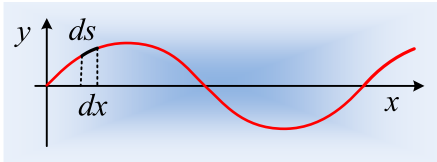
Η ενέργεια και η ισχύς σε ένα αρμονικό κύμα.

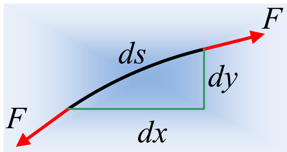
Έστω ότι κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, μιας χορδής, διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα με εξίσωση:



$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Η χορδή τείνεται με δύναμη F, έχοντας γραμμική πυκνότητα μ, με αποτέλεσμα η ταχύτητα διάδοσης του κύματος, κατά μήκος της, να δίνεται από την γνωστή εξίσωση $\upsilon = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$.

Εστιάζουμε την προσοχή μας σε μια μάζα ενός στοιχειώδους τμήματος μήκους dx, στη θέση x, για την οποία μπορούμε να γράψουμε $dm=\mu \cdot dx=m_1$. Στο σχήμα μας αυτή η μάζα m_1 είναι η μάζα του τμήματος μήκους ds, με μαύρο χρώμα.



Η κινητική ενέργεια του στοιχειώδους αυτού τμήματος είναι:

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1 u^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m_1\left[A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]^2 \rightarrow$$

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1\omega^2 A^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (1)$$

Στο διπλανό σχήμα το ds μπορεί να θεωρηθεί ευθύγραμμο, οπότε μπορούμε να γράψουμε $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, οπότε το τμήμα αυτό έχει υποστεί μια επιμήκυνση $\delta\ell = ds - dx$ ή

$$\delta\ell = ds - dx = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx = dx\left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 1\right)$$

Αν τώρα dy<<dx, πράγμα που πρακτικά σημαίνει ότι έχουμε μια μικρή παραμόρφωση της χορδής ή με άλλα λόγια το μήκος κύματος λ είναι πολύ μεγαλύτερο του πλάτους Α του κύματος, μπορούμε να πάρουμε με χρήση σειράς Taylor:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Οπότε

$$\delta\ell = \frac{1}{2}dx \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Η δυναμική ενέργεια του στοιχειώδους αυτού τμήματος dx, ισούται με το έργο μιας εξωτερικής δύναμης F΄, αντίθετης της F, την οποία ασκούμε προκειμένου να επιμηκύνουμε το παραπάνω τμήμα κατά $d\ell$. Έχουμε δηλαδή:

$$U_1 = F'\delta\ell = |F|\delta\ell = \mu\upsilon^2 \cdot \frac{1}{2}dx \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{2}m_1(\lambda f)^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Αλλά

$$\frac{dy}{dx} = -A\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \rightarrow$$

$$U_1 = \frac{1}{2}m_1\lambda^2 f^2 A^2\left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \rightarrow$$

$$U_1 = \frac{1}{2}m_1\omega^2 A^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (2)$$

Συμπέρασμα:

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι **κάθε** στοιχειώδες τμήμα της χορδής έχει **κάθε χρονική στιγμή** Κινητική ενέργεια ίση με τη Δυναμική!

Αυτό σημαίνει ότι όταν $\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 0$ ή ισοδύναμα $\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \pm 1$, όπου η στοιχειώδης μάζα m_1 βρίσκεται σε ακραία θέση $(y = \pm A)$, έχει $K = U = 0$, ενώ αντίθετα όταν περνά από τη θέση ισορροπίας της, ισχύει $K = U = K_{max} = \frac{1}{2}m_1\omega^2 A^2$.

Προφανώς μπορούμε να μιλήσουμε για την ολική ενέργεια κάθε στοιχειώδους μάζας, η οποία επίσης **ΔΕΝ** παραμένει σταθερή, αφού:

$$E = K + U = 2K = 2U = m_1\omega^2 A^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (3)$$

Αλλά από τη στιγμή που η ενέργεια αυτή, **ΔΕΝ** παραμένει σταθερή, δεν δικαιούμαστε να την ονομάζουμε ενέργεια ταλάντωσης, όπως κάνουμε στην ΑΑΤ…

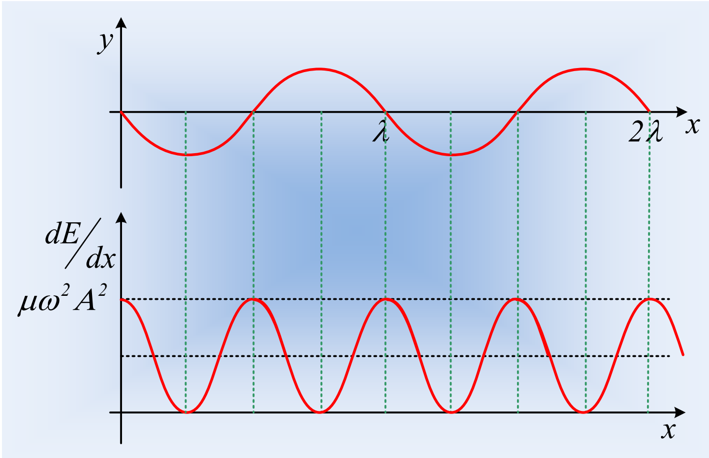
Όμως η εξίσωση (3) μπορεί να γραφτεί και με τη μορφή:

$$dE = m_1\omega^2 A^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \mu dx \cdot \omega^2 A^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \rightarrow$$

$$\frac{dE}{dx} = \mu \cdot \omega^2 A^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (4)$$

