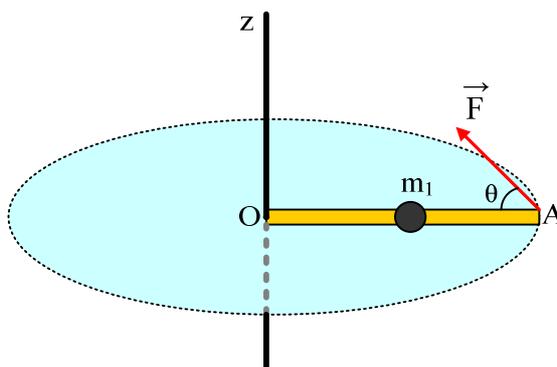


Στροφορμή και μεταβολή στροφορμής.

Η ομογενής ράβδος ΟΑ του σχήματος, έχει μήκος $\ell=2\text{m}$ και μάζα $M=3\text{kg}$ και μπορεί να στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα z ο οποίος περνά από το άκρο της Ο. Στο μέσον της ράβδου έχει προσδεθεί ένα σώμα Σ που θεωρείται υλικό σημείο μάζας $m_1=4\text{kg}$. Το στερεό Π , που δημιουργήσαμε με τον τρόπο αυτό ηρεμεί.



Για $t=0$ ασκείται στο άκρο Α της ράβδου μια οριζόντια σταθερού μέτρου δύναμη $F=5\text{N}$, που η διεύθυνσή της σχηματίζει γωνία $\theta=30^\circ$ με τη ράβδο, όπως στο σχήμα, μέχρι τη χρονική στιγμή $t=2\text{s}$, όπου η δύναμη καταργείται.

- Η στροφορμή που αποκτά το στερεό Π ως προς (κατά τον) άξονα περιστροφής z .
- Σε μια στιγμή $t>2\text{s}$, το σώμα Σ ξεκολλά από τη θέση του και γλιστρώντας κατά μήκος της ράβδου, καρφώνεται σε ένα μικρό καρφί που υπάρχει στο άκρο Α της ράβδου.

Να βρεθούν για την παραπάνω μετακίνηση:

- Η μεταβολή της στροφορμής του σώματος Σ ως προς το άκρο Ο.
- Η αντίστοιχη μεταβολή της στροφορμής της ράβδου.
- Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα z $I=1/3 M\ell^2$.

Απάντηση:

- Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του στερεού ως προς (κατά τον) άξονα z δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau \quad (1)$$

όπου $\Sigma \tau$ το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς τον άξονα. Αλλά τα βάρη των σωμάτων είναι παράλληλα προς τον άξονα και δεν έχουν ροπή, συνεπώς η μόνη ροπή είναι αυτή που δημιουργεί η δύναμη F .

Αλλά με βάση το διπλανό σχήμα (κάτοψη) βρίσκουμε:

$$\tau_F = \tau_{F_y} = F_y \cdot \ell = F \cdot \ell \cdot \eta \mu \theta$$

και με αντικατάσταση $\tau = 5 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Βλέπουμε ότι στο στερεό ασκείται σταθερή ροπή, συνεπώς θα έχουμε και σταθερό ρυθμό μεταβολής της στροφορμής

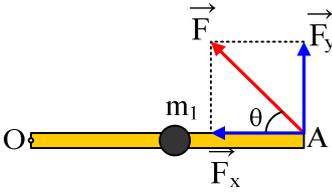
του, οπότε η (1) γίνεται:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau \rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = \tau \rightarrow \frac{L - 0}{t} = \tau \rightarrow$$

$$L = \tau \cdot t$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε $L = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

Όπου το διάνυσμα είναι πάνω στον άξονα με κατεύθυνση προς τα πάνω.



