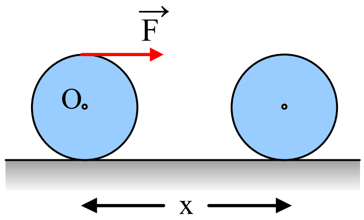
Κίνηση κυλίνδρου σε λείο οριζόντιο επίπεδο

Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο μάζας m και ακτίνας R, τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και τον αφήνουμε να κινηθεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, τραβώντας το νήμα με σταθερή οριζόντια δύναμη F, όπως στο σχήμα. Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του: $I = \frac{1}{2} mR^2$.



i) Να αποδείξτε ότι ο κύλινδρος θα εκτελέσει και μεταφορική και στροφική κίνηση.

ii) Να βρείτε μια σχέση που να συνδέει την γωνιακή επιτάχυνση με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

iii) Για μια οριζόντια μετατόπιση του κυλίνδρου κατά x, να χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες.

α) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου δίνεται από την σχέση:

$$\upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{2Fx}{m}}$$

β) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κυλίνδρου παρέχεται από τη σχέση:

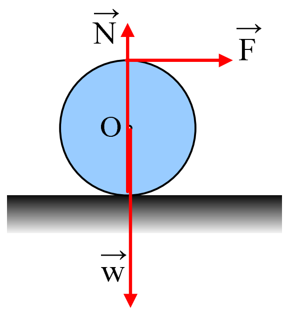
$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{8Fx}{3m}}$$

γ) Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στον κύλινδρο, μέσω της δύναμης F είναι ίση με:

$$W = 2F\cdot x.$$

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο.



Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου:

$$\Sigma F_x = m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow$$

$$F = m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = \frac{F}{m} \quad (1)$$

Συνεπώς ο κύλινδρος θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση.

Εξάλλου για τη περιστροφική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

Και θεωρώντας τις δεξιόστροφες ροπές θετικές:

$$F\cdot R = \tfrac{1}{2}\, mR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2F}{mR} \quad (2)$$

Οπότε ο κύλινδρος θα περιστραφεί δεξιόστροφα εκτελώντας στροφική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

ii) Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\alpha_{cm} = \tfrac{1}{2}\, \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$$

iii) Για τη μεταφορική κίνηση ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}\cdot t \; (3) \;\; \text{και}$$

$$x = \tfrac{1}{2}\, \alpha_{cm}\cdot t^2 \; (4)$$

α)Λύνοντας τη πρώτη ως προς t και αντικαθιστώντας στη δεύτερη παίρνουμε:

$$x = \tfrac{1}{2}\, \upsilon^2_{cm}/\alpha_{cm} \;\; \text{ή}$$

$$\upsilon_{cm} = \sqrt{2a_{cm}x} = \sqrt{\frac{2Fx}{m}}$$

συνεπώς η α) πρόταση είναι σωστή.

β) Ο απαιτούμενος χρόνος για να διανύσει την απόσταση x ο κύλινδρος βρίσκεται από τη σχέση (4):

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a_{cm}}} = \sqrt{\frac{2mx}{F}}$$

Οπότε θα έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega = a_{\gamma\omega\nu} t = \frac{2F}{mR}\cdot\sqrt{\frac{2mx}{F}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{8mxF^2}{Fm^2}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{8Fx}{m}}$$

συνεπώς η β) πρόταση είναι λανθασμένη.

γ) Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στον κύλινδρο μέσω της F είναι:

$$W_{o\lambda} = W_{\mu\varepsilon\tau} + W_{\tau} = F\cdot x + \tau\cdot\theta = F\cdot x + F\cdot R\cdot \tfrac{1}{2}\, \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2 \;\; \text{ή}$$

$$W_{o\lambda} = F\cdot x + F\cdot R\cdot \tfrac{1}{2}\, \frac{2F}{mR} t^2 = F\cdot x + F\cdot \frac{F}{m} t^2$$

$$\text{Αλλά } x = \tfrac{1}{2}\, (F/m)\, t^2, \text{ οπότε: } \frac{F}{m} t^2 = 2x$$

$$W_{o\lambda} = 3F\cdot x$$

Άρα και η γ) πρόταση είναι λανθασμένη.

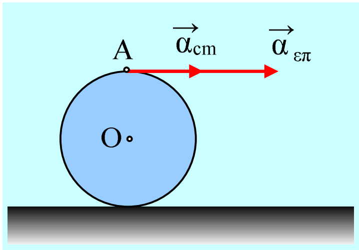
Σχόλια:

1) Στο ii) ερώτημα αποδείξαμε ότι $\alpha_{cm} = \frac{1}{2}\, \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$, συνεπώς ο κύλινδρος δεν κυλίεται χωρίς

ολίσθηση. Εδώ ο κύλινδρος «σπινάρει» έχοντας διπλάσια γωνιακή ταχύτητα, κάθε στιγμή, από αυτή που αντιστοιχεί σε κύλιση.

2) Υπολογίσαμε το έργο της F, υπολογίζοντας χωριστά το έργο που αντιστοιχεί στη μεταφορική κίνηση και χωριστά το έργο που παράγει λειτουργώντας σαν ροπή, για τη στροφική κίνηση. Αυτό το κάναμε απλά γιατί μας είναι εύκολο να το κάνουμε.

Στην πραγματικότητα η δύναμη F παράγει έργο, αφού μετακινεί το σημείο εφαρμογής της Α. Πόσο είναι αυτή η μετατόπιση του σημείου Α, που αντιστοιχεί σε μετατόπιση κατά x του κέντρου Ο του κυλίνδρου;



Το σημείο εφαρμογής της δύναμης Α, έχει μια επιτάχυνση λόγω της μεταφορικής κίνησης του κυλίνδρου α_{cm} και μια επιτρόχια επιτάχυνση $\alpha_{\varepsilon\pi}$ εξαιτίας της στροφικής κίνησης.

Συνεπώς η επιτάχυνση του σημείου Α είναι:

$$\alpha_A=\alpha_{cm}+\alpha_{\varepsilon\pi}= \alpha_{cm}+\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R \text{ ή}$$

$$a_A=\frac{F}{m}+\frac{2F}{mR}R=\frac{3F}{m}=3a_{cm}$$

Συνεπώς σε χρόνο t το σημείο εφαρμογής της δύναμης έχει μετατοπισθεί κατά:

$$x_A= ½\, \alpha_A\cdot t^2 = ½\, 3\alpha_{cm}\cdot t^2 = 3x$$

Άρα το παραγόμενο από τη δύναμη έργο είναι:

$$W=F\cdot x_A= 3F\cdot x$$

dmargaris@sch.gr