Το ολοκλήρωμα Kurzweil Henstock

Ένα νέο ολοκλήρωμα στην εκπαίδευση ;

Λυγάτσικας Ζήνων - ΠΠ ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

8 Νοεμβρίου 2013

Θεωρία Ολοκληρωτικού Λογισμού

1. B. Riemann 1867
2. H. Lebesque 1901
3. O. Perron 1914
4. J. Kurzweil 1957

Yee P.-L., Výborný R.: *The Integral: an easy approach after Kurzweil and Henstock*, Cambridge Univ. Press, Cambridge United Kingdom (2000).

Το άρθρο του Kurzweil, 1957

- Το 1957 ο Jaroslav Kurzweil δημοσίευσε ένα άρθρο με τίτλο Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter. Στο άρθρο αυτό γενίκευσε λύσεις κάποιων συνήθη διαφορικών εξισώσεων της μορφής

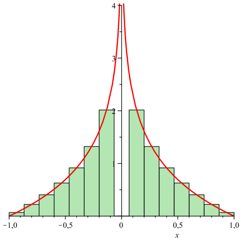
$$y' = f(x)$$

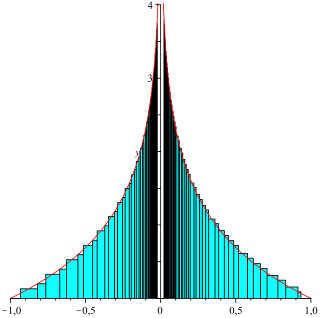
  δίνοντας δύο νέους ορισμούς του ολοκληρώματος.
- Ο πρώτος γενικεύει το ολοκλήρωμα Perron-Stieltjes. Ο δεύτερος βασίζεται στο άθροισμα Riemann και είναι γενίκευση του ολοκληρώματος Stieltjes
- Το μεγαλύτερο advantage της θεωρίας είναι ότι διατηρεί την διασθητική γεωμετρική σημασία του ολοκληρώματος Riemann, αλλά έχει την θεωρητική δύναμη του ολοκληρώματος Lebesgue.

Τα χαρακτηριστικά της ολοκλήρωσης Kurzweil

Η μεταβλητότητα του μήκους των διαστημάτων στην διαμέριση. Στον ορισμό του Riemann το διάστημα διαιρειται σε υποδιαστήματα ίσου μήκους ενώ στον ορισμό του Kurzweil ΟΧΙ. Η βασική ιδέα είναι:

συγκέντρωση της προσοχής εκεί όπου το ολοκλήρωμα Riemann έχει το πρόβλημα





Ο ορισμός της δ-εκλέπτυνσης

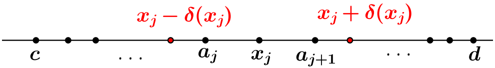
Λήμμα

Λήμμα Cousin[α] *Αν $\delta : [a, b] \mapsto \mathbb{R}_+$ και $a \leq c < d \leq b$ τότε υπάρχει μια διαμέριση που είναι δ-εκλέπτυνση του διαστήματος $[c, d]$.* ■

[α] Ισοδύναμο του Θεωρήματος Bolzano-Weierstrass: Κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ περιέχει μια συγκλίνουσα υποακολουθία

Κάθε έλεγχος στα υποδιαστήματα είναι και έλεγχος στα υπο-υποδιαστήματα

δ-εκλέπτυνση μιας διαμέρισης του $[c, d]$



Το ολοκλήρωμα

Ορισμός

f είναι *R- ολοκληρώσιμη* *στο διάστημα* $[a,b]$, *αν* $\forall \epsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *και* $I \in \mathbb{R}$ *με την εξής ιδιότητα: αν πάρουμε μια διαμέριση του* $[a,b]$ *με* $h_j = a_j - a_{j-1} \leq \delta$

