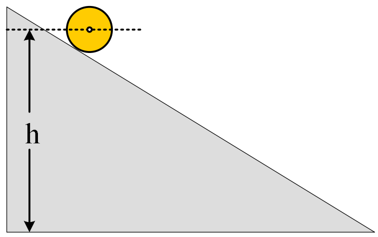
Η σφαίρα κυλίεται σε κεκλιμένο επίπεδο.

Από το ίδιο ύψος h σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, αφήνουμε ταυτόχρονα δύο σφαίρες Α και Β, οι οποίες κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν. Η σφαίρα Α έχει μάζα m και ακτίνα R, ενώ η Β έχει μάζα 3m και ακτίνα R/2.



i) Για τα χρονικά διαστήματα t_A και t_B που απαιτούνται για να φτάσουν στη βάση του επιπέδου ισχύει:

α) $t_A < t_B$ β) $t_A = t_B$ γ) $t_A > t_B$.

ii) Για τις τελικές ταχύτητες $υ_A$ και $υ_B$ ισχύει:

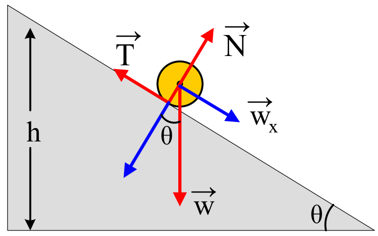
α) $υ_A < υ_B$ β) $υ_A = υ_B$ γ) $υ_A > υ_B$.

iii) Ο λόγος K_A/K_B, όπου K_A και K_B οι τελικές κινητικές ενέργειες των δύο σφαιρών λόγω περιστροφής, είναι ίσος με:

α) 1 β) 3 γ) 1/3

Για τη σφαίρα $I_{cm} = 2/5\, mR^2$.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε μια σφαίρα που κυλίεται κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου.

Για την μεταφορική κίνηση της σφαίρας ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\Sigma F_x = m \cdot α_{cm} \rightarrow$$

$$mgημθ - T = mα_{cm} \quad (1)$$

Αντίστοιχα για την στροφική κίνηση και θεωρώντας τις δεξιόστροφες ροπές θετικές έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$T\cdot R = 2/5\ mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$T = 2/5\ m\cdot R\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Αλλά αφού η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ και η (2) γίνεται:

$$T = 2/5\ m\cdot\alpha_{cm} \quad (3)$$

Με πρόσθεση των (1) και (3) κατά μέλη παίρνουμε:

$$mg\eta\mu\theta = \frac{7}{5}ma_{cm} \rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{5}{7}g\eta\mu\theta \quad (4)$$

Η σχέση (4) μας λέει ότι η μεταφορική κίνηση της σφαίρας είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, όπου η επιτάχυνση δεν εξαρτάται ούτε από την μάζα της, ούτε από την ακτίνα της.

Έτσι για τη σφαίρα ισχύουν:

$$x = ½\ \alpha_{cm}\cdot t^2 \quad \text{και} \quad \upsilon_{cm}=\alpha_{cm}\cdot t$$

Αφού οι δύο σφαίρες διανύουν ίσες αποστάσεις θα φτάσουν στον ίδιο χρόνο στη βάση του επιπέδου με ίσες ταχύτητες κέντρου μάζας. Έτσι οι σωστές απαντήσεις είναι:

i) β) και ii) β).

iii) Για το λόγο των κινητικών ενεργειών λόγω περιστροφής έχουμε:

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{\frac{1}{2}I_A\omega_A^2}{\frac{1}{2}I_B\omega_B^2} = \frac{\frac{2}{5}mR^2\omega_A^2}{\frac{2}{5}3m\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_B^2} = \frac{\upsilon_A^2}{3\upsilon_B^2} = \frac{1}{3}$$

Σωστή πρόταση η γ).

dmargaris@sch.gr