Διάθλαση-Ολική ανάκλαση

Ένα κυλινδρικό δοχείο περιέχει νερό σε βάθος H=0,6m. Στον πυθμένα του δοχείου και στο κέντρο αυτού υπάρχει φωτεινή πηγή εκπομπής μονοχρωματικής ακτινοβολίας με κατεύθυνση πάντοτε προς το κέντρο Κ της κυκλικής ελεύθερης επιφάνειας του νερού.

Α) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου της ακτινοβολίας μέσα στο νερό έχει εξίσωση:

$$E = 1500\sqrt{2}\eta\mu(75.10^{13}\pi t - 25\sqrt{2}.10^{5}\pi x)(S.I).$$

Αν η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι $c=3.10^8$m/s να βρεθεί

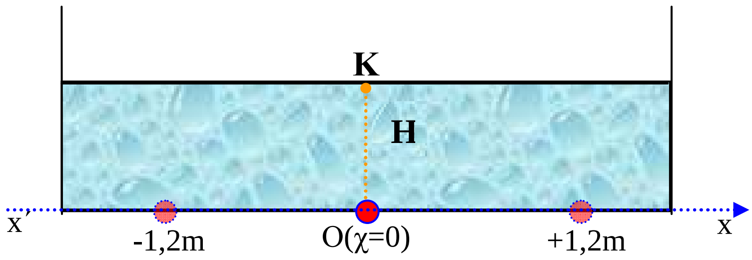
Α-1. Η ταχύτητα διάδοσης της ακτινοβολίας στο νερό.

Α-2. Ο δείκτης διάθλασης του νερού για την δεδομένη ακτινοβολία.

Α-3. Η κρίσιμη γωνία εξόδου της ακτινοβολίας από νερό προς τον αέρα.

Β) Να γραφεί η χρονική εξίσωση του μαγνητικού πεδίου της ακτινοβολίας στο νερό.

Γ) Κάποια στιγμή t=0 η φωτεινή πηγή αρχίζει να εκτελεί οριζόντια απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A=1,2m και περιόδου T=1,2s χωρίς αρχική φάση. Αν ο άξονας ταλάντωσης x΄x και το κέντρο Κ της ελεύθερης επιφάνειας του νερού ανήκουν στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο, να βρείτε



Γ-1. Σε ποια περιοχή του άξονα ταλάντωσης χ΄χ πρέπει να βρίσκεται η πηγή ώστε η ακτινοβολία που στέλνει προς το Κ να διαθλάται προς τον αέρα.

Γ-2. Τα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα της 1ης περιόδου ταλάντωσης της πηγής για την οποία έχουμε διάθλαση της ανωτέρω ακτινοβολίας.

Γ-3. Τη γωνία διάθλασης της ακτινοβολίας που εκπέμπει η πηγή προς το Κ όταν είναι στη θέση $x=-0,2\sqrt{3}m$. Για τον αέρα θεωρείστε δείκτη διάθλασης $\eta_{\alpha\varepsilon\rho}=1$.

Λύση:

Α1) Συγκρίνοντας της δοθείσα εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου με την αντίστοιχη της θεωρίας $E = E_{max}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$ προκύπτει ότι:

$$E_{max}=1500\sqrt{2}\ \text{N/C}$$

$$\omega=75\pi\cdot 10^{13}\text{rad/s} \rightarrow f=37,5\cdot 10^{13}\text{Hz}$$

$$\frac{2\pi\cdot x}{\lambda} = 25\pi\sqrt{2}\cdot 10^{5}x \rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{2}}{25}\cdot 10^{-5}\text{m}$$

Οπότε η ταχύτητα διάδοσης στο νερό είναι:

$$u = \lambda \cdot f \to u = \frac{\sqrt{2}}{25} \cdot 10^{-5} \cdot 37{,}5 \cdot 10^{13} \to u = 1{,}5\sqrt{2} \cdot 10^{8} \text{ m/s}$$

Α2) Ο δείκτης διάθλασης του νερού για την συγκεκριμένη ακτινοβολία είναι

$$n = \frac{c}{u} \to n = \frac{3 \cdot 10^{8}}{1{,}5\sqrt{2} \cdot 10^{8}} \to \boldsymbol{n = \sqrt{2}}$$

Α3) Η κρίσιμη γωνία εξόδου είναι

$$\eta\mu\theta_{crit} = \frac{n_{\alpha\varepsilon\rho}}{n_{\nu\varepsilon\rho}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \boldsymbol{\theta_{crit} = 45^{o}}$$

