Στάσιμο κύμα από ανάκλαση

Να ξεκινήσουμε με ένα ερώτημα:

Πότε ισχύει η γνωστή εξίσωση του βιβλίου

$$y = 2A \cdot συν(2πx/λ) \cdot ημ(2πt/T)$$

η οποία περιγράφει ένα στάσιμο κύμα;

Η εξίσωση αυτή προκύπτει με βάση την αρχή της επαλληλίας για δύο κύματα με εξισώσεις:

$$y_1 = A\ ημ2π(t/T – x/λ) \quad (1)$$

$$y_2 = A\ ημ2π(t/T + x/λ) \quad (2)$$

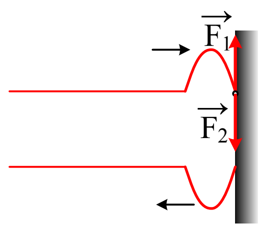
Η εξίσωση (1) ισχύει με την προϋπόθεση ότι το σημείο στη θέση x=0, για t=0, y=0 και υ>0 ή με λόγια με την προϋπόθεση ότι το σημείο στη θέση x=0 για t=0 περνά από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση.

Με τις ίδιες προϋποθέσεις ισχύει και η εξίσωση (2) για το κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά.

Ας προσέξουμε ότι δεν αναφερόμαστε για τη θέση που βρίσκεται η πηγή, αλλά μόνο για το τι συμβαίνει σε ένα σημείο για το οποίο παίρνουμε αυθαίρετα x=0 και στο οποίο σημείο εξ ορισμού θα δημιουργείται ΚΟΙΛΙΑ.

Το σχήμα του βιβλίου (σχ.2.16) που δείχνει ανάκλαση κύματος σε σταθερό σημείο, προφανώς δεν σχετίζεται με την απόδειξη του βιβλίου.

Τι συμβαίνει στην περίπτωση που ένα κύμα διαδίδεται κατά μήκος μιας χορδής, ξεκινώντας από το ένα της άκρο Ο, στο οποίο βρίσκεται η πηγή του κύματος και που το άλλο της άκρο Γ είναι σταθερό;



Έστω ότι κατά μήκος ενός τεντωμένου νήματος, το ένα άκρο του οποίου είναι δεμένο σε κατακόρυφο τοίχο, διαδίδεται ένας κυματοσυρμός. Φτάνοντας στο σταθερό άκρο του νήματος, ασκεί στον τοίχο μια δύναμη F_1 με φορά προς τα πάνω. άρα με βάση την αρχή δράσης - αντίδρασης, δέχεται μια ίσου μέτρου δύναμη F_2 με φορά προς τα κάτω. Το αποτέλεσμα είναι στην επιστροφή αντί για «όρος» να δημιουργείται «κοιλάδα», όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Από Μαθηματική άποψη, το παραπάνω συμπέρασμα σημαίνει ότι μεταξύ προσπίπτοντος και ανακλώμενου κύματος παρουσιάζεται διαφορά φάσεως ίση με π.

Συνήθως αναφέρεται ότι η εξίσωση για το κύμα προς τα αριστερά γράφεται:

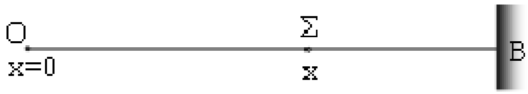
$$y = Aημ(t/T + x/λ + ½)$$

Είναι έτσι τα πράγματα;

Ας το μελετήσουμε το θέμα, με λίγη περισσότερη προσοχή.

Άσκηση:

Δίνεται χορδή ΟΒ μήκους L=4m που το άκρο Β είναι σταθερό ενώ το άκρο Ο (για το οποίο θεωρούμε x=0) τίθεται σε ταλάντωση, οπότε κατά μήκος της χορδής διαδίδεται κύμα με εξίσωση: $y= 0,1$ ημ $2\pi(t-x/2)$ (μονάδες στο S.I.)



