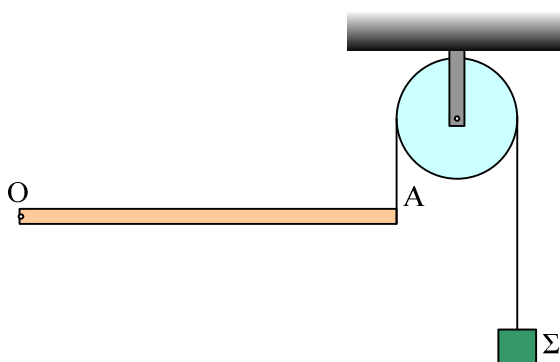


Προς τα πού θα κινηθεί το σώμα Σ;

Με αφορμή ένα ερώτημα σε εξετάσεις των ομογενών το 2002, το οποίο έφερε ο φίλος Στέργιος Ναστόπουλος σε συζήτηση, ας δούμε παρακάτω μια παραλλαγή .

Η ομογενής ράβδος OA μήκους ℓ και μάζας $m_1=3\text{kg}$ μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο του O. Το άλλο άκρο της A, δένεται στο ένα άκρο αβαρούς νήματος. Το νήμα αφού περάσει από το αυλάκι μιας τροχαλίας καταλήγει σε ένα σώμα Σ μάζας $m_3=1\text{kg}$. Το σύστημα συγκρατείται έτσι ώστε η ράβδος να είναι οριζόντια, όπως στο σχήμα.



- Αν αφήσουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί το σώμα Σ θα κινηθεί προς τα πάνω ή προς τα κάτω;
- Να βρείτε την επιτάχυνση του σώματος Σ, αν η τροχαλία έχει μάζα $m_2=6\text{kg}$.

Δίνεται ότι το νήμα δεν γλιστρά στο αυλάκι της τροχαλίας και δεν εμφανίζονται τριβές ούτε στον άξονα της τροχαλίας, ούτε στον άξονα περιστροφής της ράβδου. Δίνονται ακόμη οι ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες περιστροφής, για τη ράβδο $I_1= 1/3 m_1 \cdot \ell^2$ και για την τροχαλία $I_2= 1/2 m_2 R^2$ ενώ $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

Θα μπορούσαμε να μελετήσουμε το σύστημα μετά τη στιγμή που αφέθηκε να κινηθεί, βρίσκοντας την επιτάχυνση απευθείας του σώματος Σ, οπότε ανάλογα με την τιμή που θα υπολογίζαμε, θα βρίσκαμε και προς τα πού θα κινηθεί το σώμα Σ.

Αλλά εδώ θα ακολουθήσουμε μια άλλη αποδεικτική πορεία, βρίσκοντας τη δύναμη που πρέπει να ασκείται στο σώμα Σ για να ισορροπεί. Θα μελετήσουμε δηλαδή την ισορροπία του συστήματος θεωρώντας ότι ασκούμε μια κατακόρυφη δύναμη F, στο σώμα Σ όπως στο σχήμα.

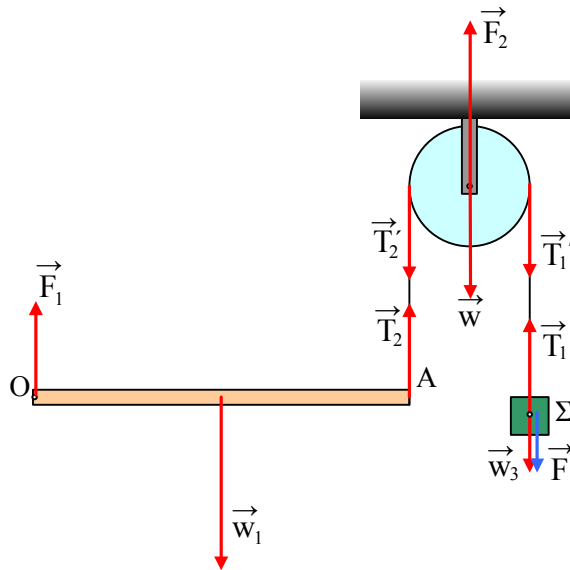
- Αφού το νήμα είναι αβαρές για τα μέτρα των δυνάμεων ισχύει $T_1=T_1'$ και $T_2=T_2'$ και επειδή η τροχαλία ισορροπεί:

$$\Sigma \tau = 0 \text{ ή } T_1 \cdot R' - T_2 \cdot R = 0 \text{ συνεπώς:}$$

$$T_1 = T_1' = T_2 = T_2'$$

Αφού και ράβδος ισορροπεί:

$$\begin{aligned}\Sigma\tau &= 0 \text{ ή} \\ T_2 \cdot \ell - w \cdot \ell/2 &= 0 \text{ ή} \\ T_2 &= m_1 \cdot g/2 = 15\text{N}.\end{aligned}$$



Ερχόμαστε τώρα στο σώμα Σ το οποίο για να ισορροπεί, αφού δέχεται δύναμη (τάση νήματος) με φορά προς τα πάνω και το βάρος από τη Γη, μέτρου $m_3g=10\text{N}$, θα πρέπει να δεχτεί δύναμη F με κατεύθυνση προς τα κάτω και μέτρου $F=T-w=5\text{N}$.

