου.



Βλέπουμε έναν κύβο ή 12 ευθ. τμήματα του επιπέδου. Πρέπει να φανταστούμε τον όγκο του κύβου μαζύ με τις τομές σημειωμένες με κόκκινο στο επίπεδο.

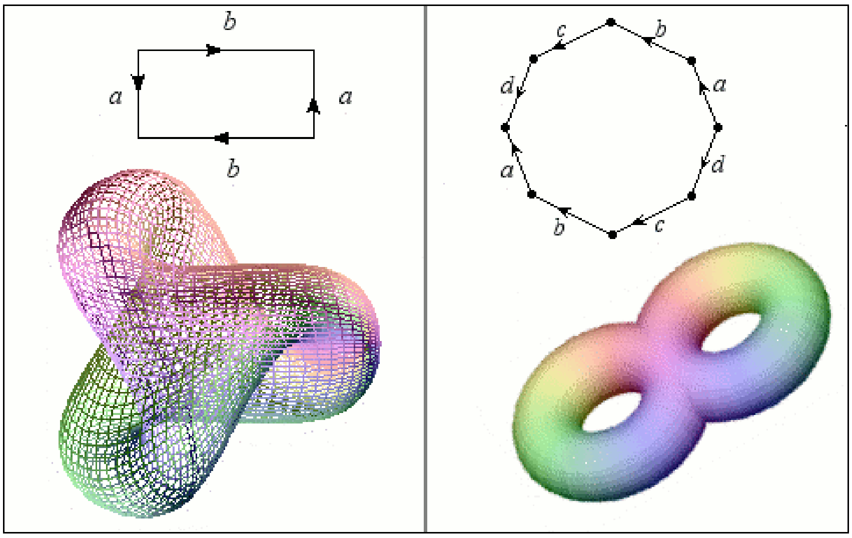


Η αναπαράσταση της φιάλης του Klein μέσα στο χώρο των τριών διαστάσεων συνεπάγεται την αυτό-τομή της φιάλης. Πρόκειται για το ίδιο φαινόμενο της αναπαράστασης του κύβου στο επίπεδο.

Η φιάλη του Klein «ζει» μέσα στον χώρο των τεσσάρων διαστάσεων και είναι παράδειγμα τοπολογικής πολλαπλότητας χωρίς άκρα και μη-προσανατολισμένης. Αντιθετως με τη σφαίρα ή το δακτύλιο, δεν έχει ούτε εσωτερικό, ούτε εξωτερικό!

Εντούτοις, τίποτα δεν μας αποτρέπει να φανταστούμε άλλες ενώσεις και να αντικαταστήσουμε τις πλευρές ενός ορθογωνίου από εκείνους ενός πολυγώνου: αποκτούμε τότε ένα πλήθος τοπολογικών πολλαπλοτήτων με διαφορετικές ιδιότητες, με ή χωρίς άκρα, με ή χωρίς προσανατολισμό, με μία ή περισσότερες «τρύπες» κ.λ.π. Με λίγη κόλλα και φαντασία οι δυνατότητες είναι μεγάλες.
Όλες αυτές κατασκευές θα έμεναν στο στάδιο της απλής περιέργειας εάν οι πολλές εφαρμογές της τοπολογίας δεν ήταν και εκτός του τομέα των μαθηματικών: σαν εργαλείο στη θεωρητική φυσική παραδείγματος χάρη, αλλά επίσης ως την πηγή της έμπνευσης όπως παρσουζιάζεται στη «μορφογέννηση» του R. Thom ή πιό πρόσφατα «στον κόσμο σε σχήμα σιφωνιού» του J.P. Luminet (ο οποίος στηρίζεται πρώτιστα

στις ενώσεις ομοίας φύσης εφαρμοσμένες σε τοπολογικές πολλαπλότητες διάστασης 3).



Αριστερά, το προβολικό πραγματικό επίπεδο είναι όπως η φιάλη του Klein, ένα είδος αναπαριστόμενο στις τρείς διαστάσεις (οι τομές είναι επίσης εξω-πραγματικές).
Ένα ιδιαίτερο collage των πλευρών ενός οκταγώνου δίνει ένα δακτύλιο με δύο «τρύπες» , δεξιά.

