ΔΙΑΛΕΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σιλουανός Μπραζιτίκος **(Χάλκινο Μετάλλιο 49η Διεθνή Ολυμπιάδα Μαθηματικών Ισπανία - Φοιτητής Μαθηματικού Τμ. Παν. Αθηνών)**

- **Θέμα:** ***Υποδειγματικές λύσεις τεσσάρων μαθηματικών προβλημάτων.***

Ημερομηνία : 15/10/2011

Ώρα : 17:00

Τόπος : Βαρβάκειο Λύκειο - Αίθουσα 07

Υπεύθυνη διάθεσης της λίστας των προβλημάτων: Ραυτοπούλου Κυριακή μαθήτρια του Α4.

Η ΟΜΑΔΑ ΔΙΑΛΕΞΕΩΝ

1) Ραυτοπούλου Κυριακή – Α4
2) Σκουρλέτος Χριστόδουλος– Α4
3) Τασίκας Παναγιώτης – Α4

ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1) (Larson : Problem – Solving, p. 123, prop. 414)

Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν πρώτοι αριθμοί στην απειροσειρά

1001, 100010001, 1000100010001, …..

ΥΠΟΔΕΙΞΗ:

Το πρόβλημα μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε μια τελείως φορμαλιστική και συντακτική ερώτηση παραγοντοποίησης μιας πολυωνυμικής παράστασης. Για να το πετύχετε αρκεί να κάνετε αφαίρεση πάνω στη μορφή των δεδομένων αριθμών. Για παράδειγμα ο 1001 μπορεί να γραφεί $1+10^4$, ,…..
Έτσι:

$1001 = 1+10^4$
$100010001 = 1+10^4+10^8$
$1000100010001 = 1 + 10^4+10^8 + 10^{12}$
…..
$1000100010001…1 = 1 + 10^4+10^8 +…+10^{4v}$
Η δε γενική μορφή είναι λοιπόν : $1+x^4+x^8 +…+x^{4v}$.
Μπορούμε εύκολα τότε να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε ν, περιττό ή άρτιο, η παραπάνω αλγεβρική μορφή παραγωντοποιείται.

□

2) (Larson : Problem – Solving, p. 129, prop. 426)

Έστω f πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Δείξτε ότι όλες οι ρίζες του f είναι πραγματικοί αριθμοί αν και μόνο αν f^2 δεν μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα τετραγώνων

$$f^2 = g^2 + h^2$$

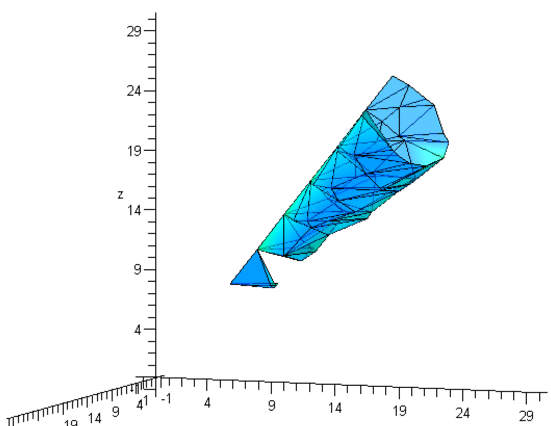
όπου g και h είναι πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές και $deg(g) \neq deg(h)$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ:

Μπορούμε να δούμε το πρόβλημα σαν αντιπαράδειγμα στο 17^o του Hilbert. Το πρόβλημα αυτό λέει το εξής (ασθενής εκδοχή) :

Είναι ένα πολυώνυμο παντού μη-αρνητικό άθροισμα τετραγώνων?

Ο Motzkin το 1967 έδωσε ένα παράδειγμα πολυωνύμου σχεδόν παντού θετικό αλλα όχι άθροισμα τετραγώνων, το πολυώνυμο είναι το $p=z^6+x^4z^2+x^2y^4-3x^2y^2z^2$.



Όπως έδειξε ο Minkowski, μετά το αντιπαράδειγμα του Motzkin, υπάρχει ένας κάποιος περιορισμός στον βαθμό αν θεωρήσουμε αυτή την έκφραση του $17^{ου}$ προβλήματος. Έτσι ξαναδιατύπωσε το πρόβλημα στη σημερινή του μορφή , δείτε επίσης στη Wikipedia.

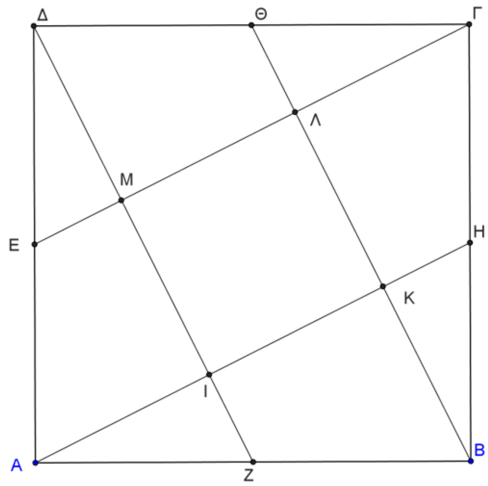
Ερχόμενοι στο πρόβλημα μας, αν δούμε ψύχραιμα το αντιπαράδειγμα που προτείνει ο Larson, το αποφασιστικό αρνητικό σημείο πρέπει να είναι το ότι deg(g) ≠ deg(h). Πράγματι αποδεικνύεται τελικά το ισχυρότερο στοιχείο. □

