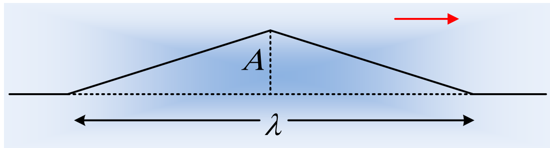
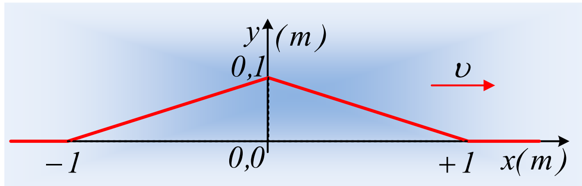
Η ενέργεια ενός παλμού.

Στην προηγούμενη ανάρτηση «Η ενέργεια και η ισχύς σε ένα αρμονικό κύμα.» ασχοληθήκαμε με το τι συμβαίνει με την ενέργεια κατά την διάδοση ενός αρμονικού κύματος σε μια χορδή.



Ας δούμε τώρα τι διαφορετικό έχουμε, αν κατά μήκος μιας τεντωμένης χορδής, η οποία τείνεται με δύναμη F, διαδίδεται ένας τριγωνικό παλμός με ταχύτητα $\upsilon = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$.



Για ευκολία στις πράξεις, έστω ότι ο παλμός είναι αυτός του διπλανού σχήματος, ο οποίος διαδίδεται προς τα δεξιά με ταχύτητα υ=2m/s, ενώ η γραμμική πυκνότητα της χορδής είναι ίση με μ=0,05kg/m, πράγμα που σημαίνει ότι η τάση της χορδής είναι $F=\mu\upsilon^2=0{,}2N$.

Για να μελετήσουμε την διάδοσή του, παίρνουμε ως αρχή του άξονα το σημείο Ο, όπου βρίσκεται η κορυφή του παλμού, τη στιγμή t=0.

Τη στιγμή αυτή η εξίσωση y=f(x) που περιγράφει τον παλμό μας είναι:

$$y=\begin{cases} 0{,}1-0{,}1x \ \ (S.I.) \ \ \text{με } 0 \le x \le 1 \\ 0{,}1+0{,}1x \ \ (S.I.) \ \ \text{με } -1 \le x < 0 \end{cases}$$

Με βάση όσα αναφέρονται στην ανάρτηση:

Μια εναλλακτική θεμελίωση των κυμάτων…

Σε κάθε επόμενη χρονική στιγμή ο παλμός θα έχει μετακινηθεί κατά μια απόσταση x=υ·t και το μέγιστο του παλμού, θα έχει επίσης μετατοπισθεί από τη θέση x=0, στη θέση x=υ·t. Η αρχική συνάρτηση y=f(x), θα πρέπει τώρα να γραφεί με τη μορφή

$$y=f(x-\upsilon\cdot t) \ \ \text{όπου } t \ge 0$$

Στην περίπτωσή μας δηλαδή θα έχουμε:

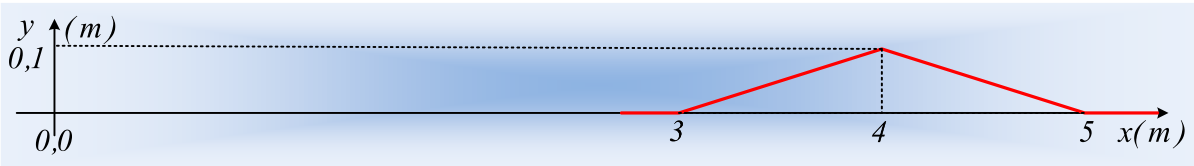
$$y=\begin{cases} 0{,}1-0{,}1(x-2t)=0{,}1-0{,}1x+0{,}2t \ \ \text{με } 2t \le x \le 1+2t \ \ (S.I.) \\ 0{,}1+0{,}1(x-2t) = 0{,}1+0{,}1x-0{,}2t \ \ \text{με } -1+2t \le x < 2t \ \ (S.I.) \end{cases}$$

Η παραπάνω κλαδική συνάρτηση, είναι η «εξίσωση του παλμού».