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b \wedge x_j \in [a_j, a_{j-1}] \longrightarrow \left| \sum_{j=0}^{n} f(x_j)h_j - I \right| \leq \varepsilon$$

Ορισμός

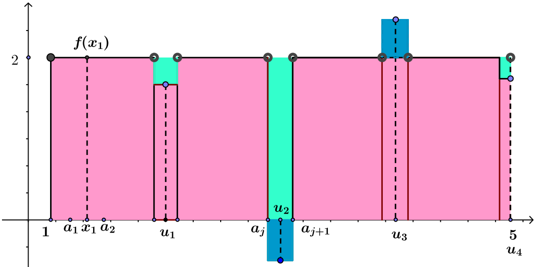
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *f είναι* *ΚΗ- ολοκληρώσιμη* *στο διάστημα* $[a,b]$, *αν* $\forall \epsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$, $E \in \mathbb{R}$ *και διαμέριση* $\Pi = \left(\Delta, (x_i)_{1 \leq i \leq n}\right)$ *η οποία να είναι* **δ-εκλέπτυνση** *έτσι ώστε:*

$$\left\{ \begin{array}{l} a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b \\ \Delta := \{a_0, \ldots, a_n\} \\ x_j \in [a_j, a_{j-1}], \ h_j = a_j - a_{j-1} \leq \delta(x_j) \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \sum_{j=0}^{n} f(x_j)h_j - E \right| \leq \varepsilon$$

Γράφουμε $\int_a^b f(x)dx = E$

Το παράδειγμα της βαθμωτής συνάρτησης

$f(x) = 2$
$\forall x \in D$ όπου
$D := [1,5] - \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$
$M = \max\{2, |u_i|\}$
$\int_1^5 f(x)dx = 8$



Σταθερός μετρητής: $\delta = \dfrac{\epsilon}{4 \cdot 4 \cdot M}$

Μεταβλητός μετρητής: $\delta(u_i) = \dfrac{\epsilon}{2^5 \cdot |f(u_i)|}$ και $\delta(x) = 1$ για $x \in D$, τότε:

$$\left| \sum_{j=0}^{n} f(x_j)(a_{j+1} - a_j) - \int_1^5 f(x)dx \right| \leq 2 \cdot 4 \cdot \sum |f(u_i)| \delta(u_i) = 2^5 \frac{\epsilon}{2^5} = \epsilon$$

Θεμελειώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

ΘΕΏΡΗΜΑ

Έστω F μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $I = [a, b]$ και $F' = f$ στο I. Τότε, f είναι ΚΗ-ολοκληρώσιμη στο I και

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

Η παραγώγιση ορίζεται ως συνήθως

Α απόδειξη ακολουθεί την απόδειξη στην R-ολοκλήρωση

Η αλγοριθμική διατύπωση του Λήμματος Cousin

Έστω $\delta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ και $\epsilon > 0$. Μπορούμε να ορίσουμε μια αυστηρώς αύξουσα και πεπερασμένη ακολουθία

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

έτσι ώστε:

1. $x_0 = a$
2.
   1. είτε $x_i \leq x_{i-1} + \delta(x_{i-1})$ (1)
   2. ή $x_i - \delta(x_i) \leq x_{i-1}$, (2)
   3. ή $0 < x_i - x_{i-1} \leq \epsilon$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Αν δεν συμβαίνει ούτε το (1), ούτε το (2), τότε το διάστημα περιέχει ένα σημείο ξ έτσι ώστε

$$\lim_{x \to \xi} \inf \delta(x) = 0 \qquad (3)$$

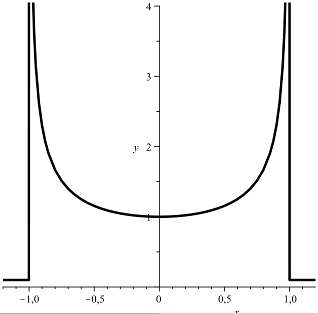
3. $x_n = b$.