Μιλώντας για την πυκνότητα ενέργειας (η ενέργεια ανά μονάδα μήκους)

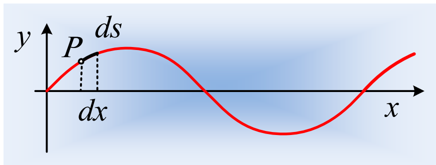
Αν κάνουμε τη γραφική παράσταση της (4), μαζί με το στιγμιότυπο του κύματος, τη στιγμή t_1=2Τ, δεχόμενοι ότι το κύμα φτάνει τη στιγμή t=0, στη θέση x=0, θα πάρουμε την εικόνα:



Όπου μπορείτε να διακρίνετε τη στιγμή t=2T, πώς κατανέμεται η ενέργεια κατά μήκος της χορδής, ανάλογα με τη θέση της στοιχειώδους μάζας $dm=m_1$.

Και αν θέλουμε την ισχύ;

Ισχύς του κύματος είναι η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που φτάνει σε ένα ορισμένο σημείο της χορδής, έστω το σημείο P του σχήματος.

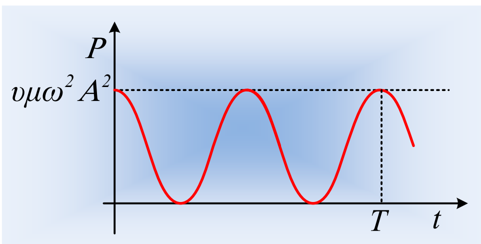


Η ενέργεια διαδίδεται κατά μήκος της χορδής με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του κύματος υ, οπότε για να περάσει από το τμήμα dx θα χρειαστεί χρονικό διάστημα dt, όπου $dx=\upsilon\cdot dt$.

Αλλά τότε η στιγμιαία ισχύς που μεταφέρεται μέσα από το στοιχειώδες τμήμα dx είναι (με χρήση της σχέσης (4):

$$P=\frac{dE}{dt}=\upsilon\cdot\frac{dE}{dx}=\upsilon\mu\omega^2A^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι δεν έχουμε μια σταθερή ροή ενέργειας που διαδίδεται κατά μήκος της χορδής, αλλά ότι ο ρυθμός διάδοσης της ενέργειας μεταβάλλεται με το χρόνο, για ένα ορισμένο σημείο (ας πάρουμε x=0), όπως στο διάγραμμα:



Εφαρμογή.

Κατά μήκος μιας χορδής διαδίδεται κύμα με εξίσωση y=0,4·ημ2π(t-x) (μονάδες στο S.I.). Κάποια στιγμή t_1 μια στοιχειώδης μάζας της χορδής δm=10^{-7}kg βρίσκεται σε απομάκρυνση y_1=0,2m.

i) Να βρεθούν τη στιγμή t_1 η δυναμική και η κινητική ενέργεια της στοιχειώδους αυτής μάζας.

ii) Να βρεθούν οι αντίστοιχες ενέργειες, μετά από λίγο όταν η απομάκρυνση της στοιχειώδους μάζας γίνει y=0,4m.

Απάντηση:

Από την εξίσωση του κύματος προκύπτει ότι T=1s, λ=1m και υ=1m/s.

i) Τη στιγμή t_1, έχουμε απομάκρυνση y_1=0,2m και με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύματος παίρνουμε:

$$0,2=0,4\cdot ημ2π(t\text{-}x) \rightarrow ημ2π(t\text{-}x) = ½ \rightarrow συν2π(t\text{-}x)= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Αλλά τότε η δυναμική ενέργεια της στοιχειώδους αυτής μάζας είναι:

$$U_1=\frac{1}{2}m_1\omega^2A^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)=\frac{1}{2}10^{-7}(2\pi)^2 0,4^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 J=4\cdot10^{-8}J$$

Αλλά και η κινητική της ενέργεια είναι επίσης:

$$K_1=\frac{1}{2}m_1\omega^2A^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)=4\cdot10^{-8}J$$

ii) Τη χρονική στιγμή t_2 όπου η στοιχειώδης μάζα βρίσκεται σε θέση πλάτους:

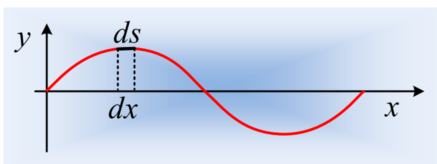
$$0,4=0,4\cdot ημ2π(t\text{-}x) \rightarrow ημ2π(t\text{-}x) = 1 \rightarrow συν2π(t\text{-}x)= 0$$

Οπότε:

$$U_2=K_2=0$$

Προφανώς τη στιγμή t_2 **και** η ολική ενέργεια της παραπάνω μάζας είναι μηδενική!

Τι μας λέει το τελευταίο αποτέλεσμα; Η στοιχειώδης μάζα βρίσκεται σε ακραία θέση με μηδενική ταχύτητα, συνεπώς με μηδενική Κινητική ενέργεια, αλλά στη θέση αυτή το στοιχειώδες τμήμα dx της χορδής δεν έχει παραμόρφωση (dx=ds), οπότε και η Δυναμική του ενέργεια είναι μηδενική!



Σχόλιο:

Ας συγκριθεί η παραπάνω εφαρμογή και τα αποτελέσματα που βγάλαμε με το αντίστοιχο ερώτημα του Γ θέματος στις πρόσφατες Πανελλαδικές εξετάσεις του 2017 και τη λύση που βαθμολογήθηκε ως σωστή….

dmargaris@gmail.com