Έτσι για παράδειγμα, αν στην παραπάνω εξίσωση θέσουμε t=2s, θα πάρουμε το αντίστοιχο στιγμιότυπο όπου:

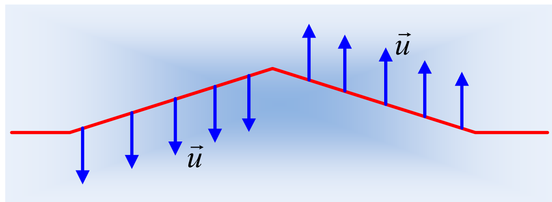
$$y=\begin{cases} 0,1\text{-}0,1x+0,2\cdot 2=0,5\text{-}0,1x & \text{με } 4\le x\le 5 \quad (S.I.) \\ 0,1+0,1x\text{-}0,2\cdot 2=\text{-}0,3+0,1x & \text{με } 3\le x<4 \quad (S.I.) \end{cases}$$

Και με μορφή:



Ας πάρουμε τώρα ένα στοιχειώδες τμήμα της χορδής ds το οποίο προέκυψε από επιμήκυνση του αντίστοιχου στοιχειώδους τμήματος dx της χορδής. Το τμήμα αυτό έχει μάζα dm=μ·dx και ταχύτητα στη διεύθυνση y (ταχύτητα ταλάντωσης):

$u=\frac{\vartheta y}{\vartheta t}=+0,2m/s$ αν πρόκειται για το δεξιό τμήμα του παλμού και $u=\frac{\vartheta y}{\vartheta t}=-0,2m/s$ αν πρόκειται για το αριστερό του τμήμα. Πράγμα που σημαίνει ότι όλα τα σημεία κάθε κλάδου έχουν την ίδια ταχύτητα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

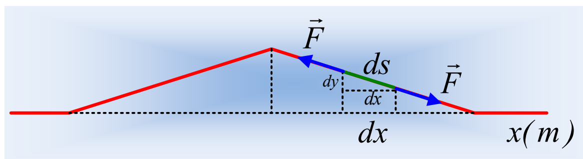


Συνεπώς κάθε στοιχειώδες τμήμα της χορδής έχει κινητική ενέργεια:

$$dK=\frac{1}{2}dm\cdot u^2=\frac{1}{2}\mu dx\cdot u^2=0,02\mu dx \quad (1)$$

Είτε κινείται προς τα πάνω είτε προς τα κάτω, ενώ συνολικά ο παλμός «μεταφέρει» κινητική ενέργεια:

$$K_{ολ}=\int_{-1}^{1}0,02\mu dx=0,04\mu=2\cdot 10^{-3}J$$



Επιστρέφουμε στο στοιχειώδες τμήμα ds (με πράσινο χρώμα στο σχήμα), που τείνεται στα άκρα του από δυνάμεις μέτρου F. Για το μήκος του έχουμε:

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

οπότε το τμήμα αυτό έχει υποστεί μια επιμήκυνση $\delta\ell=ds-dx$ ή

$$\delta\ell=ds-dx=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}-dx=dx\left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}-1\right)$$

Αν τώρα dy<<dx, πράγμα που πρακτικά σημαίνει ότι έχουμε μια μικρή παραμόρφωση της χορδής, μπορούμε να πάρουμε με χρήση σειράς Taylor:

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Οπότε

$$\delta\ell = \frac{1}{2}dx \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Η δυναμική ενέργεια του στοιχειώδους αυτού τμήματος dx, ισούται με το έργο μιας εξωτερικής δύναμης F΄, αντίθετης της F, την οποία ασκούμε προκειμένου να επιμηκύνουμε το παραπάνω τμήμα κατά $d\ell$. Έχουμε δηλαδή:

$$dU = F'\delta\ell = |F|\delta\ell = \mu\upsilon^2 \cdot \frac{1}{2}dx \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu dx \cdot \upsilon^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad (2^{\alpha})$$

Αλλά αν μιλάμε για το δεξιό τμήμα του παλμού $\frac{dy}{dx} = -0{,}1$, ενώ για το αριστερό $\frac{dy}{dx} = +0{,}1$, οπότε:

$$dU = \frac{1}{2}\mu dx \cdot 2^2 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}02\,\mu dx \quad (2)$$

Ενώ η συνολική δυναμική ενέργεια του παλμού θα είναι:

$$U_{o\lambda} = \int_{-1}^{1} 0{,}02\,\mu dx = 0{,}04\,\mu = 2 \cdot 10^{-3}\,J$$

Συμπέρασμα:

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι **κάθε** στοιχειώδες τμήμα της χορδής έχει **κάθε χρονική στιγμή** Κινητική ενέργεια ίση με τη Δυναμική! Το ίδιο συμπέρασμα είχε προκύψεις και στην περίπτωση του αρμονικού κύματος, στην προηγούμενη ανάρτηση, πράγμα όχι βέβαια τυχαίο!

