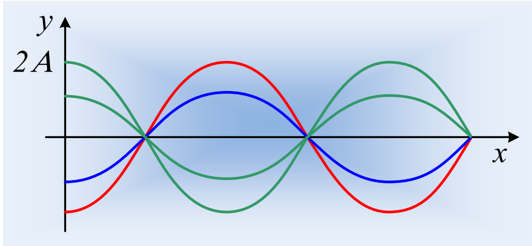
Οι ενέργειες σε ένα στάσιμο κύμα.

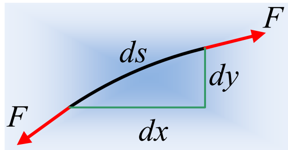


Έστω ότι σε ένα ελαστικό μέσο, μια χορδή, έχει δημιουργηθεί ένα στάσιμο κύμα με εξίσωση:

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t}{T}$$

Όπως αυτό που μελετά το σχολικό βιβλίο.

Κάθε στοιχειώδες τμήμα της χορδής θα έχει κινητική ενέργεια, εξαιτίας της ταχύτητας ταλάντωσης και μια δυναμική ενέργεια, εξαιτίας της παραμόρφωσης που υπόκειται.



Με βάση την αντίστοιχη μελέτη πάνω σε ένα τρέχον κύμα, που έγινε στην ανάρτηση «Η ενέργεια και η ισχύς σε ένα αρμονικό κύμα», για τις ενέργειες αυτές θα έχουμε:

Κάθε στοιχειώδες τμήμα της χορδής μήκους dx και μάζας m_1=dm=μdx έχει κινητική ενέργεια:

$$dK_1 = \frac{1}{2} m_1 u^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu dx \left[2A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T}\right)\right]^2 \rightarrow$$

$$\frac{dK}{dx} = 2\mu A^2 \omega^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\sigma\upsilon\nu^2 2\pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (1)$$

Όπου $\frac{dK}{dx}$ η πυκνότητα της κινητικής ενέργειας κατά μήκος της χορδής (η κινητική ενέργεια ανά μονάδα μήκους).

Έτσι με βάση την (1) βρίσκουμε ότι στις κοιλίες, δηλαδή στις θέσεις $x_\kappa = k\frac{\lambda}{2}$, όπου k=0,1,2,… η πυκνότητα ενέργειας είναι μέγιστη με τιμή:

$$\left(\frac{dK}{dx}\right)_{max} = 2\mu A^2 \omega^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2\pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (1^\alpha)$$

Ενώ αντίθετα στους δεσμούς, όπου u=0, δεν έχουμε κινητική ενέργεια και η αντίστοιχη πυκνότητα ενέργειας είναι:

$$\left(\frac{dK}{dx}\right)_{min} = 0 \quad (1^\beta)$$

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο (όπως στο τρέχον κύμα) για την αντίστοιχη δυναμική ενέργεια έχουμε:

$$dU_1 = F'\delta\ell = |F|\delta\ell = \mu\upsilon^2 \cdot \frac{1}{2} dx \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \rightarrow$$

$$\frac{dU}{dx}=\frac{1}{2}\mu\upsilon^2\left(-2A\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\eta\mu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu 2\pi\frac{t}{T}\right)^2\rightarrow$$

Και επειδή $\frac{2\pi}{\lambda}=k=\frac{\omega}{\upsilon}$ παίρνουμε:

$$\frac{dU}{dx}=2\mu A^2\omega^2\cdot\eta\mu^2 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu^2 2\pi\frac{t}{T}\quad(2)$$

Όπου $\frac{dU}{dx}$ η πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας κατά μήκος της χορδής (η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μήκους).

Αν στην (2) αντικαταστήσουμε $x_\kappa=k\frac{\lambda}{2}$, για τις θέσεις των κοιλιών, θα πάρουμε:

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_\kappa=2\mu A^2\omega^2\cdot\eta\mu^2 2\pi\frac{k\lambda}{2\lambda}\cdot\eta\mu^2 2\pi\frac{t}{T}=0\quad(2^\alpha)$$

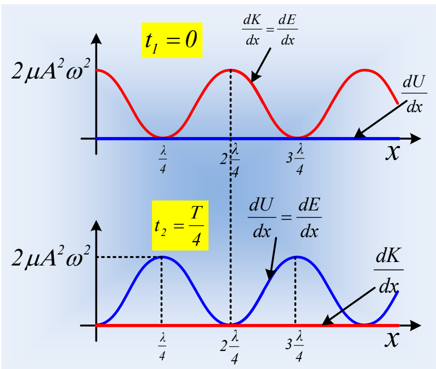
Ενώ αντίθετα για τις θέσεις των δεσμών $x_\delta=(2k+1)\frac{\lambda}{4}$ το $\eta\mu^2 2\pi\frac{x}{\lambda}=\eta\mu^2\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]=1$ και η πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας γίνεται μέγιστη, ίση με:

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{max}=2\mu A^2\omega^2\cdot\eta\mu^2 2\pi\frac{t}{T}\quad(2^\beta)$$

Από τις εξισώσεις (1^α) και (2^β) προκύπτει ότι η μέγιστη πυκνότητα κινητικής ενέργειας στις κοιλίες, είναι ίση με την μέγιστη πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας στους δεσμούς. Δηλαδή:

$$\left(\frac{dK}{dx}\right)_{max,\kappa o\iota\lambda\acute{\iota}\alpha}=2\mu A^2\omega^2=\left(\frac{dU}{dx}\right)_{max,\delta\varepsilon\sigma\mu\acute{o}\varsigma}$$

Αν κάνουμε τη γραφική παράσταση των εξισώσεων (1) και (2) στο ίδιο διάγραμμα για τις χρονικές στιγμές t_1=0 και t_2= ¼ T, παίρνουμε τις μορφές:

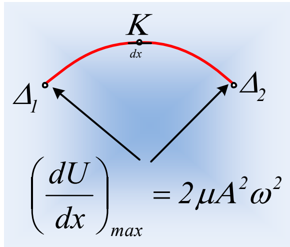


Αξίζει να εστιάσουμε σε κάποιο σημείο και να δούμε τι γίνεται με την πυκνότητα ενέργειας. Ας πάρουμε για παράδειγμα το σημείο x=0. Τη στιγμή t_1=0 η πυκνότητα ενέργειας είναι ίση με $2\mu A^2\omega^2$, ενώ τη στιγμή t_2

είναι μηδενική. Αν πάρουμε δηλαδή μια στοιχειώδη μάζα dm στη θέση αυτή, δεν υπάρχει κάποια διατήρηση ενέργειας και μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική, γι' αυτή τη μάζα!!!

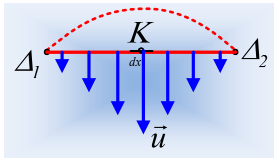
Ας σχολιάσουμε λίγο ακόμη τα ευρήματά μας, αναφερόμενοι σε ένα μήκος χορδής μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών (έστω του 1ου και 2ου), όπως στο σχήμα.

Τη στιγμή t_1= ¾ T, οπότε $\eta\mu^2 2\pi \frac{t}{T} = 1$, όλα τα σημεία της χορδής βρίσκονται σε μέγιστη απομάκρυνση, χωρίς ταχύτητα ταλάντωσης. Συνεπώς σε όποια θέση και αν πάρουμε τις κινητικές ενέργειες, θα βρούμε dK/dx=0, ενώ όσον αφορά τη δυναμική ενέργεια θα έχουμε U_K=0 για ένα στοιχειώδες τμήμα dx στη θέση της κοιλίας, ενώ αντίθετα αυτή θα είναι μέγιστη με τιμή $\left(\frac{dU}{dx}\right)_{max} = 2\mu A^2\omega^2$ για αντίστοιχο στοιχειώδες τμήμα πολύ κοντά στους δύο δεσμούς. Το στοιχειώδες τμήμα dx στη θέση της κοιλίας, δεν έχει παραμόρφωση, οπότε δεν έχει δυναμική ενέργεια, ούτε βέβαια έχει κινητική ενέργεια, αφού βρίσκεται σε θέση πλάτους.



Τι θα συμβεί τη χρονική στιγμή t_2=t_1+ ¼ T=T, τι θα έχουμε;

Όλα τα σημεία θα περνάνε από τη θέση ισορροπίας τους, το καθένα με τη δική του μέγιστη ταχύτητα, όπως φαίνονται στο σχήμα.



Αλλά τότε το στοιχειώδες τμήμα της χορδής, στη θέση της κοιλίας, θα έχει μέγιστη κινητική ενέργεια:

$$dK_1 = 2\mu A^2\omega^2 dx$$

Ενώ παντού η δυναμική ενέργεια είναι μηδενική, αφού η χορδή δεν παρουσιάζει καμιά παραμόρφωση.

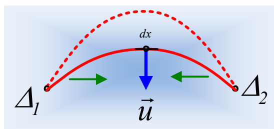
Αντίθετα όσο πλησιάζουμε προς τους δεσμούς η αντίστοιχη κινητική ενέργεια μειώνεται και μηδενίζεται στις θέσεις των δεσμών, οι οποίοι παραμένουν ακίνητοι.