Αν το το σύνολο A των σημείων ξ που ικανοποιούν την (3), είναι πεπερασμένο τότε όλα τα x_i με

$0, i \leq n$ ικανοποιούν είτε την (1) είτε την (2)

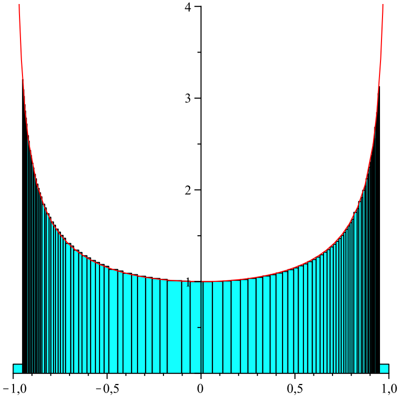
Γενικά δεν είναι τόσο εύκολο να επιλέγουμε τον μετρητή στα παραδείγματά μας. Για περισσότερες πληροφορίες δες στην βιβλιογραφία Έστω η συνάρτηση:

$$f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}\quad f(x)=\begin{cases}0.1 & , \quad x\leq -1\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & , \quad |x|<1\\ 0.1 & , \quad x\geq 1\end{cases}$$



Έστω $\epsilon = 0.03$, ορίζω

$$\delta(x) = \begin{cases} 0.03 & \text{αν} \quad |x| = 1 \\ 0.03(1-|x|) & \text{αν} \quad |x| < 1 \end{cases}$$



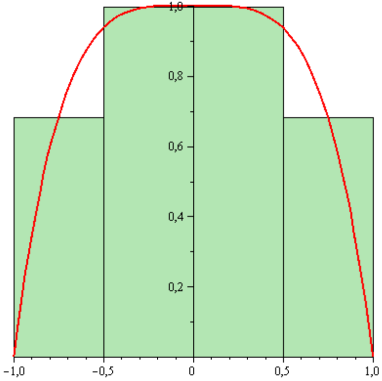
$f_2 := x \mapsto 1 - x^4$ στο διάστημα $[0, 1]$

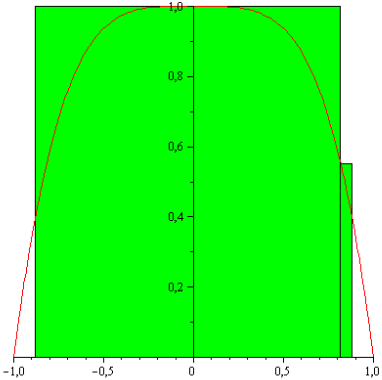
Μετρητής

$$\boxed{\delta := x \mapsto \min\left(\sqrt[4]{0.25\epsilon}, \frac{0.25\epsilon}{\left(|x| + \sqrt[4]{0.25\epsilon}\right)^3}\right)}$$

όπου $\epsilon = 0.75$
και R-αθροίσματα:

khsum(f,-1,1,δ)	1.601132
RiemannSum(f,-1,1,method=lower,partition=60)	1.565926008
$\int_{-1}^{1} f(x)dx$	1.6


1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
−1,0
−0,5
0
0,5
1,0


1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
−1,0
−0,5
0
0,5
1,0

Συνάρτηση όχι R και L-ολοκληρώσιμη

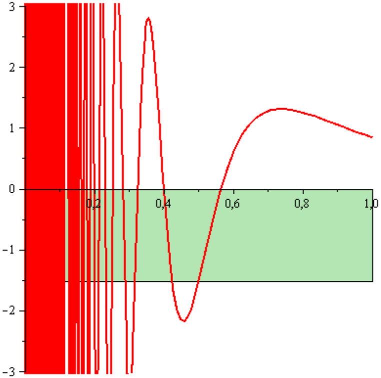
$$g := x \to \begin{cases} \frac{1}{x}\eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{για} \quad x \in (0,1] \\ 0 & \text{για} \quad x = 0 \end{cases}$$