3) Olympiades academique 2004

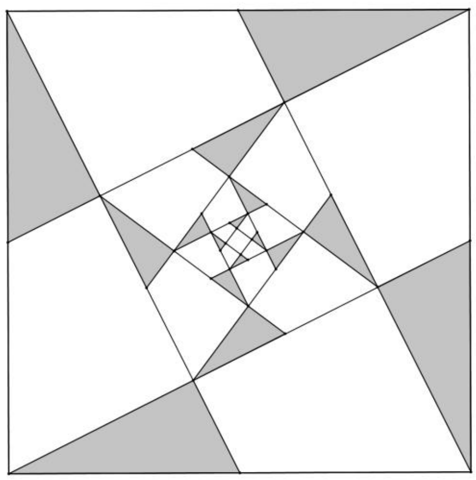
ΑΒΓΔ είναι ένα τετράγωνο πλευράς 1.

Αν Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των πλευρών, δες σχήμα,

i. δείξτε ότι το ΙΚΛΜ είναι τετράγωνο. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς του;



ii. Συνεχίζουμε τη διαδικασία για το νέο τετράγωνο που προκύπτει όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα κοκ. Χρωματίζουμε τα τρίγωνα που σχηματίζοντε στο σχήμα. Δείξτε ότι αν συνεχίσουμε επ' άπειρο τη κατασκευή, το εμβαδόν των χρωματισμένων τριγώνων θα γίνει ίσο με το ¼ του εμβαδού του αρχικού τετραγώνου.



ΥΠΟΔΕΙΞΗ:

Το ότι το ΙΚΛΜ είναι τετράγωνο μπορεί να το δείξετε εύκολα αφού δείτε ότι είναι παραλληλόγραμμο με μια γωνία ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΙΖ σε κάθε βήμα της κατασκευής είναι όρος μιας γεωμετρικής ακολουθίας με λόγο 1/5 και πρώτο όρο 1/5…….

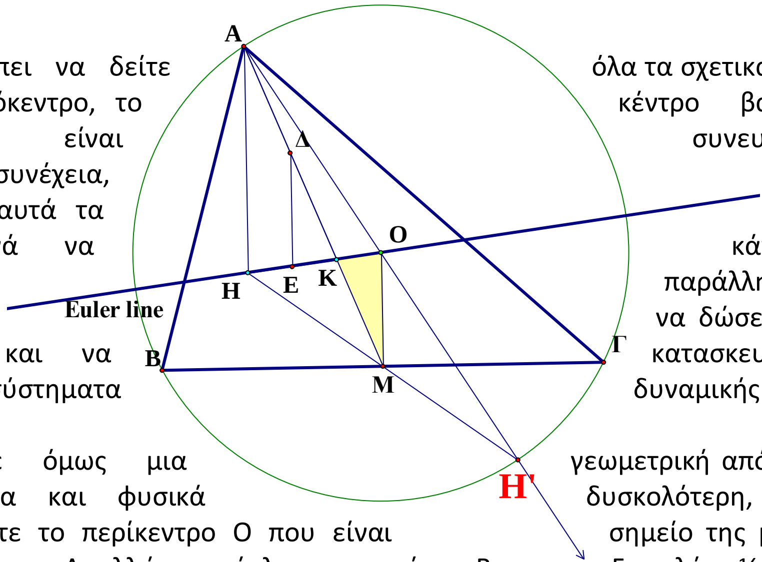
Μπορείτε όμως να δώσετε και άλλες ωραίες λύσεις, για παράδειγμα στη πρώτη ερώτηση μπορείτε να εφαρμόσετε στροφή γύρω από το κέντρο του αρχικού τετραγώνου κατά π/2 και να δείξετε ότι οι διαγώνιοι του ΙΛΜΚ έχουν το ίδιο μήκος, το ίδιο μέσο και είναι και κάθετες μεταξύ τους …… □

4) (Προτεινόμενο Θέμα της ισπανικής αποστολής στην ολυμπιάδα του 1985)

Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ αν γνωρίζετε τη ΒΓ, την απόσταση ΟΗ (Ο περίκεντρο, Η ορθόκεντρο) και ότι η ευθεία του Euler είναι παράλληλη στη ΒΓ.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ:

Πρώτα πρέπει να δείτε όλα τα σχετικά με την απόδειξη ότι το ορθόκεντρο, το κέντρο βάρους και το περίκεντρο είναι συνευθειακά (ευθεία Euler) . Στη συνέχεια, προτείνουμε να δουλέψετε αυτά τα στοιχεία που είναι ικανά να κάνουν την ευθεία Euler παράλληλη στην ΒΓ. Μπορείτε να δώσετε και αλγεβρική απάντηση και να κατασκευάσετε το τρίγωνο σε σύστηματα δυναμικής γεωμετρίας.



Οπωσδήποτε όμως μια γεωμετρική απόδειξη είναι πολύ πιο πλούσια και φυσικά δυσκολότερη, αρκεί να προσδιορίσετε το περίκεντρο Ο που είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΒΓ και σημείο του Απολλώνιου κύκλου με σημεία τα Β και Γ και λόγο ½. □