1. Ποια η εξίσωση της ταλάντωσης (που θα εκτελούσε το Β, αν ήταν ελεύθερο) εξαιτίας του κύματος αυτού.
2. Ποια η εξίσωση ταλάντωσης ενός σημείου Σ, που βρίσκεται στη θέση x, εξαιτίας του κύματος που ανακλάται.
3. Ποια η εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται από τη συμβολή των δύο κυμάτων;
4. Στη θέση x=0 τι δημιουργείται δεσμός ή κοιλία;
5. Να σχεδιάστε στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή που το ανακλώμενο κύμα φτάνει στο Ο.
6. Τι θα άλλαζε αν το μήκος της χορδής ήταν 4,5m;

Απάντηση:

1) Αν στην εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά, αντικαταστήσουμε όπου x=4m, θα πάρουμε:

$$y_B= 0,1 \text{ ημ}2\pi(t-2) = 0,1 \text{ ημ}(2\pi t-4\pi) \quad (1)$$

2) Η εξίσωση (1) περιγράφει την εξίσωση ταλάντωσης του Β εξαιτίας του κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά. Το σημείο αυτό λειτουργεί σαν πηγή του κύματος που θα διαδοθεί προς τα αριστερά. Έτσι για ένα σημείο Σ, στη θέση x, η εξίσωση ταλάντωσής του θα είναι:

$$y= 0,1 \text{ ημ}[2\pi(t-t_1)-4\pi+\pi] \quad (2)$$

όπου t_1 το χρονικό διάστημα που θα χρειαστεί το κύμα να φτάσει από το Β στο Σ, δηλαδή $t_1=(4-x)/2$ αφού η ταχύτητα του κύματος είναι $\upsilon=\lambda/T=2m/s$, ενώ εμφανίζεται και μια διαφορά φάσεως ίση με π, λόγω ανάκλασης σε σταθερό άκρο.

Έτσι από την (2) παίρνουμε:

$$y= 0,1 \text{ ημ}[2\pi(t-(4-x)/2-3\pi] \text{ ή}$$

$$y = 0,1\ ημ(2πt-4π+2πx/2-3π)\ ή$$

$$y = 0,1\ ημ2π(t+x/2-7/2)\ (3)$$

Η εξίσωση (3) είναι η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά.

3) Από την αρχή της επαλληλίας για την συμβολή των δύο κυμάτων παίρνουμε:

$$y = 0,1\ ημ\ 2π(t-x/2) + 0,1\ ημ2π\ ημ2π(t+x/2-7/2) =$$

$$2 \cdot 0,1\ συν2π(t+x/2-7/2-t+x/2)/2 \cdot ημ2π(t+x/2-7/2+t-x/2)/2\ ή$$

$$y = 0,2\ συν2π(x/2-7/4) \cdot ημ2π(t-7/4)\ (S.I)\ (4)$$

Η εξίσωση (4) είναι η εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται πάνω στη χορδή.

4) Το πλάτος ταλάντωσης των διαφόρων σημείων του μέσου είναι:

$$A' = 0,2\ συν2π(x/2-7/4)$$

Θέτοντας στην εξίσωση αυτή x=0 παίρνουμε το πλάτος ταλάντωσης του άκρου Ο:

$$A' = 0,2\ συν(-7π/2) = 0$$

Άρα στο άκρο Ο δημιουργείται δεσμός.

5) Ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει το κύμα στο άκρο Β είναι $t_1 = L/υ = 2s$ και άλλα 2s να επιστρέψει, άρα το ανακλώμενο κύμα φτάνει στο άκρο Ο την χρονική στιγμή $t_2 = 4s$. Αντικαθιστώντας το t στην εξίσωση (4) θα έχουμε:

$$y = 0,2\ συν2π(x/2-7/4) \cdot ημ2π(4-7/4)\ ή$$

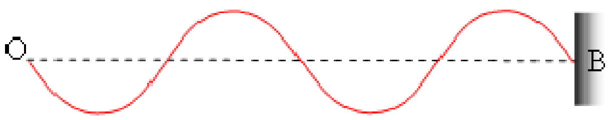
$$y = 0,2\ συν2π(x/2-7/4) \cdot ημ2π(9/4)\ ή$$

$$y = 0,2\ συν2π(x/2-7/4) \cdot ημ9π/2\ ή$$

$$y = 0,2\ συν2π(x/2-7/4) = 0,2συν(πx-7π/2)\ ή$$

$$y = 0,2συν(πx-2π-3π/2) = -\ 0,2\ ημπx$$

Συνεπώς το στιγμιότυπο του κύματος είναι αυτό του παρακάτω σχήματος.



6) Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να βρούμε ότι τότε στο άκρο Ο θα είχαμε δημιουργία κοιλίας.

dmargaris@sch.gr