Κεντρική ανελαστική κρούση

Κύβος μάζας M και ακμής d ηρεμεί σε **λείο** οριζόντιο δάπεδο. Ένα βλήμα μάζας m το οποίο κινείται **οριζόντια** συναντά τον κύβο με ταχύτητα υ_1. Το βλήμα **διαπερνά** τον κύβο κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τα κέντρα των δύο απέναντι εδρών του, χωρίς να προκληθεί μετρήσιμη μεταβολή μάζας του κύβου. Το βλήμα τη στιγμή που βγαίνει από τον κύβο έχει ταχύτητα $\frac{\upsilon_1}{3}$. Η δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ κύβου-βλήματος θεωρείται **σταθερή** σε **όλη τη διάρκεια** της κίνησης του βλήματος μέσα στον κύβο, η οποία **δεν** είναι αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

i) Την απώλεια μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση.

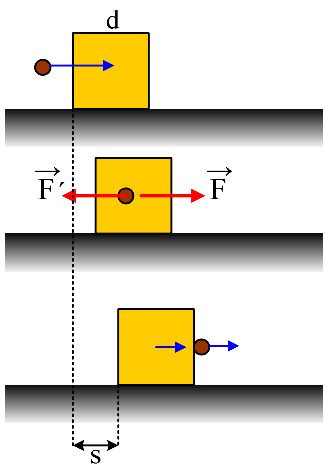
ii) Το διάστημα που διανύει ο κύβος στο οριζόντιο δάπεδο μέχρι να βγει το βλήμα από αυτόν.

iii) Το χρονικό διάστημα κίνησης του βλήματος μέσα στον κύβο.

iv) Το μέτρο της δύναμης αλληλεπίδρασης μεταξύ κύβου-βλήματος.

Απάντηση:

Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης **F**, **F΄** μεταξύ κύβου- βλήματος είναι **εσωτερικές** δυνάμεις του συστήματος κύβος-βλήμα. Επειδή το δάπεδο είναι λείο δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ κύβου-δαπέδου και το σύστημα είναι **μονωμένο**. Οπότε διατηρείται η ορμή του σε όλη τη διάρκεια της κρούσης. Υπολογίζουμε την ταχύτητα του κύβου **μόλις** το βλήμα **βγει** από αυτόν:



$$\vec{p}_{ολ(αρχ)} = \vec{p}_{ολ(τελ)} \Rightarrow m\upsilon_1 = m\frac{\upsilon_1}{3} + M\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{2m\upsilon_1}{3M} \quad (1)$$

i) Η απώλεια μηχανικής ενέργειας είναι ίση με:

$$|\Delta E| = K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετα)} = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - (\frac{1}{2}m\frac{\upsilon_1^2}{9} + \frac{1}{2}M\upsilon_2^2) \Rightarrow$$

$$|\Delta E| = \frac{4}{9}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}M\frac{4m^2\upsilon_1^2}{9M^2} \Rightarrow$$

$$|\Delta E| = \frac{4}{9}m\upsilon_1^2(1 - \frac{m}{2M}) \Rightarrow |\Delta E| = \frac{2(2M-m)}{9M}m\upsilon_1^2 \quad (2)$$

ii) Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ στο σύστημα αναφοράς ακίνητου παρατηρητή στην επιφάνεια του δαπέδου, για τον κύβο και το βλήμα χωριστά:

$$\Delta K = W_F \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 = Fs \Rightarrow \frac{1}{2}M\frac{4m^2\upsilon_1^2}{9M^2} = Fs \Rightarrow \frac{2m^2\upsilon_1^2}{9M} = Fs \quad (3)$$

$$\Delta K = W_{F'} \Rightarrow \frac{1}{2}m\frac{\upsilon_1^2}{9} - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = -F'(s+d) \Rightarrow \frac{4}{9}m\upsilon_1^2 = F(s+d) \quad (4)$$

αφού F=F΄ ως δράση-αντίδραση.

Στις παραπάνω σχέσεις **s** είναι το **διάστημα που διανύει ο κύβος** στο οριζόντιο δάπεδο μέχρι να βγει το βλήμα από αυτόν. Προφανώς το **βλήμα διανύει διάστημα s+d** στο σύστημα αναφοράς του ακίνητου παρατηρητή.

Διαιρώντας τις (3) , (4) κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{m}{2M}=\frac{s}{s+d}\Rightarrow s(2M-m)=md\Rightarrow s=\frac{md}{(2M-m)} \quad (5)$$

iii) Από τη γενικευμένη μορφή του 2ου Νόμου Newton για τον κύβο έχουμε:

$$F=\frac{\Delta p}{\Delta t}\Rightarrow F=\frac{M\upsilon_2}{\Delta t}\Rightarrow F\Delta t=M\frac{2m\upsilon_1}{3M}\Rightarrow F\Delta t=\frac{2m\upsilon_1}{3} \quad (6)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (3), (6) έχουμε:

$$\frac{s}{\Delta t}=\frac{m\upsilon_1}{3M}\Rightarrow \Delta t=\frac{3Ms}{m\upsilon_1}\Rightarrow \Delta t=\frac{3Mmd}{m\upsilon_1(2M-m)}\Rightarrow \Delta t=\frac{3Md}{(2M-m)\upsilon_1} \quad (7)$$

iv) Από τη γενικευμένη μορφή του 2ου Νόμου Newton για τον κύβο και τις σχέσεις (1) και (7) έχουμε:

$$F=\frac{M\upsilon_2}{\Delta t}\Rightarrow F=\frac{M\frac{2m\upsilon_1}{3M}}{\frac{3Md}{(2M-m)\upsilon_1}}\Rightarrow F=\frac{2m(2M-m)\upsilon_1^2}{9Md} \quad (8)$$

Ισοδύναμα η απώλεια μηχανικής ενέργειας μπορεί να εκφρασθεί:

$$|\Delta E|=Fd\Rightarrow \frac{2(2M-m)}{9M}m\upsilon_1^2=Fd\Rightarrow F=\frac{2m(2M-m)}{9Md}\upsilon_1^2$$

Κατά τη διάρκεια της κίνησης του βλήματος μέσα στον κύβο, το **έργο** της δύναμης F΄ που δέχεται το βλήμα (-F΄·(s+d)), εκφράζει **απώλεια ενέργειας για το βλήμα**, η οποία κατά **ένα μέρος** μεταφέρεται **στον κύβο** μέσω του έργου της δύναμης F (Fs) που δέχεται ο κύβος και το υπόλοιπο (Fd) εκφράζει την απώλεια μηχανικής ενέργειας και μετατροπή αυτής σε θερμική.

Επιμέλεια

Θοδωρής Παπασγουρίδης