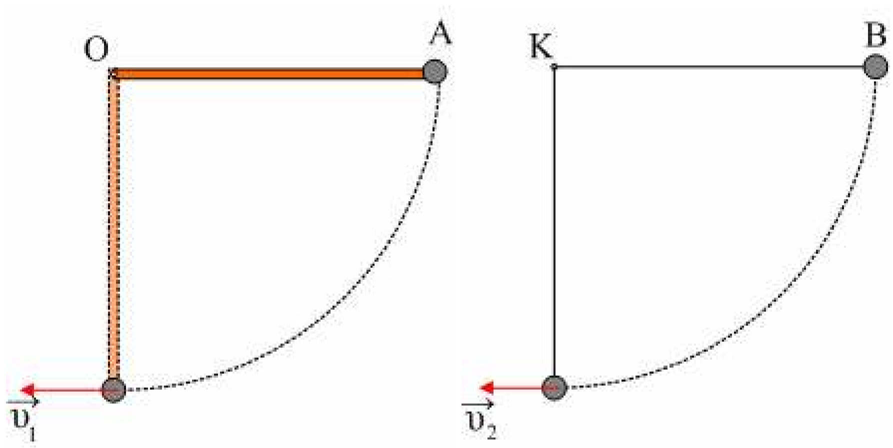
Στο άκρο νήματος ή στο άκρο ράβδου;



Δυο σφαίρες Α και Β έχουν την ίδια μάζα m=1kg. Η σφαίρα Α προσκολλάται στο άκρο ομογενούς ράβδου μάζας Μ=3kg και μήκους l=1,25m η οποία μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άλλο της άκρο Ο. Η Β σφαίρα δένεται στο άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους l=1,25m, το άλλο άκρο του οποίου δένεται σε σταθερό σημείο Κ. Φέρνουμε τις δύο σφαίρες σε θέσεις τέτοιες ώστε η ράβδος και το νήμα να είναι οριζόντια, όπως στο σχήμα και σε μια στιγμή τις αφήνουμε ελεύθερες να κινηθούν.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λαθεμένες.

i) Οι δύο σφαίρες θα αποκτήσουν την ίδια αρχική επιτάχυνση.

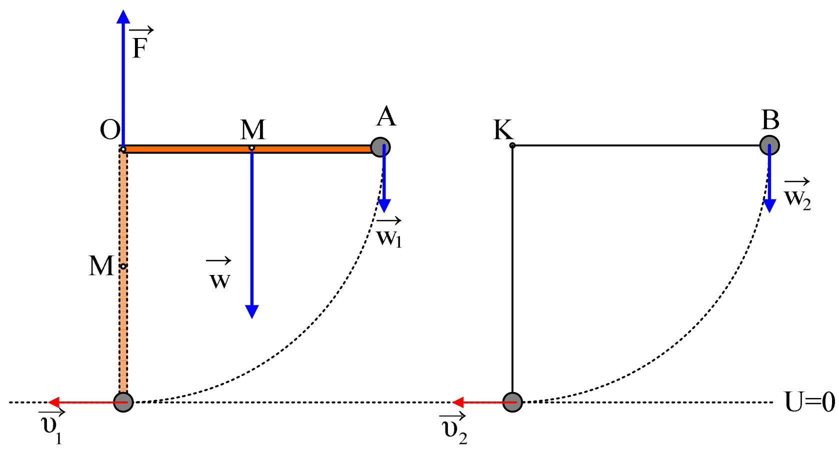
ii) Ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας Β, ως προς το Κ έχει μέτρο dL/dt= mgl.

iii) Ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας Α, ως προς τον άξονα περιστροφής που περνά από το Ο έχει μέτρο dL/dt= mgl.

iv) Στην κατακόρυφη θέση οι δύο σφαίρες θα έχουν ίσες ταχύτητες $\upsilon_1=\upsilon_2$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της Ι= 1/3 Ml^2 και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Στο παραπάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ράβδος-σφαίρα Α καθώς και στη σφαίρα Β.

Στην πρώτη περίπτωση:

Θεωρώντας τις δεξιόστροφες ροπές θετικές παίρνουμε:

$$\Sigma\tau = I_{ολ} \cdot \alpha_{γων} \rightarrow$$

Όπου η ροπή αδράνειας είναι:

$$I = \frac{1}{3}Ml^2 + ml^2 = 1/3 \cdot 3 \cdot 1{,}25^2 + 1 \cdot 1{,}25^2 = \frac{25}{8} kg \cdot m^2$$

$$Mg \cdot \ell/2 + mg \cdot \ell = I \cdot \alpha_{γων} \rightarrow$$

$$\alpha_{γων} = \frac{30 \cdot \frac{5}{8} + 10 \cdot \frac{5}{4}}{25/8} = \frac{\frac{250}{8}}{\frac{25}{8}} rad/s^2 = 10 rad/s^2$$

Οπότε η σφαίρα έχει επιτάχυνση

$$\alpha_A = \alpha_{γων} \cdot \ell = 10 \cdot 1{,}25 = 12{,}5 m/s^2$$

Για τη σφαίρα Β:

$$\Sigma F_y = m\alpha_B \rightarrow mg = m\alpha \rightarrow \alpha_B = g = 10 m/s^2.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η Α σφαίρα αποκτά μεγαλύτερη επιτάχυνση από την Β

ii) Η πρόταση είναι σωστή αφού $dL/dt = \Sigma\tau_K = mg \cdot \ell = 12{,}5 kgm^2/s^2$.

iii) Η πρόταση είναι λάθος και αυτό γιατί το βάρος δεν είναι η μοναδική δύναμη που ασκείται στην Α σφαίρα. Δέχεται δύναμη και από την ράβδο, γι' αυτό άλλωστε απέκτησε και επιτάχυνση μεγαλύτερη από g. Ο αντίστοιχος ρυθμός έχει μέτρο:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = I_A \cdot a_{γων} = ml^2 \cdot a_{γων} = \frac{125}{8} kgm^2/s^2$$

Ο ρυθμός αυτός θα μπορούσε να υπολογιστεί αντιμετωπίζοντας τη σφαίρα ως υλικό σημείο, οπότε:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(m\upsilon l)}{dt} = ml\frac{d\upsilon}{dt} = mal$$

άρα

$$\frac{dL}{dt} = mal = 1 \cdot 12{,}5 \cdot 1{,}25 = \frac{125}{8} kgm^2/s^2$$

iv) Θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από το κατώτερο σημείο της τροχιάς των σφαιρών, εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ και στις δύο περιπτώσεις και έχουμε:

Για το σύστημα ράβδος-σφαίρα Α

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ}$$

$$Mg\ell + mg\ell = Mg\ell/2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(M+2m)gl}{I}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} rad/s$$

Οπότε η σφαίρα Α έχει ταχύτητα:

$$\upsilon_A = \omega \cdot \ell = 2{,}5\sqrt{5} \text{ m/s}$$

Αντίστοιχα για την σφαίρα Β:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ}$$

$$mg\ell = \tfrac{1}{2} m\upsilon_B^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_B = \sqrt{2gl} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1{,}25} = 5m/s$$

Προφανώς η Α σφαίρα φτάνει στην κατακόρυφη θέση με μεγαλύτερη ταχύτητα από την σφαίρα Β.

dmaragris@sch.gr