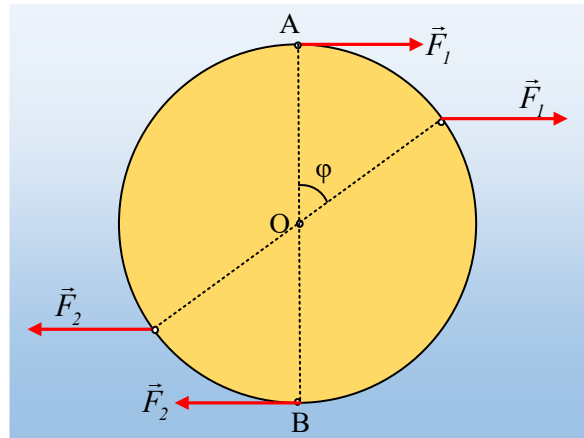


Ένα ζεύγος περιστρέφει έναν δίσκο

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ελεύθερος ένας ομογενής δίσκος μάζας $M=20\text{kg}$ και ακτίνας $R=2\text{m}$. Σε μια στιγμή $t=0$, ασκούμε στα άκρα A και B μιας διαμέτρου του, δύο σταθερές αντίθετες δυνάμεις με μέτρα $F_1=F_2=14\text{N}$, όπως στο σχήμα (σε κάτωψη).



- i) Να υπολογιστεί η αρχική επιτάχυνση του κέντρου O και η αντίστοιχη γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου.

Μετά από λίγο τη στιγμή t_1 ο δίσκος έχει στραφεί κατά γωνία φ (ημ $\varphi=0,8$ και συν $\varphi=0,6$), έχοντας γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=1,5\text{rad/s}$. Για τη στιγμή αυτή:

- ii) Να βρεθεί η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του δίσκου, ως προς κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο του O.
- iii) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του δίσκου και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας.
- iv) Μπορείτε να υπολογίσετε την στιγμιαία ισχύ της δύναμης F_1 στη στιγμή t_1 , χωρίς αναφορά σε ροπή δύναμης ή ροπή ζεύγους δυνάμεων;

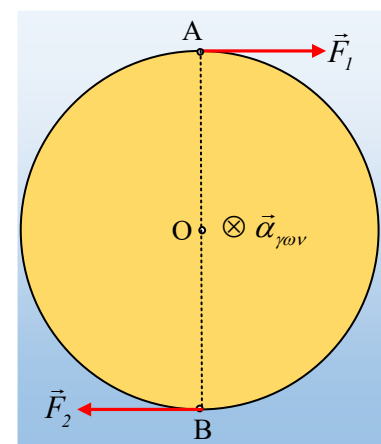
Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του $I = \frac{1}{2} MR^2$.

Απάντηση:

- i) Οι δύο ασκούμενες δυνάμεις, αποτελούν ένα ζεύγος δυνάμεων, το οποίο έχει μηδενική συνισταμένη ενώ έχει ροπή $\tau=FR$, όπου $F=F_1=F_2$. Αλλά τότε η άσκηση των δύο δυνάμεων στο δίσκο, δεν πρόκειται να του προκαλέσει καμιά επιτάχυνση κέντρου μάζας (το κέντρο O του δίσκου θα παραμείνει ακίνητο), ενώ αντίθετα η ροπή του ζεύγους θα του προκαλέσει γωνιακή επιτάχυνση, η οποία θα προκύψει από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση που θα ακολουθήσει (θεωρούμε θετική την δεξιόστροφη ροπή του ζεύγους):

$$\Sigma\tau = I_{cm}\alpha_{γων} \rightarrow F \cdot 2R = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \alpha_{γων}$$

$$\alpha_{γων} = \frac{4F}{MR} = \frac{4 \cdot 14}{20 \cdot 2} \text{rad} / \text{s}^2 = 1,4 \text{rad} / \text{s}^2.$$



Με κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα κάτω (στο σχήμα κάθετη στο επίπεδο με φορά προς τα μέσα).

- ii) Τη στιγμή t_1 ο δίσκος έχει στροφορμή ως προς τον άξονα περιστροφής του, στο O, κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω, με μέτρο:

$$L_I = I_{cm} \omega = \frac{1}{2} MR^2 \omega = \frac{1}{2} 20 \cdot 2^2 \cdot 1,5 \text{ kgm}^2 / \text{s} = 60 \text{ kgm}^2 / \text{s}.$$

Ενώ ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, ως προς τον ίδιο άξονα, έχει την ίδια κατεύθυνση και μέτρο:

$$\frac{dL_I}{dt} = \Sigma \tau = Fd = F \cdot 2R \cdot \sigma \nu \nu \varphi \rightarrow$$

$$\frac{dL_I}{dt} = 14 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,6 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2 = 33,6 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2.$$

- iii) Η κινητική ενέργεια του δίσκου τη στιγμή t_1 είναι ίση:

$$K_I = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 = \frac{1}{4} MR^2 \omega^2$$

$$K_I = \frac{1}{4} 20 \cdot 2^2 \cdot 1,5^2 \text{ J} = 45 \text{ J}$$

Εξάλλου ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου, είναι ίσος με το ρυθμό με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια στο δίσκο μέσω του έργου της ροπής του ζεύγους:

$$\frac{dK_I}{dt} = \frac{dW_\tau}{dt} = P_\tau = \tau \cdot \omega = (F \cdot 2R \cdot \sigma \nu \nu \varphi) \cdot \omega = 14 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,6 \cdot 1,5 \text{ J} / \text{s} = 50,4 \text{ J} / \text{s}$$

- iv) Παραπάνω υπολογίσαμε την ισχύ του ζεύγους από την εξίσωση $P = \tau \cdot \omega$, αδιαφορώντας για το ρόλο κάθε δύναμης. Όμως το έργο ροπής προκύπτει από το έργο δύναμης, δεν είναι κάποιο «νέο είδος» έργου! Για να το διαπιστώσουμε, ας εστιάσουμε στο ρόλο της δύναμης F_1 η οποία τη στιγμή t_1 ασκείται στο σημείο A, το οποίο έχει ταχύτητα v_A , όπως στο σχήμα. Για την ισχύ της δύναμης F_1 έχουμε:

$$P_I = \frac{dW_{F_1}}{dt} = \frac{F_1 ds \cdot \sigma \nu \nu \alpha}{dt} = F_1 \frac{ds}{dt} \cdot \sigma \nu \nu \alpha = F_1 \cdot v_A \cdot \sigma \nu \nu \alpha = F_1 \cdot \omega R \cdot \sigma \nu \nu \alpha$$

Όπου α η γωνία μεταξύ δύναμης και ταχύτητας, όπου στην περίπτωσή μας έχουμε $\alpha = \varphi$ (δυνάμεις με κάθετες πλευρές), οπότε με αντικατάσταση:

$$P_I = F_1 \cdot \omega R \cdot \sigma \nu \nu \alpha = 14 \cdot 1,5 \cdot 2 \cdot 0,6 \text{ W} = 25,2 \text{ W}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η ισχύς αυτή, είναι η μισή της ισχύος τους ζεύγους (η άλλη μισή είναι η ισχύς της F_2).