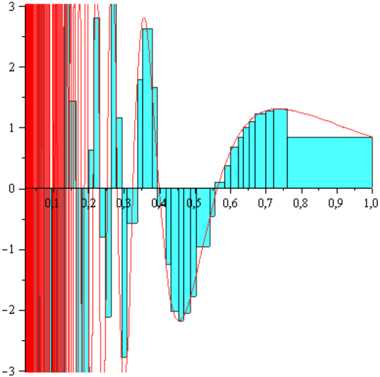
Μετρητής

$$\delta := x \to \begin{cases} \max\left(0.015, \min\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{(n|g'(x)| + 0.6|g''(x)|)}\right)\right) & \text{για} \quad x \in (0,1] \\ \sqrt{0.015} & \text{για} \quad x = 0 \end{cases}$$

Αθροίσματα

khsum(g,0,1,δ)	0.405051
RiemannSum(g,0.1,1,method=lower,partition=60)	-0.7507284560
$\int_0^1 g(x)dx$	0.3080711983


3
2
1
0
-1
-2
-3
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0


3
2
1
0
-1
-2
-3
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0

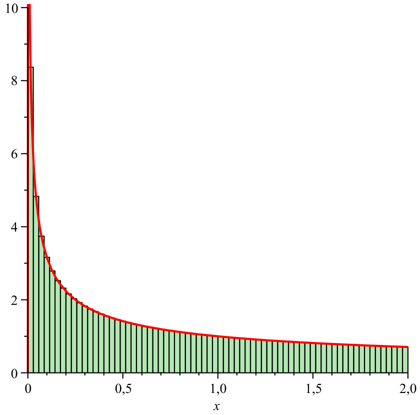
$$f := x \to \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{για} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{για} \quad x = 0 \end{cases}$$

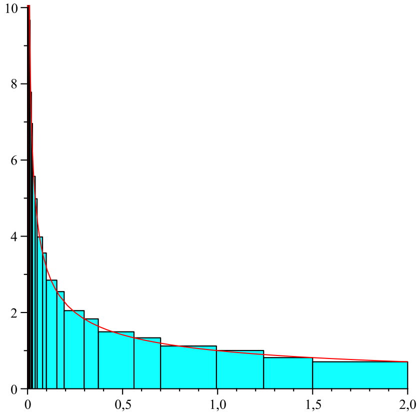
Μετρητής

$$\boxed{\delta := x \to \begin{cases} 2^{-3} \cdot \left|x\right| & \text{για} \quad x \neq 0 \\ 2^{-3} & \text{για} \quad x = 0 \end{cases}}$$

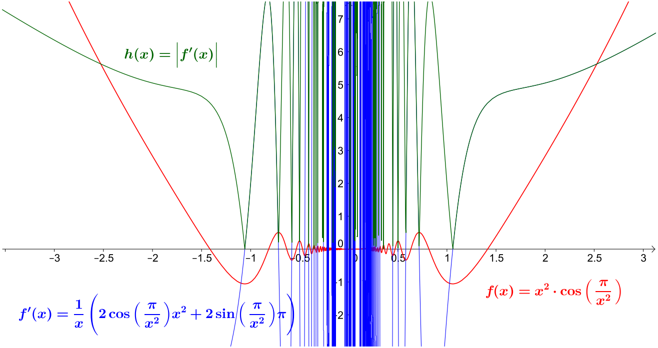
Αθροίσματα

khsum(f,0,2,δ)	2.804892
RiemannSum(f,0,2,method=lower,partition=500)	2.674234620
$\int_0^2 f(x)dx = 2\sqrt{2}$ (Newton)	2.828427124


10
8
6
4
2
0
0
0,5
1,0
1,5
2,0
x


10
8
6
4
2
0
0
0,5
1,0
1,5
2,0

Η ολοκλήρωση ΚΗ δεν διατηρείται στην απόλυτη τιμή



Ένω η $f'(x)$ είναι ΚΗ-ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$, η $\left|f'(x)\right|$ δεν είναι, δες (YV), p. 49