Αν τώρα καταργηθεί η δύναμη F , τότε το σώμα Σ θα κινηθεί προς τα πάνω.

- ii) Όταν αφήσουμε το σύστημα ελεύθερο, απλά καταργείται η δύναμη F , ενώ οι υπόλοιπες δυνάμεις είναι αυτές που εμφανίζονται στο παραπάνω σχήμα. Έτσι:

Για το σώμα Σ :

$$\begin{aligned}\Sigma F &= m_3 \cdot a \rightarrow \\ T_1 - m_3 g &= m_3 \cdot a \quad (1)\end{aligned}$$

Για την τροχαλία η οποία θα στραφεί αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού (θετική φορά):

$$\begin{aligned}T_2' \cdot R - T_1' \cdot R &= I \cdot \alpha_{\gamma\omega v 2} \rightarrow \\ (T_2 - T_1) \cdot R &= \frac{1}{2} m R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega v 2} \rightarrow \\ T_2 - T_1 &= \frac{1}{2} m_2 \cdot R \cdot \alpha_{\gamma\omega v 2} \quad (2)\end{aligned}$$

Για τη ράβδο, η οποία θα κινηθεί με φορά ίδια με τους δείκτες του ρολογιού (την οποία για τη ράβδο θεωρούμε θετική φορά):

$$\begin{aligned}w \cdot \ell/2 - T_2 \cdot \ell &= I \cdot \alpha_{\gamma\omega v 1} \rightarrow \\ m_1 g \cdot \ell/2 - T_2 \cdot \ell &= \frac{1}{3} m_1 \cdot \ell^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega v 1} \rightarrow \\ \frac{1}{2} m_1 g - T_2 &= \frac{1}{3} m_1 \alpha_{\gamma\omega v 1} \quad (3)\end{aligned}$$

Όλα τα σημεία όμως του νήματος έχουν την ίδια επιτάχυνση, οπότε η επιτρόχια επιτάχυνση του σημείου Α, έχει το ίδιο μέτρο με τις επιτρόχιες επίσης, επιταχύνσεις των σημείων Β και Γ της τροχαλίας (βλέπε διπλανό σχήμα), όπως και με την επιτάχυνση του σώματος Σ. Έτσι έχουμε ότι:

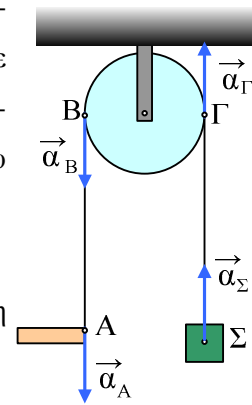
$$a_{\Sigma} = a_{\gamma_{\omega v 2}} \cdot R = a_{\gamma_{\omega v 1}} \cdot \ell = a \quad (4)$$

Οπότε με πρόσθεση των (1), (2) και (3) και λαμβάνοντας υπόψη την (4) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} m_1 g - m_3 g = (m_3 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{3} m_1) \cdot a \rightarrow$$

$$a = \frac{\frac{1}{2} m_1 g - m_3 g}{\frac{1}{3} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + m_3}$$

Και με αντικατάσταση $a=1\text{m/s}^2$.



Ένα σχόλιο:

Απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή όταν έχουμε ένα σύστημα, που περνά από μια κατάσταση ισορροπίας σε μια άλλη, όπου η ισορροπία δεν υπάρχει. Στο παραπάνω παράδειγμα είναι άλλη η κατάσταση, όταν συγκρατούμε το σύστημα, οπότε η τάση του νήματος έχει σταθερό μέτρο $T=15\text{N}$ και διαφορετική κατάσταση μόλις τα μέλη του συστήματος αρχίζουν να επιταχύνονται. Έτσι άλλο είναι τώρα το μέτρο της τάσης T_2 που ασκείται στο άκρο Α της ράβδου και άλλο της τάσης T_1 που ασκείται στο σώμα Σ.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τα μέτρα των παραπάνω τάσεων από τις σχέσεις (1) και (2), βρίσκοντας ότι $T_1=11\text{N}$ και $T_2=14\text{N}$.