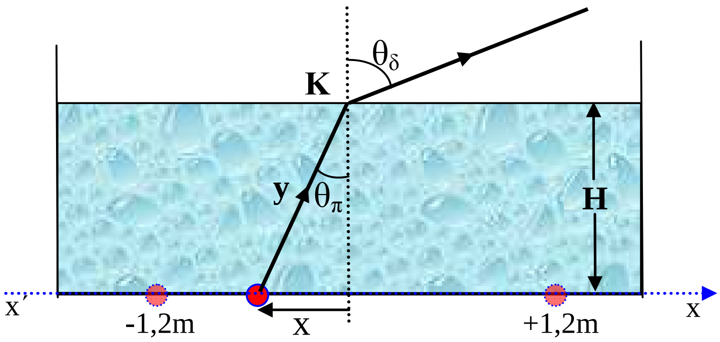
Β) Για την ένταση του μαγνητικού πεδίου της ακτινοβολίας έχουμε:

$$B = B_{max}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Όπου $\frac{E_{max}}{B_{max}} = u \to B_{max} = \frac{E_{max}}{u} = \frac{1500\sqrt{2}}{1{,}5\sqrt{2}} \to B_{max} = 1000T$. Άρα:

$$\boldsymbol{B = 1000 \cdot \eta\mu\left(75\pi \cdot 10^{13}\, t - 25\sqrt{2}\pi \cdot 10^{5}\, x\right)\ (S.I.)}$$

Γ1) Για την γωνία πρόσπτωσης όταν η φωτεινή πηγή βρίσκεται σε μια τυχαία θέση x του άξονα ταλάντωσης της έχουμε:



$$\eta\mu\theta_{\pi} = \frac{|x|}{y} = \frac{|x|}{\sqrt{|x|^{2} + H^{2}}}$$

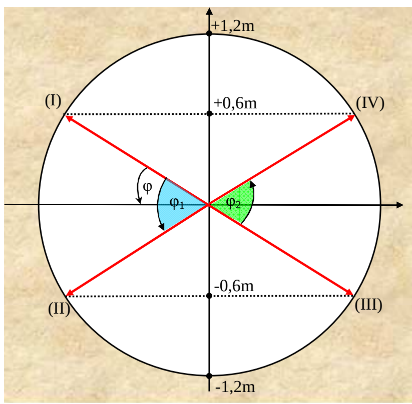
Προκειμένου η ακτινοβολία να διαθλάται θα πρέπει η γωνία πρόσπτωσης στη διαχωριστική επιφάνεια νερού-αέρα να είναι μικρότερη από την κρίσιμη γωνία. Δηλαδή:

$$\theta_{\Pi} < \theta_{crit} \to \eta\mu\theta_{\pi} < \eta\mu\theta_{crit}$$

$$\frac{|x|}{\sqrt{|x|^{2} + H^{2}}} < \eta\mu 45^{o} \to \frac{|x|}{\sqrt{|x|^{2} + H^{2}}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{|x|^{2}}{|x|^{2} + H^{2}} < \frac{1}{2} \to 2|x|^{2} < |x|^{2} + H^{2} \to |x| < H$$

-0,6m < x < +0,6m



Γ2) Για το χρονικό διάστημα που το περιστρεφόμενο διάστημα στρεφόμενο αριστερόστροφα γύρω από την αρχή των αξόνων Ο, κινείται από την θέση (Ι) μέχρι την θέση (ΙΙ) και στη συνέχεια από την θέση (ΙΙΙ) μέχρι την θέση (IV), η προβολή στον κατακόρυφο άξονα κυμαίνεται από -0,6m έως +0,6m, η ακτινοβολία της φωτεινής πηγής διαθλάται.

$$\eta\mu\varphi = \frac{0{,}6}{1{,}2} = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} rad$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 2 \cdot \varphi = \frac{\pi}{3} rad \quad \text{οπότε} \quad \varphi_{o\lambda} = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{2\pi}{3} rad$$

Άρα:

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{3} = \frac{1{,}2}{3} \rightarrow \boldsymbol{\Delta t = 0{,}4s}$$

Γ3) Για την γωνία πρόσπτωσης έχουμε:

$$\eta\mu\theta\pi = \frac{|x|}{\sqrt{|x|^2 + H^2}} = \frac{0{,}2\sqrt{3}}{\sqrt{0{,}12 + 0{,}36}} = \frac{0{,}2\sqrt{3}}{0{,}4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

Από τον Νόμο Snell έχουμε:

$$\eta\mu\theta_\pi \cdot n_{\nu\varepsilon\rho} = \eta\mu\theta_\delta \cdot n_{\alpha\varepsilon\rho}$$

$$\eta\mu\theta_\delta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boldsymbol{\theta_\delta = 45^o}$$

Από τον συγγραφέα **Τσούνη Βασίλειο**

Επιμέλεια

Πέτρος Καραπέτρος