1. Δεν υπάρχει αόριστο ολοκλήρωμα στήν ΚΗ-ολοκλήρωση

1. Δεν υπάρχει αόριστο ολοκλήρωμα στήν ΚΗ-ολοκλήρωση
2. Όλες οι R-ολοκληρώσιμες είναι ΚΗ-ολοκληρώσιμες

1. Δεν υπάρχει αόριστο ολοκλήρωμα στήν ΚΗ-ολοκλήρωση
2. Όλες οι R-ολοκληρώσιμες είναι ΚΗ-ολοκληρώσιμες
3. Όλες οι L-ολοκληρώσιμες είναι ΚΗ-ολοκληρώσιμες

1. Δεν υπάρχει αόριστο ολοκλήρωμα στήν ΚΗ-ολοκλήρωση
2. Όλες οι R-ολοκληρώσιμες είναι ΚΗ-ολοκληρώσιμες
3. Όλες οι L-ολοκληρώσιμες είναι ΚΗ-ολοκληρώσιμες
4. Κάθε ΚΗ-ολοκληρώσιμη είναι μετρήσιμη συνάρτηση

1. Δεν υπάρχει αόριστο ολοκλήρωμα στήν ΚΗ-ολοκλήρωση
2. Όλες οι R-ολοκληρώσιμες είναι ΚΗ-ολοκληρώσιμες
3. Όλες οι L-ολοκληρώσιμες είναι ΚΗ-ολοκληρώσιμες
4. Κάθε ΚΗ-ολοκληρώσιμη είναι μετρήσιμη συνάρτηση
5. Το ΚΗ-ολοκλήρωμα ικανοποιεί το θεώρημα σύγκλισης (με την κατάλληλη προσαρμογή αφού η ΚΗ δεν διατηρεί την απόλυτη τιμή)

1. Δεν υπάρχει αόριστο ολοκλήρωμα στήν ΚΗ-ολοκλήρωση
2. 'Ολες οι R-ολοκληρώσιμες είναι ΚΗ-ολοκληρώσιμες
3. 'Ολες οι L-ολοκληρώσιμες είναι ΚΗ-ολοκληρώσιμες
4. Κάθε ΚΗ-ολοκληρώσιμη είναι μετρήσιμη συνάρτηση
5. Το ΚΗ-ολοκλήρωμα ικανοποιεί το θεώρημα σύγκλισης (με την κατάλληλη προσαρμογή αφού η ΚΗ δεν διατηρεί την απόλυτη τιμή)

Θεώρημα

(YV), p. 97 Αν οι συναρτήσεις $f_n,\ g,\ h$ είναι ΚΗ-ολοκληρώσιμες στο $[A, B] \in \overline{\mathbb{R}}$ με

$$g \leq f_n \leq h \qquad (**)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ και $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n = f$, τότε η f είναι ΚΗ-ολοκληρώσιμη και η $(**)$ ικανοποιείται.

Είναι εφικτή η διδασκαλία της ΚΗ ολοκλήρωσης;

- **Mawhin J.:** *Analyse, fondements, techniques, évolution,* De Boeck Université Bruxelles, 1997.
- **McLeod R.:** *The generalized Riemann Integral*, The Cours Mathematical Monographs, no 20, The Mathematical Association of America, Washington, 1980.

Καλύπτει ένα εντατικότερο πρόγραμμα της τελευταίας τάξης απο αυτό που ήδη υπάρχει. Μπορεί να οργανωθεί το μάθημα της Ανάλυσης γύρω απο το Λήμμα Couzin όπως αναφέρει ο J. Mawhin. Μέσα σε ένα τέτοιο περιβάλλον το ολοκλήρωμα Riemann είναι μια άσκηση, μεσαίου ενδιαφέροντος, της θεωρίας Μέτρου και της Ολοκλήρωσης.