Poincaré, ο ιδρυτής της Αλγεβρικής Τοπολογίας

Ο κρίσιμος ρόλος που παίζει η τοπολογία στα μαθηματικά έχει αναγνωριστεί νωρίς από Poincaré (1854-1912). Έγραφε: *«Όλοι οι διαφορετικοί δρόμοι που έχω διαδοχικά εργασθεί με οδήγησαν στην Analysis Situs (είναι το παλιό όνομα της τοπολογίας). Είχα την ανάγκη των δεδομένων αυτού του κλάδου για να συνεχίσω τις μελέτες μου στις καμπύλες που ορίζονται από διαφορικές εξισώσεις και να τις επακτείνω σε διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης και ειδικότερα αυτές του προβλήματος των τριών σωμάτων. Είχα την ανάγκη για τη μελέτη των μη-ομόμορφων συναρτήσεων δύο μεταβλητών. Είχα την ανάγκη τους για τη μελέτη των πολλαπλών ολοκληρωμάτων και για την εφαρμογή αυτής στη μελέτης στο ανάπτυγμα μιας διαταραγμένης συνάρτησης. Τελικά πρόβλεψα μέσα στο Analysis Situs* ένα *μέσο για να θίξω ένα σημαντικό πρόβλημα της θεωρίας των ομάδων, την έρευνα των διακριτικών ομάδων ή των πεπερασμένων ομάδων που περιλαμβάνονται μεσα σε μια δεδομένη συνεχή ομάδα. »*

Γιατί δεν μπορεί να παραμορφώσουμε μια σφαίρα σε ένα δακτύλιο, χωρίς να την σχίσουμε; Πώς μπορούμε να περιγράψουμε και να χαραστηρίσουμε αυτές τις δύο διαφορετικές πολλαπλότητες; Βέβαια υπάρχουν μερικές στοιχειώδεις ιδιότητες (ύπαρξη συνόρου, προσανατολισμός), καθώς και μερικές άλλες όπως το γένος μιας πολλαπλότητας ορισμένο από τον Riemman και των αριθμών Betti (XIX αιώνας) κλπ, αλλά η δημοσίευση στα 1895 της *Analysis situs* θα σφραγίσει το πεπρωμένο της σύγχρονης τοπολογίας. Ο Poincaré εκθέτει εκεί πράγματι τη λαμπρή ιδέα να συνδέσει στις πολλαπλότητες κάποιες σταθερές που δεν είναι πια αριθμοί αλλά πλήρεις αλγεβρικές δομές! Προβλεπόμενες από Lagrange και τον Galois, εγκατεστημένες οριστικά στην γεωμετρία από τον Klein μέσα στο πρόγραμμα που φέρνει το όνομα Erlangen, οι δομές αυτές δεν είναι τίποτα άλλο παρά οι ομάδες. Η *Analysis situs* και οι μετέπειτα συμπληρώσεις της σημειώνουν τη γέννηση μιας τόσο ισχυρής και τόσο εύφορης θεωρίας, πανταχού παρούσας στη μεγάλη πλειοψηφία των διαφόρων κλάδων των σύγχρονων μαθηματικών, την αλγεβρική τοπολογία και πίσω από αυτή την ομολογιακή άλγεβρα.

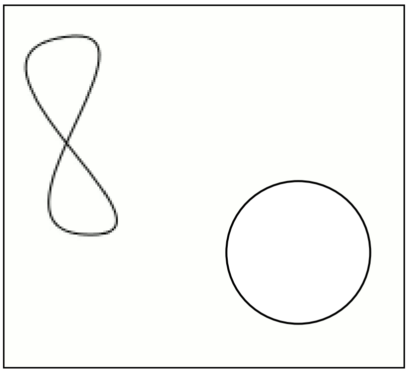
Οι ανακαλύψεις του Poincaré αρθρώνονται γύρω από δύο μεγάλες ιδέες:

1. είναι πιθανό να συνδεθεί μια πολλαπλότητα με «τις ομολογιακές ομάδες», ερμηνεύοντας έτσι την χαρακτηριστική των Euler-Poincaré και των αριθμών Betti σαν τον βαθμό των ομολογιακών ομάδων,
2. μπορούν να κωδικοποιηθούν πολλές πληροφορίες σχετικά με μια πολλαπλότητα από ένα νέο αντικείμενο «την θεμελιώδη ομάδα» ή «ομάδα του Poincaré».

Οι δύο έννοιες δεν είναι εντελώς ξένες μεταξύ τους εφόσον η πρώτη, η ομολογιακή ομάδα, πηγάζει εύκολα από την ένοια της θεμελειώδους ομάδας.