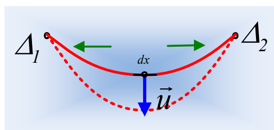
Πού βρήκε την κινητική ενέργεια το τμήμα dx στη θέση της κοιλίας;

Τη στιγμή t_1 δεν είχε ούτε κινητική, ούτε δυναμική ενέργεια, δηλαδή dE_κ=0. Μετά όμως από χρόνο T/4 έχει μέγιστη κινητική ενέργεια.

Δεν ήταν δυναμική ενέργεια που μετετράπει σε κινητική, όπως σε μια ΑΑΤ.

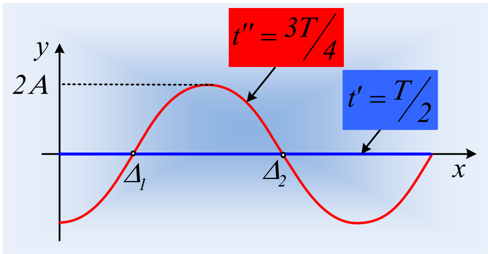
Στο διάστημα της κίνησης της χορδής από ακραία θέση στη θέση ισορροπίας, έχουμε μεταφορά ενέργειας, από τις περιοχές κοντά στους δεσμούς, σε περιοχές κοντά στην κοιλία, όπως στο σχήμα. Ενέργεια διαδίδεται και ταυτόχρονα μετατρέπεται από δυναμική σε κινητική.





Αντίθετα κατά την απομάκρυνση του τμήματος $\Delta_1\Delta_2$ από τη θέση ισορροπίας, συμβαίνει το αντίστροφο. Ενέργεια μεταφέρεται από το μέσον προς τα άκρα και μετατρέπεται από κινητική σε δυναμική.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονισθεί, ότι η παραπάνω ενέργεια δεν μπορεί να «περάσει» από ένα δεσμό, είναι απλά εγκλωβισμένη στο διάστημα μεταξύ δύο δεσμών. Έτσι όταν μιλάμε ότι στο στάσιμο κύμα δεν έχουμε διάδοση ενέργειας, το σωστό θα ήταν να το διατυπώναμε ότι «δεν μπορεί να διαδοθεί ενέργεια μέσω ενός δεσμού».



Πόση είναι η «εγκλωβισμένη ενέργεια» μεταξύ των δεσμών $Δ_1$ και $Δ_2$; Δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε την ολική κινητική ενέργεια που εμφανίζει το τμήμα $Δ_1Δ_2$ τη στιγμή που η χορδή περνά από την οριζόντια θέση και δεν έχουμε καμιά παραμόρφωση του τμήματος αυτού. Τότε είμαστε σίγουροι ότι δεν έχουμε άλλης μορφής ενέργεια… Ας την υπολογίσουμε λοιπόν τη στιγμή t΄= ½ T, όπου $συν 2\pi\left(\frac{t}{T}\right) = -1$:

$$\frac{dK}{dx} = 2\mu A^2\omega^2 \cdot συν^2 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)συν^2 2\pi\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow$$

$$dK = 2\mu A^2\omega^2 \cdot συν^2 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx \rightarrow$$

$$K_{Δ_1Δ_2} = \int_{\lambda/4}^{3\lambda/4} 2\mu A^2\omega^2 \cdot συν^2 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx = 2\mu A^2\omega^2 \int_{\lambda/4}^{3\lambda/4} συν^2 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx \rightarrow$$

Αλλά:

$$I = \int συν^2(ax)dx = \frac{1}{a}\int συν(\alpha x)d(ημ(\alpha x)) = \frac{1}{a}ημ(\alpha x)συν(\alpha x) - \frac{1}{a}\int ημ(\alpha x)d\big(συν(\alpha x)\big) =$$

$$= \frac{1}{a}ημ(\alpha x)συν(\alpha x) + \int ημ^2(\alpha x)dx = \frac{1}{a}ημ(\alpha x)συν(\alpha x) + \int\left(1 - συν^2(\alpha x)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{a}ημ(\alpha x)συν(\alpha x) + x - \int συν^2(\alpha x)dx \rightarrow$$

$$I = \int συν^2(ax)dx = \frac{2\alpha x + ημ(2\alpha x)}{4\alpha}$$

Οπότε παίρνουμε:

$$K_{Δ_1Δ_2} = 2\mu A^2\omega^2 \int_{\lambda/4}^{3\lambda/4} συν^2 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx = 2\mu A^2\omega^2\left[\frac{2\cdot 2\pi\frac{x}{\lambda} + ημ4\pi\frac{x}{\lambda}}{\frac{8\pi}{\lambda}}\right]_{\lambda/4}^{3\lambda/4} \rightarrow$$

$$K_{Δ_1Δ_2} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 \cdot \lambda \quad (3)$$