Ας πάρουμε τον τυχαίο παλμό με εξίσωση y=f(x-υt) θέτοντας h=x-υt παίρνουμε για την ταχύτητα ταλάντωσης:

$$u = \frac{\vartheta y}{\vartheta t} = \frac{df(h)}{dh} \cdot \frac{\vartheta h}{\vartheta t} \rightarrow u = -\upsilon \cdot \frac{df(h)}{dh}$$
$$\frac{\vartheta y}{\vartheta x} = \frac{df(h)}{dh} \cdot \frac{\vartheta h}{\vartheta x} = \frac{df(h)}{dh} \quad \rightarrow$$

$$u = -\upsilon \cdot \frac{\vartheta y}{\vartheta x} \quad (3)$$

Οπότε αν επιστρέψουμε στη σχέση (1) για την κινητική ενέργεια παίρνουμε:

$$dK = \frac{1}{2}dm \cdot u^2 = \frac{1}{2}\mu dx \cdot \left(-\upsilon \cdot \frac{\vartheta y}{\vartheta x}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu dx \cdot \upsilon^2 \cdot \left(\frac{\vartheta y}{\vartheta x}\right)^2 = dU \quad (4)$$

με βάση τη σχέση (2^{α}).

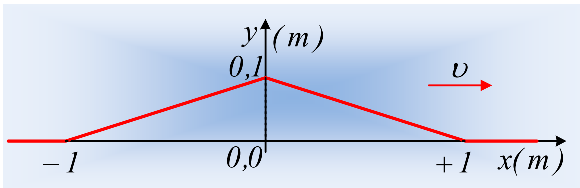
Ας σημειωθεί ότι η (3) προέκυψε **ανεξάρτητα** της μορφής της παραμόρφωσης που διαδίδεται πάνω στη χορδή, που σημαίνει ότι ισχύει σε **ΟΛΑ** τα κύματα. Πράγμα που συνεπάγεται ότι το ίδιο ισχύει και για την (4), αλλά και για την συνολική κινητική ενός οποιουδήποτε τμήματος της χορδής, αφού $K_{ολ}=U_{ολ}$.

Έτσι για τον συγκεκριμένο παλμό μπορούμε να μιλήσουμε για την ολική ενέργεια που μεταφέρεται και η οποία θα είναι:

$$E = K + U = 2K = 2U = 4 \cdot 10^{-3}\, J$$

Εφαρμογή

Έχουμε την παραπάνω χορδή σε ηρεμία. Με κατάλληλο μηχανισμό εκτρέπουμε μια περιοχή της μήκους 2m δημιουργώντας ένα ισοσκελές τρίγωνο ύψους 0,1m.



i) Πόση ενέργεια δαπανήσαμε για την παραμόρφωση της χορδής;

ii) Αν κάποια στιγμή αποσύρουμε το μηχανισμό απελευθερώνοντας τη χορδή τι θα συμβεί;

Απάντηση:

i) Η ενέργεια που προσφέραμε μέσω έργου για την παραμόρφωση της χορδής, είναι ίση με τη δυναμική ενέργεια λόγω παραμόρφωσής της. Αλλά τότε με βάση τα παραπάνω είναι ίση με:

$$U_{ολ} = \int_{-1}^{1} 0{,}02\,\mu dx = 0{,}04\,\mu = 2 \cdot 10^{-3}\, J$$

ii) Μόλις αφήσουμε ελεύθερη τη χορδή θα δημιουργηθούν δύο παλμοί, απολύτως όμοιοι, που ένας θα διαδίδεται προς τα δεξιά και ο άλλος προς τα αριστερά, όπως στο σχήμα, με την ίδια ταχύτητα υ και το ίδιο «μήκος κύματος» λ=2m:

Όμως η συνολική ενέργεια που θα μεταφέρουν, είναι ίση με την ενέργεια που είχαμε δώσει στην χορδή για την αρχική της παραμόρφωση με μέγιστη τιμή το 0,1m. Αλλά τότε κάθε παλμός θα μεταφέρει συνολικά ενέργεια $E_1 = \frac{1}{2} U_{ολ,αρχ} = 10^{-3}$J. Η ενέργεια αυτή θα είναι:

$$E_1 = 2U_1 = 2K_1$$

Ας ξαναγυρίσουμε στην ενέργεια του παλμού που βρήκαμε παραπάνω:

$$E = 2U = 2\int_0^2 \frac{1}{2}\mu dx \cdot \upsilon^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Όπου $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{A}{\lambda/2} = \pm A$, οπότε η ολική ενέργεια γράφεται:

$$E = 2\int_0^2 \frac{1}{2}\mu dx \cdot \upsilon^2 \cdot A^2 = 2\mu\upsilon^2 A^2$$

Έτσι τώρα αντίστοιχα θα έχουμε:

$$E_1 = 2\mu\upsilon^2 A_1^2$$

Όμως $E_1 = \frac{1}{4}E$, από όπου:

$$2\mu\upsilon^2 A_1^2 = \frac{1}{4}2\mu\upsilon^2 A^2 \rightarrow A_1 = \frac{A}{2} = 0{,}05m$$

dmargaris@gmail.com