Από την ελαστικότητα στην θεμελιώδη ομάδα

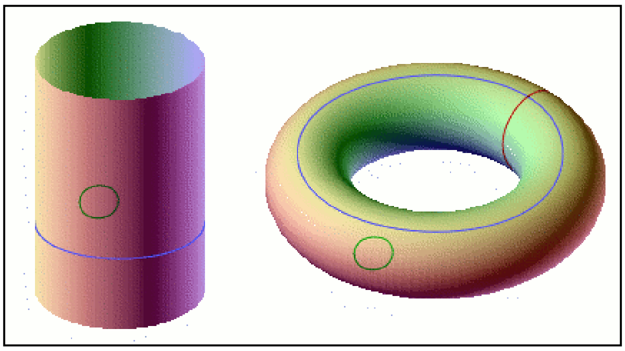
Μετά την κόλλα και το χαρτί έχουμε ανάγκη την ελαστικότητα! Ποιό αναλυτικά, το μαθηματικό αντικείμενο που μας ενδιαφέρει είναι η ελαστικότητα των κλειστών καμπυλών πάνω σε μια τοπολογική πολλαπλότητα. Δύο τέτοιες κλειστές καμπύλες θα είναι ομοτοπικές αν μπορούμε να περάσουμε από μια καμπύλη σε μια άλλη με μια συνεχή παραμόρφωση. Για παράδειγμα, στο επίπεδο και στην επιφάνεια της σφαίρας δύο κλειστές καμπύλες είναι πάντα ομοτοπικές. Ή διαφορετικά, μπορούμε να περάσουμε από την μια καμπύλη στην άλλη χωρίς να βγούμε από την επιφάνεια που αυτές ανήκουν. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται «απλή συνεκτικότητα» και παίζει έναν ουσιαστικό ρόλο μέσα στη διατύπωση της εικασίας Poincaré.



Το πλάνο είναι απλά συνεκτικό: δύο κλειστές καμπύλες είναι εκεί πάντα ομοτοπικές (εδώ μια καμπύλη «σε οκτώ» και ένας κύκλος).
Η σφαίρα απολαμβάνει επίσης αυτή την ιδιότητα.

Η κατάσταση παρόλα αυτά είναι διαφορετική για την πλειοψηφία των τοπολογικών πολλαπλοτήτων! Παραδείγματος χάρη, οι κλειστές καμπύλες σ' έναν κύλινδρο διαιρούνται σε δύο κατηγορίες: εκείνοι που τυλίγονται γύρω από τον κύλινδρο και το κέντρο τους ανήκει στο εσωτερικό του κυλίνδρου και αυτοί που το κέντρο τους ανήκει πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου. Είναι πράγματι αδύνατο, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα του κυλίνδρου, να παραμορφώσετε τον μπλέ κύκλο ώστε να συμπέσει με τον πράσσινο. Ομοίως μπορούμε να δούμε τρείς διαφορετικές κατηγορίες κλειστών καμπυλών στην επιφάνεια ενός δακτυλίου.

Πάνω στον κύλινδρο οι πράσσινοι και μπλέ κύκλοι δεν είναι ομοτοπικοί. Το ίδιο συμβαίνει και στην επιφάνεια του δακτυλίου με τους κύκλους με μπλέ, κόκκινο και πράσσινο.



Ο ρόλος της θεμελειώδους ομάδας είναι να ταξινομήσει ακριβώς τις κλειστές καμπύλες μιας πολλαπλότητας, σύμφωνα με το άν είναι ομοτοπικές ή όχι (ενσωματώνοντας επίσης και κάποιες άλλες πληροφορίες - όπως ο «αριθμός των τυλιγμάτων»). Η πολυπλοκότητα μιας πολλαπλότητας απεικονίζεται έτσι στην θεμελιώδη ομάδα της πολλαπλότητας. Κάποιες άλλες λειτουργίες (όπως οι ενώσεις) μεταφράζονται από «υπολογισμούς» μέσα στις θεμελιώδεις ομάδεις. Αυτό το γεφύρωμα όχι μόνο επιτρέπει να επωφεληθούμε από την δυνατότητα της άλγεβρας να μελετάει προβλήματα τοπολογικής φύσης, αλλά πέρα από αυτό να κατανοήσουμε την ενοποιήσει της μαθηματικής επιστήμης.