Τα αντιπαραδείγματα στο $\mathbb{R}$

$$F(x) = x \to \begin{cases} x^2 \text{ημ}\dfrac{\pi}{x^2} & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = x \to \begin{cases} 2x\text{ημ}\dfrac{\pi}{x^2} - \dfrac{2\pi}{x}\text{συν}\dfrac{\pi}{x^2} & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

η συνάρτηση $F'(x)$ δεν είναι φραγμένη στο $[0, 1]$

δεν είναι ούτε R ούτε L ολοκληρώσιμη

αντιθέτως η F' είναι ΚΗ ολοκληρώσιμη

Η συνάρτηση Diriclet δεν είναι R-ολοκληρώσιμη αλλά ΚΗ-ολοκληρώσιμη

- Έστω $S = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, $c_i \neq c_j$, τότε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \notin S \\ u_i \neq 0 & \text{αν} \quad x \in S \end{cases}$, λέγεται συνάρτηση Dirichlet
- Η συνάρτηση ΔΕΝ είναι R-ολοκληρώσιμη
- Μετρητής: $d(x) = \begin{cases} \dfrac{\epsilon}{2^{j+2}\left(\left|f(c_j)\right|\right)} & \text{αν} \quad x \in S \\ 1 & \text{αν} \quad x \notin S \end{cases}$
- Διαμέριση $\left\{\left(y_i, [a_i, a_{i+1}]\right), i = 1(1)n\right\}$ δ-εκλέπτυνση
- Το ίδιο το $y_i = c_i$ μπορεί να είναι ίσο για δύο διαδοχικά i (για παράδειγμα να είναι $[a_{i-1}, y_i]$, $[y_i, a_{i+1}]$). Τότε:

$$\left|\sum_{y_i \in S} f(y_i)(a_{i+1} - a_i)\right| < 2\sum_{j=1}^{\infty} \left|f(c_i)\right| \frac{\epsilon}{2^{j+2}\left(\left|f(c_j)\right|\right)} < \epsilon$$

- Άρα, η συνάρτηση είναι ΚΗ-ολοκληρώσιμη με $\displaystyle\int_a^b f = 0$

Η απόδειξη του Θεμελειώδους Θεωρήματος

Αφού $F' = f, \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta(x) > 0$:

$$y \in [a,b], 0 < |y-x| \leq \delta(x) \Rightarrow \left| \frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x) \right| \leq \epsilon$$

συνεπώς:

$$y \in [a,b], y \in [x-\delta(x), x+\delta(x)] \Rightarrow |F(y)-F(x)-(y-x)f(x)| \leq \epsilon|y-x|$$

Έστω, $\Pi = \{[a_j, a_{j+1}], x_j\}$ μια $\delta-$ εκλέπτυνση του διαστήματος I, η τελευταία σχέση για $x = x_j$ και $y = a_j$ ή $y = a_{j+a}$, γίνεται:

$$\left| F(x_j) - F(a_j) - (x_j - a_j)f(x_j) \right| \leq \epsilon \left| x_j - a_j \right| = \epsilon(x_j - a_j)$$

$$\left| F(a_{j+1} - F(x_j) - (a_{j+1} - x_j)f(x_j) \right| \leq \epsilon \left| a_{j+1} - x_j \right| = \epsilon(a_{j+1} - x_j)$$

ή

$$\left| F(a_{j+1}) - F(a_j) - (a_{j+1} - a_j)f(x_j) \right| \leq \epsilon(a_{j+1} - a_j)$$

Το άθροισμα των τελευταίων για $j = 0, 1, \ldots, n-1$ δίνει:

$$\left| F(b) - F(a) - \sum_{j=1}^{n} f(x_j)h_j \right| \leq \epsilon(b-a) \text{ ή } \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

∎