- ii) Κατά την αλλαγή θέσης του σώματος Σ, δεν ασκήθηκε στο σύστημα καμιά εξωτερική ροπή, συνεπώς η στροφορμή του συστήματος παρέμεινε σταθερή.

$$\vec{L}_{\text{πριν}} = \vec{L}_{\text{μετ}}$$

$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2 \quad (2)$$

Όπου I_1 και I_2 η αρχική και τελική ροπή αδράνειας του στερεού και ω_1 και ω_2 οι αντίστοιχες γωνιακές ταχύτητες, οι οποίες έχουν την διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα πάνω.

$$\text{Αλλά } I_1 = 1/3 M \ell^2 + m_1 \ell^2/4 = 8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

$$I_2 = 1/3 M \ell^2 + m_1 \cdot \ell^2 = 20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Ενώ $\omega_1 = L/I_1 = 10/8 \text{ rad/s} = 1,25 \text{ rad/s}$, οπότε από την (2) παίρνουμε:

$$\omega_2 = \frac{I_1 \omega_1}{I_2} = \frac{10}{20} \text{ rad/s} = 0,5 \text{ rad/s}$$

- α) Για το σώμα Σ έχουμε:

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_{\text{τελ}} - \vec{L}_{\text{αρχ}}$$

οπότε δουλεύοντας με τα μέτρα τους (μιας και οι δυο στροφορμές έχουν την ίδια κατεύθυνση) έχουμε:

$$\Delta L = m_1 \cdot v_2 \cdot \ell - m_1 \cdot v_1 \cdot \ell/2 = m_1 \ell^2 \cdot \omega_2 - 1/4 m_1 \ell^2 \cdot \omega_1 = m_1 \ell^2 (\omega_2 - 1/4 \omega_1)$$

Με αντικατάσταση $\Delta L_\Sigma = 4 \cdot 4 (0,5 - 1/4 \cdot 1,25) \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} = +3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

- β) Για τη ράβδο εξάλλου:

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_{\text{τελ}} - \vec{L}_{\text{αρχ}}$$

$$\Delta L = I_r \cdot \omega_2 - I \cdot \omega_1$$

Όπου I η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής.

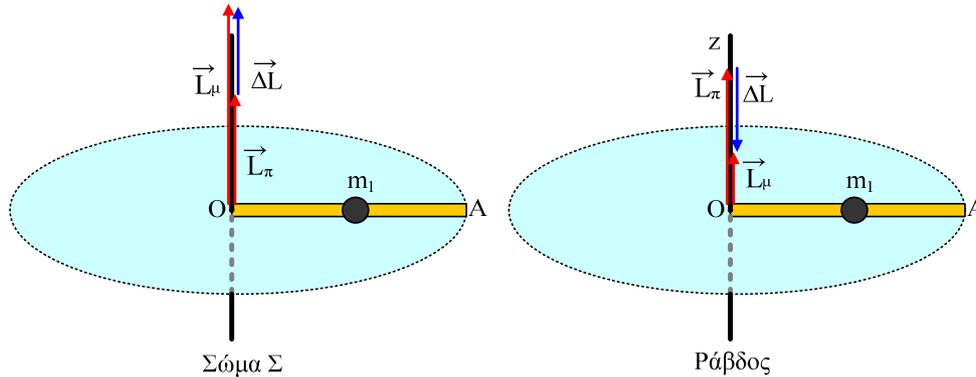
Συνεπώς:

$$\Delta L_p = I(\omega_2 - \omega_1) = \frac{1}{3} M l^2 (\omega_2 - \omega_1)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\Delta L_p = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4(0,5 - 1,25) = -3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα αντίστοιχα διανύσματα για τις στροφορές των δύο σωμάτων.



γ) $\Delta E_{\text{μηχ}} = K_{\text{αρχ}} - K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2 - \frac{1}{2} I_2 \cdot \omega_2^2$
και με αντικατάσταση $\Delta E = 3,75 \text{ J}$.

Παρατηρήσεις:

- 1) Αν σε ένα στερεό ασκείται σταθερή ροπή, μπορούμε εύκολα να βρούμε τη μεταβολή της στροφομής, συνεπώς και στροφομή από τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, μετατρέποντας την παράγωγο dL/dt σε πηλίκο μεταβολών $\Delta L/\Delta t$.
- 2) Όταν έχουμε ένα σύστημα σωμάτων και διατηρείται η στροφομή, αυτό δεν σημαίνει ότι διατηρείται και η στροφομή κάθε επιμέρους σώματος. Στο παράδειγμά μας μεταβάλλεται και η στροφομή του σώματος Σ και η στροφομή της ράβδου. Απλά αυτές οι μεταβολές είναι αντίθετες. Θα μπορούσαμε με άλλα λόγια να αποδώσουμε την αρχή διατήρησης της στροφομής για το παραπάνω σύστημα, γράφοντας την εξίσωση:

$$\Delta \vec{L}_1 + \Delta \vec{L}_2 = 0$$