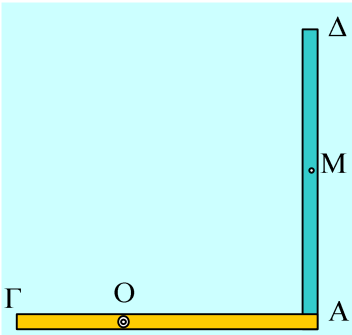
Γωνιακή επιτάχυνση και επιταχύνσεις σημείων.

Κατασκευάζουμε ένα στερεό συνδέοντας δύο όμοιες ομογενείς ράβδους ΓΑ και ΑΔ με ενωμένα τα δύο άκρα τους στο σημείο Α, σχηματίζοντας γωνία 90°. Οι δύο ράβδοι έχουν μάζες $m_1=m_2=m=10kg$ και μήκος ;=6m. Το στερεό μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από ένα σημείο Ο της ράβδου ΓΑ, όπου (ΟΑ)=4m. Φέρνουμε το στερεό σε τέτοια θέση ώστε η ράβδος ΓΑ να είναι οριζόντια και το αφήνουμε να κινηθεί.

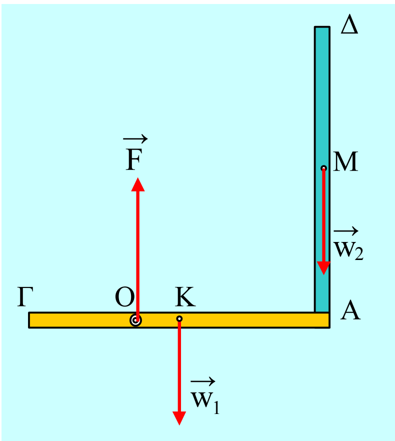


i) Ποια η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του στερεού;
ii) Βρείτε τις αντίστοιχες επιταχύνσεις του άκρου Α καθώς και του μέσου Μ της ράβδου ΑΔ.
iii) Να υπολογίστε την ταχύτητα του άκρου Α, στη θέση που η ράβδος ΓΑ γίνεται κατακόρυφη.
iv) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ΑΔ, ως προς τον άξονα περιστροφής που περνά από το Ο, στην παραπάνω θέση;

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της $I=ml^2/12$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό, όπου F η δύναμη από τον άξονα.



i) Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

Θεωρώντας τις δεξιόστροφες ροπές ως θετικές έχουμε:

$$w_1\cdot(OK) + w_2\cdot(OA) = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (1)$$

Αλλά η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα που περνά από το Ο είναι:

$$I = I_1 + I_2 = [1/12\ m\ell^2 + m(OK)^2] + [1/12\ m\ell^2 + m(OM)^2] \quad (2)$$

Αλλά $(OK) = 1m$ και $(OM)^2 = (OA)^2 + (AM)^2 = 16m^2 + 9m^2 = 25m^2$

Και με αντικατάσταση στην (2) βρίσκουμε:

$$I = 1/6\cdot 10\cdot 36\ kg\cdot m^2 + 10\cdot 1 kg\cdot m^2 + 10\cdot 25\ kg\cdot m^2 = 320 kg\cdot m^2$$

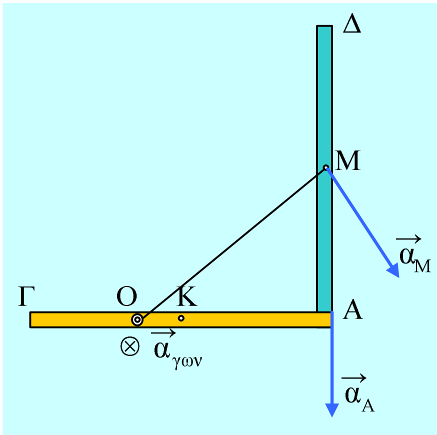
Έτσι από την (1) παίρνουμε:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = (100\cdot 1 + 100\cdot 4)/320\ rad/s^2 = 25/16\ rad/s^2.$$

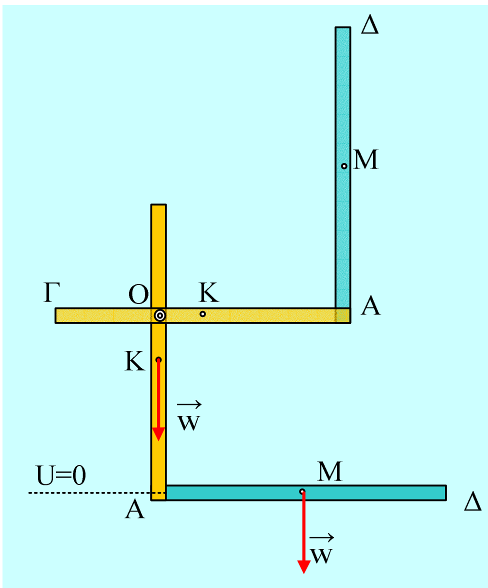
ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι επιταχύνσεις των σημείων Α και Μ, οι οποίες είναι κάθετες στις ακτίνες της κυκλικής τροχιάς, κάθε σημείου. Για τα μέτρα τους έχουμε:

$\alpha_A = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot(OA) = 25/4\ m/s^2$ και

$\alpha_M = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot(OM) = 125/16\ m/s^2$.



iii) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για το σύστημα στερεό σώμα-Γη, αφού πάνω του οι μόνες δυνάμεις που παράγουν έργο είναι τα βάρη των δύο ράβδων και το βάρος είναι συντηρητική δύναμη. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που ταυτίζεται με τον άξονα της ράβδου ΑΔ.



$$K_{αρχ}+ U_{αρχ}= K_{τελ}+U_{τελ} \rightarrow$$

$$mg\cdot(OA) + mg(OA+\ell/2) = ½\, I\omega^2 +mg\cdot(AK)$$

και με αντικατάσταση:

$$\omega=\sqrt{\frac{2mg[2(OA)-(AK)+l/2]}{I}}=\sqrt{\frac{2\cdot 100(8-3+3)}{320}}rad/s=\sqrt{5}\ rad/s$$

Άρα το σημείο Α έχει ταχύτητα $υ=ω\cdot R=4\sqrt{5}$ m/s

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ΑΔ είναι:

$$\frac{dL}{dt}=I_{ΑΔ}\cdot a_{γων}\ (3)$$

όπου $α_{γων}$ η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού στη θέση αυτή.

Αλλά από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τη θέση αυτή έχουμε(θεωρούμε επίσης θετικές τις δεξιόστροφες ροπές):

$$Στ=I\cdot α_{γων} \text{ ή}$$

$$w\cdot(AM) = I\cdot α_{γων} \rightarrow$$

$$α_{γων}=100\cdot 3/320\ rad/s^2 =15/16\ rad/s^2$$

οπότε:

$$\frac{dL}{dt}=I_{ΑΔ}\cdot a_{γων}=[\frac{1}{12}ml^2+m(OM)^2]\cdot a_{γων}$$

και με αντικατάσταση:

$$\frac{dL}{dt}=262{,}5\ kgm^2/s^2$$

Ο παραπάνω ρυθμός είναι διάνυσμα πάνω στον άξονα στο Ο, κάθετος στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τα μέσα.

Σχόλια:

1) Ας προσέξουμε πώς υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας που οφείλεται στη ράβδο ΑΔ εφαρμόζοντας το νόμο του Steiner. Η απόσταση είναι η (ΟΜ). Δεν πρέπει αυτό να συγχέεται με τη ροπή του βάρους της ΑΔ που είναι w·(ΟΑ).

2) Όταν ένα στερεό στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, κάθε σημείο κάνει κυκλική κίνηση με κέντρο ένα σημείο (εδώ το Ο) του άξονα. Έτσι το σημείο Μ π.χ. έχει ακτίνα την ΟΜ και κατά συνέπεια έχει επιτρόχια επιτάχυνση κάθετη στην ΟΜ με μέτρο $α_Μ=α_{γων}\cdot(ΟΜ)$.

3) Προφανώς στη θέση που η ράβδος ΑΔ γίνεται οριζόντια, το στερεό δεν έχει αποκτήσει ακόμη τη μέγιστη γωνιακή του ταχύτητα, αφού συνεχίζει να επιταχύνεται, εξαιτίας της ροπής του βάρους της ράβδου. Άλλωστε υπολογίσαμε θετικό ρυθμό μεταβολής της στροφορ-

μής του, πράγμα που σημαίνει ότι η στροφορμή του αυξάνει κατά μέτρο. Η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα θα είναι στη θέση όπου η συνολική ροπή που ασκείται στο στερεό θα είναι μηδέν. Αυτό θα συμβεί αφού στραφεί λίγο ακόμη, ώστε οι δύο ροπές των βαρών να είναι αντίθετες.

4) Προσοχή επίσης απαιτείται στο ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ΑΔ. Να μην πάρουμε dL/dt=Στ=w·(ΑΜ), αφού στη ράβδο ασκείται και μια άγνωστη δύναμη από τη ράβδο ΑΓ, η οποία έχει ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής. Το πρόβλημα παρακάμπτεται αν μείνουμε στην εξίσωση:

$$\frac{dL}{dt} = I_{A\Delta} \cdot a_{\gamma\omega\nu}$$

dmargaris@sch.gr