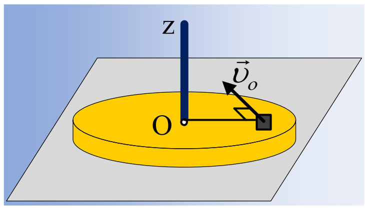
Όταν μαζεύεται το νήμα



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας ομογενής δίσκος, μάζας m=2kg και ακτίνας R=1m, ο οποίος μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο σωλήνα- άξονα z, μικρής ακτίνας, χωρίς τριβές. Στο σωλήνα έχει δεθεί το ένα άκρο αβαρούς νήματος, μήκους ℓ=0,5m, στο άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σώμα Σ, ίσης μάζας m, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο αμελητέων διαστάσεων. Με τεντωμένο το νήμα, κτυπάμε το σώμα προσδίδοντάς του αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0=2,8m/s, κάθετη στο νήμα, όπως στο σχήμα. Μεταξύ σώματος Σ και δίσκου αναπτύσσεται τριβή, ενώ κατά την περιστροφή του σώματος, το νήμα τυλίγεται στο σωλήνα. Μόλις σταματήσει η ολίσθηση του Σ πάνω στο δίσκο, το σύστημα έχει γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω=2rad/s. Ζητούνται:

i) Η αρχική στροφορμή του σώματος Σ, ως προς τον άξονα z καθώς και η τελική ολική στροφορμή του συστήματος, ως προς τον ίδιο άξονα.

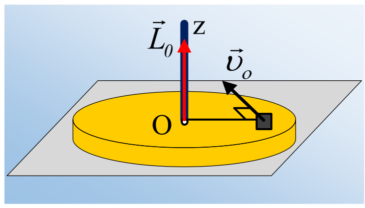
ii) Το μήκος του νήματος που τυλίχθηκε γύρω από τον σωλήνα.

iii) Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας λόγω τριβής.

iv) Κάποια στιγμή t_1 η στροφορμή του Σ, ως προς τον άξονα z, μειώνεται με ρυθμό $0{,}8\,kgm^2/s^2$. Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του δίσκου, ως προς τον άξονα z, την ίδια στιγμή.

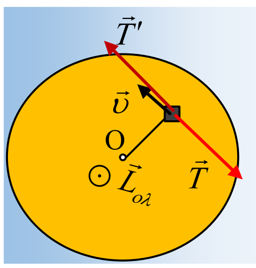
Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του $I=\frac{1}{2}mR^2$, ενώ η ροπή της τάσης του νήματος, ως προς τον άξονα περιστροφής θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση:



i) Μόλις το υλικό σημείο Σ αποκτήσει ταχύτητα υ_o αποκτά και στροφορμή ως προς τον άξονα z, πάνω στον άξονα, με φορά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$L_0=m\upsilon_0 d=m\upsilon_0\ell=2\cdot 2{,}8\cdot 0{,}5kgm^2/s=2{,}8\ kgm^2/s$$



Στη συνέχεια θα ασκηθεί πάνω στο Σ από το δίσκο η τριβή $\vec{T}$, η ροπή της οποίας ως προς τον άξονα z, αφενός θα μειώσει τη στροφορμή του σώματος Σ, αφετέρου η ροπή της αντίδρασής της $\vec{T}'$ θα αυξήσει τη στροφορμή του δίσκου. Αλλά οι δυο παραπάνω ροπές, για το σύστημα των δύο σωμάτων, είναι εσωτερικές με αποτέλεσμα η στροφορμή του συστήματος ως προς τον άξονα z να παραμένει σταθερή, οπότε μόλις σταματήσει η ολίσθηση, η συνολική στροφορμή θα είναι ίση με την αρχική L_0. Έχουμε δηλαδή:

$$L_{ολ.τελ}=L_0=2{,}8\ kgm^2/s$$

ii) Έστω x το μήκος του νήματος, μόλις σταματήσει η σχετική κίνηση του Σ ως προς το δίσκο. Τότε για την συνολική στροφορμή του συστήματος δίσκος-σώμα Σ έχουμε:

$$\vec{L}_{o\lambda} = \vec{L}_{\delta} + \vec{L}_{\Sigma} \rightarrow$$

$$L_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} = I_{cm}\omega + m\upsilon x \rightarrow L_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}mR^2 \cdot \omega + mx^2\omega \rightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{2L_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} - mR^2 \cdot \omega}{2m\omega}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,8 - 2 \cdot 1^2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2}}m \approx 0,45m$$

Οπότε στον άξονα (σωλήνα) τυλίχτηκε νήμα μήκους $\Delta\ell = \ell - x = 0,5m - 0,45m = 0,05m$.

iii) Από την διατήρησης της ενέργειας, θα έχουμε ότι η αρχική κινητική ενέργεια του Σ, εν μέρει μεταφέρεται στο δίσκο, ένα μέρος παραμένει στο σώμα Σ και το υπόλοιπο μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια εξαιτίας της τριβής:

$$K_{\Sigma,0} + K_{\delta,0} = K_{\Sigma,0} + K_{\delta,0} + Q_{\theta} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + 0 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 + Q_{\theta} \rightarrow$$

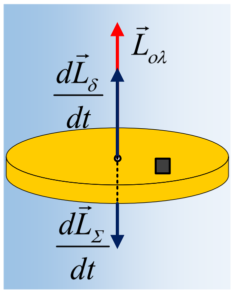
$$Q_{\theta} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega^2 - \frac{1}{2}mx^2\omega^2 = \frac{1}{2}m\left(\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}R^2\omega^2 - x^2\omega^2\right) \rightarrow$$

$$Q_{\theta} = \frac{1}{2}2\left(2,8^2 - \frac{1}{2}1^2 \cdot 2^2 - 0,45^2 \cdot 2^2\right)J = 5J$$

iv) Αφού η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή, ο ρυθμός μεταβολής της, κάθε στιγμή, θα είναι μηδενικός, δηλαδή:

$$\frac{d\vec{L}_{o\lambda}}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{L}_{\Sigma}}{dt} + \frac{d\vec{L}_{\delta}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_{\delta}}{dt} = -\frac{d\vec{L}_{\Sigma}}{dt}$$

Η τελευταία εξίσωση μας λέει ότι οι δυο ρυθμοί μεταβολής της στροφορμής δίσκου και σώματος Σ είναι αντίθετοι. Αλλά μείωση της στροφορμής του Σ, σημαίνει ότι το διάνυσμα $\frac{d\vec{L}_{\Sigma}}{dt}$, έχει αντίθετη φορά από την στροφορμή του (και την ολική στροφορμή), με φορά προς τα κάτω, όπως στο σχήμα, οπότε το διάνυσμα $\frac{d\vec{L}_{\delta}}{dt}$ έχει φορά προς τα πάνω, με το ίδιο μέτρο:



$$\frac{dL_{\delta}}{dt} = 0,8kgm^2 / s^2$$

dmargaris@gmail.com