Η εικασία Poincaré

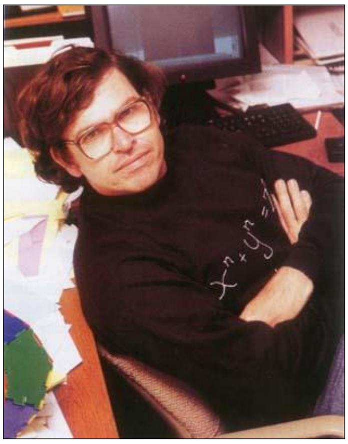
Μια τοπολογική πολλαπλότητα με την πιο απλή θεμελειώδη ομάδα όπως το επίπεδο ή η σφαίρα, λέγεται «απλά συνεκτική». Αντιθέτως, ο δακτύλιος, ο κύλινδρος, η ταινία του Möbius και πολλές άλλες πολλαπλότητες δεν είναι απλά συνεκτικές. Μεταξύ όμως όλων των επιφανειών η σφαίρα καταλαμβάνει μια αξιοσημείωτη θέση επειδή είναι η μόνη επιφάνεια που είναι συγχρόνως χωρίς όρια, απλά συνεκτική και συμπαγής (που σημαίνει *χοντρικά* ότι οροθετείται μέσα στο χώρο, αντιθέτως με το επίπεδο).
Η λαμπρή διαίσθηση του Poincaré προέβλεψε ότι η ιδιότητα αυτή σφαίρας (απουσία ορίων, συμπάγεια και απλή συνεκτικότητα) χαρακτηρίζει όχι μόνο τη συνηθισμένη σφαίρα αλλά επίσης τις σφαίρες ανώτερης διάστασης. Ο κύκλος και η σφαίρα έχουν πράγματι μεγάλες αδελφές μέσα στον χώρο των τεσσάρων διαστάσεων και ποιο πάνω. Αλλά και οι εξισώσεις των σφαιρών αποδεικνύουν την σχέση αυτή καλύτερα από τα σχήματα όπως φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

ΟΝΟΜΑ	**ΕΞΙΣΩΣΗ**	**ΣΥΜΒΟΛΟ**
Κύκλος	$x^2+y^2=R^2$	$\mathbb{S}^1$
Σφαίρα	$x^2+y^2+z^2=R^2$	$\mathbb{S}^2$
Σφαίρα σε 3 διαστάσεις	$x^2+y^2+z^2+t^2=R^2$	$\mathbb{S}^3$
…	...	
Σφαίρα σε n-1 διαστάσεις	$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2=R^2$	$\mathbb{S}^{n-1}$

Οι εξισώσεις των σφαιρών διάστασης ≥ 3 αντιγράφουν εκείνου του κύκλου ή της συνηθισμένης σφαίρας.

Η εικασία Poincaré δηλώνει ότι: όλες οι συμπαγείς πολλαπλότητες διάστασης n=3 (ή περισσότερο), χωρίς όρια και απλά συνεκτικές, είναι ομοιομορφικές σε μια σφαίρα διάστασης n. Κατά τη διάρκεια του $20^{ου}$ αιώνα, πολλές εργασίες έχουν αφιερωθεί στην εικασία αυτή και το 1961-62, η εικασία αποδεικνύεται για όλες τις διαστάσεις μεγαλύτερες του 5 (n=5 από τον Zeeman, $n \geq 7$ και για $n \geq 5$ από τον Smale, για n=6 από τον Stallings). Είκοσι χρόνια μετά, η περίπτωση για n=4 αποδεικνύεται από τον Freedman (1982), έτσι ώστε δεν έμεινε πια παρά να αποδειχθεί για την περίπτωση της διάστασης 3. Αλλά η μνημειακή δυσκολία απόδειξης αυτής της τελευταίας περίπτωσης άξιζε να εμφανιστεί η εικασία αυτή μεταξύ των επτά «προβλημάτων της χιλιετίας» του *Clay Mathematics Institute*.

Το 2002 και το 2003, επεκτείνοντας τις εργασίες του P. Hamilton (1982), ο Grigori Perelman εκδίδει στο Internet τρία άρθρα που συγκεντρώνει όλα τα απαραίτητα στοιχεία για να αποδείξει μια πρόβλεψη οφειλόμενη στο W. Thurston στο τέλος 1970 την «εικασία γεωμετρικοποίησης»[1]. Αλλά αυτή δεν είναι τίποτα άλλο παρά η εικασία του Poincaré για n = 3!



Ο W. Thurston

Ο G. Perelman

Λυγάτσικας Ζήνων
Βαρβάκειο Γυμνάσιο-Λύκειο
Ιανουάριος 2007

[1] Πρόκειται μια ενδιαφέρουσα εικασία με κοσμολογικές συνέπειες. Με λίγα λόγια η εικασία αυτή λέει ότι το σύμπαν έχει τη δομή είτε της υπερβολικής είτε της επίπεδης είτε της σφαιρικής γεωμετρίας.