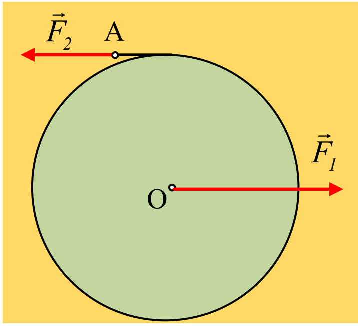
Τα έργα των δυνάμεων και η κινητική ενέργεια



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας ομογενής οριζόντιος δίσκος μάζας 20kg και ακτίνας 0,5m. Τυλίγουμε γύρω του ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα, στο άκρο Α του οποίου τη στιγμή t=0 ασκούμε, μια οριζόντια δύναμη μέτρου F_2=10N, ενώ ταυτόχρονα στο κέντρο του Ο ασκούμε μια αντιπαράλληλη δύναμη μέτρου F_1=16N, όπως στο σχήμα (σε κάτοψη). Διατυπώνονται δύο προτάσεις:

A) Το έργο της δύναμης F_1 μετράει την ενέργεια που μεταφέρεται στο δίσκο και εμφανίζεται με τη μορφή της «μεταφορικής» κινητικής ενέργειας.

B) Το έργο της δύναμης F_2 μπορεί να υπολογιστεί και ως έργο της ροπής F_2.

Για τον έλεγχο της ορθότητας των παραπάνω προτάσεων, ας δούμε τα παρακάτω ερωτήματα:

Για την κίνηση από τη στιγμή t=0 μέχρι τη στιγμή t_1=10s, να υπολογιστούν:

i) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας Ο του δίσκου, καθώς και η γωνιακή του επιτάχυνση.

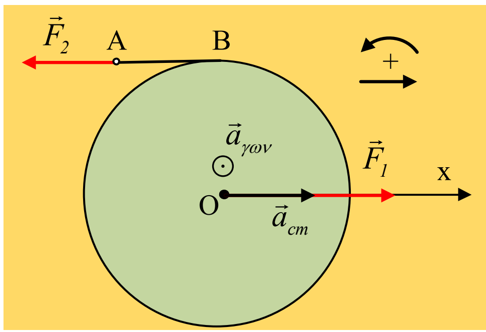
ii) Το έργο της δύναμης F_1 και η αντίστοιχη κινητική ενέργεια, τη στιγμή t_1, η οποία συνδέεται με την μεταφορική κίνηση του δίσκου.

iii) Το έργο της δύναμης F_2 και το αντίστοιχο έργο της ροπής της δύναμης.

iv) Η κινητική ενέργεια του δίσκου τη στιγμή t_1.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς κάθετο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο του Ο, I= ½ mR^2.

Απάντηση:



i) Θεωρούμε την κίνηση του δίσκου, ως σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας Ο. Το επίπεδο είναι λείο, οπότε οι κατακόρυφες δυνάμεις βάρος και κάθετη δύναμη του επιπέδου δίνουν μηδενική συνισταμένη. Έτσι θεωρώντας ότι η δύναμη F_2 μεταφέρεται μέσω του νήματος, στο σημείο Β του δίσκου και δουλεύοντας με τις δύο δυνάμεις που δίνονται, εφαρμόζουμε το 2° νόμο του Νεύτωνα για τις επιμέρους κινήσεις, παίρνοντας:

$$\Sigma F_x = ma_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{F_1 - F_2}{m} = \frac{16N - 10N}{20kg} = 0,3m/s^2.$$

$$\Sigma \tau = I_{cm} a_{γων} \rightarrow F_2 R = \frac{1}{2} mR^2 a_{γων}$$

$$a_{γων} = \frac{2F_2}{mR} = \frac{2 \cdot 10}{20 \cdot 0,5} rad/s^2 = 2rad/s^2.$$

ii) Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα η μεταφορική κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, ενώ η στροφική ομαλά επιταχυνόμενη επίσης, με αποτέλεσμα να ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon=\alpha_{cm}\cdot t \quad (1), \quad \Delta x= ½\, \alpha_{cm}\cdot t^2 \quad (2)$$

$$\omega= \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t \quad (3), \quad \Delta\theta= ½\, \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2 \quad (4)$$

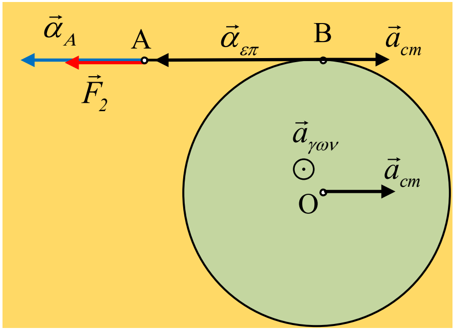
Με αντικατάσταση στις (1) και (2) t=10s βρίσκουμε:

$\upsilon_1 =\upsilon_{cm,1} =\alpha_{cm}\cdot t_1 = 0,3\cdot 10m/s=3m/s$ και $\Delta x=x_1 = ½\, \alpha_{cm}t^2 = ½\, 0,3\cdot 10^2m=15m$, οπότε:

$$K_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm,1}^2 = \frac{1}{2}20\cdot 3^2 J = 90J$$

$$W_{F_1} = F_1 \cdot x_1 = 16\cdot 15J = 240J$$

iii) Το έργο της δύναμης F_2 υπολογίζεται από την εξίσωση:



$$W_{F2}=F_2\cdot\Delta x_A\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Όπου Δx_A η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης, του σημείου Α. Αλλά το σημείο Α έχει την ίδια επιτάχυνση με το σημείο Β του δίσκου, το οποίο έχει μια επιτάχυνση α_{cm} λόγω της μεταφορικής κίνησης του δίσκου και μια επιτρόχια:

$$\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=2\cdot 0,5m/s^2=1m/s^2$$

με κατευθύνσεις όπως στο σχήμα. Έτσι το σημείο Α, σημείο εφαρμογής της δύναμης αποκτά επιτάχυνση της ίδιας κατεύθυνσης με τη δύναμη με μέτρο:

$$\alpha_A=\alpha_B= \alpha_{\varepsilon\pi}-\alpha_{cm}=1m/s^2-0,3m/s^2 = 0,7m/s^2.$$

Αποτέλεσμα είναι η μετατόπιση του Α μέχρι τη στιγμή t_1 να είναι προς τα αριστερά (ίδιας κατεύθυνσης με την επιτάχυνση) με μέτρο $\Delta x_A= ½\, \alpha_A\cdot t^2 = ½\, 0,7\cdot 10^2$m=35m. Με βάση τα αποτελέσματα αυτά έχουμε:

$$W_{F2}=F_2\cdot\Delta x_A=10N\cdot 35m=350J.$$

Ας τονισθεί ότι το παραπάνω έργο της δύναμης, είναι το συνολικό έργο της δύναμης, με βάση τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της, το οποίο εκφράζει την ενέργεια, που με την βοήθεια του νήματος μεταφέρεται στον δίσκο.

Αν τώρα θέλουμε το έργο της ροπής της δύναμης F_2, ως προς το κέντρο Ο, θα έχουμε:

$$W_{\tau 2}=\tau_2\cdot\Delta\theta= F_2R\cdot ½\, \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2=10\cdot 0,5\cdot ½\, 2\cdot 10^2J= 500J$$

iv) Αν λάβουμε υπόψη ότι τη στιγμή t_1 η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου έχει μέτρο:

$$\omega_1=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t_1=2\cdot 10rad/s=20rad/s$$

Η κινητική του ενέργεια του δίσκου είναι ίση:

$$K_\delta = \frac{1}{2} m\upsilon_{cm,1}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega_1^2 = \frac{1}{2} m\upsilon_{cm,1}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} mR^2\omega_1^2$$

$$K_\delta = 90J + \frac{1}{4} 20 \cdot 0{,}5^2 \cdot 20^2 J = 90J + 500J = 590J$$

Σχόλια:

1) Με βάση τις απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα, ας δούμε τώρα τις δύο προτάσεις.

Α) η πρόταση είναι λάθος. Το έργο της δύναμης F_1, μετράει απλά την ενέργεια που μεταφέρεται στον δίσκο μέσω της δύναμης αυτής. Τίποτα περισσότερο. Το έργο της είναι W_{F1}=240J, ενώ η κινητική ενέργεια που μπορεί να αποδοθεί στη μεταφορική κίνηση $K_{μετ}$=90J.

Β) Και αυτή η πρόταση είναι λανθασμένη. Το έργο (ολικό) της δύναμης F_2 είναι W_{F2}=350J, ενώ το έργο της αντίστοιχης ροπής είναι $W_τ$=500J.

Δηλαδή πώς εφαρμόζεται η διατήρησης της ενέργειας;

Ενέργεια μεταφέρουν στον δίσκο οι δυο δυνάμεις. Οι ενέργειες αυτές είναι όσο και τα αντίστοιχα έργα, δηλαδή συνολικά:

$$W_{ολ}=W_{F1}+W_{F2}=240J+350J = 590J$$

Τόση ισούται και η συνολική κινητική ενέργεια του δίσκου που υπολογίσαμε παραπάνω.

2) Βέβαια υπάρχει και ο δρόμος με τις μετατροπές της «μεταφορικής» σε «περιστροφική» κινητική ενέργεια, με την χρήση ψευδοέργου για την δύναμη F_2, που στην παρούσα ανάρτηση, θα προτιμούσα να μην ασχοληθούμε. Αλλά επειδή κάποιος μαθητής μπορεί να αναρωτηθεί γιατί υπολογίσαμε το έργο της ροπής και τι εκφράζει αυτό, ας δούμε μια άλλη εκδοχή της διατήρησης της ενέργειας.

Η δύναμη F_1 προσφέρει στον δίσκο ενέργεια 240J, από αυτά μέσω της δύναμης F_2 η οποία αντιστέκεται στην μεταφορική κίνηση αφαιρούνται τα 150J, με αποτέλεσμα η «μεταφορική» κινητική ενέργεια να είναι ίση με $K_{μετ}$=240J-150J=90J.

Η δύναμη F_2 μεταφέρει ενέργεια 350J συν τα 150J (που αφαίρεσε από την μεταφορική) μας κάνουν τα 500J, όπου μέσω του έργου της ροπής της εμφανίζονται με τη μορφή της «στροφικής» κινητικής ενέργειας.

dmargaris@gmail.com