Βέβαια θα μπορούσε κάποιος να υπολογίσει την ολική ενέργεια του τμήματος $Δ_1Δ_2$ τη χρονική στιγμή που οι ταχύτητες όλως των σημείων του τμήματος είναι μηδενικές, ας πούμε τη στιγμή t΄΄= 3T/4. Τότε:

$$\frac{dU}{dx} = 2\mu A^2\omega^2 \cdot \eta\mu^2 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu^2 2\pi\frac{t}{T} \rightarrow dU = 2\mu A^2\omega^2 \cdot \eta\mu^2 2\pi\frac{x}{\lambda}dx \rightarrow$$

$$U_{Δ_1Δ_2} = \int_{\lambda/4}^{3\lambda/4} 2\mu A^2\omega^2 \cdot \eta\mu^2 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx = 2\mu A^2\omega^2 \int_{\lambda/4}^{3\lambda/4} \eta\mu^2 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx$$

όπου $I_1 = \int \eta\mu^2(ax)dx = \frac{2\alpha x - \eta\mu(2\alpha x)}{4\alpha}$

οπότε ξανά θα είχαμε:

$$U_{Δ_1Δ_2} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 \cdot \lambda \quad (4)$$

Τι μας λένε τα αποτελέσματα (3) και (4); Μα, προφανώς το αυτονόητο! Η ενέργεια του τμήματος $Δ_1Δ_2$ διατηρείται!!!

Και την μεν στιγμή που η χορδή είναι στη θέση ισορροπίας της, όλη η μηχανική ενέργεια εμφανίζεται ως Κινητική, τη δε στιγμή t΄΄=3T/4 ως Δυναμική!

Σχόλια:

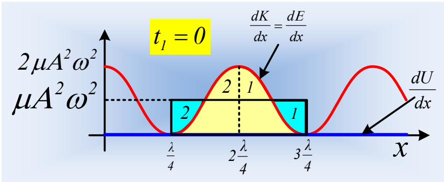
1) Δεν μπορώ να μην επισημάνω ότι θεωρώντας τη χορδή παραμορφωμένη, της αποδώσαμε παραπάνω ενέργεια λόγω παραμόρφωσης. Θεωρήσαμε ότι κάθε στοιχειώδες τμήμα της χορδής έχει λοιπόν κάποια στοιχειώδη ενέργεια λόγω επιμήκυνσης. Την ονομάσαμε δυναμική ενέργεια. Την υπολογίσαμε για μήκος ίσο με λ/2 και την βρήκαμε να έχει τιμή ίση με την συνολική κινητική ενέργεια του τμήματος, τη στιγμή που η χορδή δεν παρουσιάζει παραμόρφωση.

   Τις προηγούμενες ημέρες διατυπώθηκαν σοβαρές αντιρρήσεις για το αν αυτή την ενέργεια πρέπει να την πούμε δυναμική. Για το αν μπορούμε να την αποδώσουμε σε κάθε στοιχειώδες τμήμα ή όχι. Για το αν θα πρέπει να ψάξουμε για κάποια άλλη «κρυμμένη» δυναμική ενέργεια που να συνδέεται με το έργο κάποιας συντηρητικής δύναμης ή με κάποιο συντηρητικό πεδίο και η οποία να μετατρέπεται σε κινητική στη διάρκεια της ταλάντωσης κάποιας σημειακής μάζας της χορδής.

   Νομίζω ότι η παραπάνω ανάλυση δεν αφήνει περιθώρια παρερμηνειών για το ποιες μορφές ενέργειας έχουμε, αλλά και τι μετατροπές εμφανίζονται.

   Το μοντέλο της ΑΑΤ, δεν έχει καμιά δουλειά εδώ…

2) Παραπάνω υπολογίστηκαν οι ενέργειες (Κ και U) μέσω ολοκληρώματος. Ήθελα να εμφανιστώ ότι κινούμαι στον «ορθό δρόμο»!!! Αλλά γνήσιος οπαδός της «σχεδιαστικής σχολής», δεν μπορώ να μην πω, ότι θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την ολική κινητική ενέργεια του τμήματος $Δ_1Δ_2$ με χρήση εμβαδών και τη βοήθεια του διαγράμματος K=f(x).



Το εμβαδόν του κίτρινου χωρίου δίνει τη συνολική ενέργεια, που είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου οπότε:

$$K_{\Delta_1\Delta_2} = \mu A^2\omega^2 \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\lambda$$

dmargaris@gmail.com