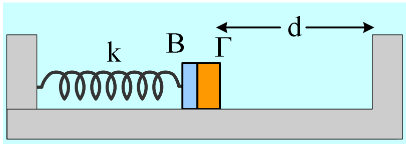
Ταλάντωση και δυο ελαστικές κρούσεις.



Τα σώματα Β και Γ, τα οποία θεωρούμε υλικά σημεία, αμελητέων διαστάσεων, με μάζες m_1=1kg και m_2=3kg ηρεμούν σε επαφή σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ενώ το Β είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=400N/m, όπως στο σχήμα. Μετακινούμε τα σώματα προς τα αριστερά, συμπιέζοντας το ελατήριο κατά 0,4m και τη στιγμή t_0=0, αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα να κινηθεί.

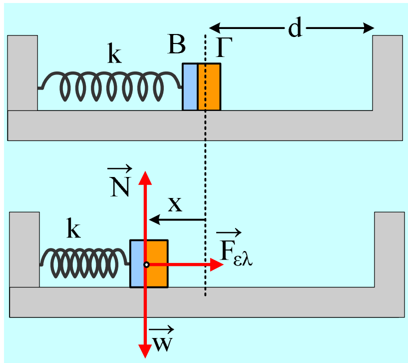
i) Ποια η αρχική επιτάχυνση που θα αποκτήσουν τα σώματα και ποιο το μέτρο της δύναμης που ασκεί το Β στο Γ σώμα;

ii) Ποια χρονική στιγμή τα δυο σώματα θα χάσουν την επαφή;

iii) Το σώμα Γ αφού συγκρουστεί ελαστικά με τον κατακόρυφο τοίχο, ξανασυγκρούεται ελαστικά με το σώμα Α τη στιγμή t_2= 3π/20s. Ποια η αρχική απόσταση d του σώματος Γ από τον τοίχο;

iv) Να παρασταθεί γραφικά η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Β σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη χρονική στιγμή t_3=π/5s.

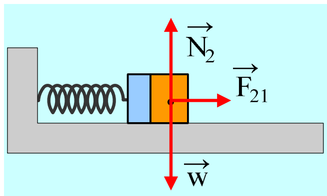
Απάντηση:



i) Στο σχήμα έχει σχεδιαστεί η δύναμη που δέχεται το σύστημα των δύο σωμάτων από το ελατήριο, όπου x η απομάκρυνση από την αρχική θέση ισορροπίας, η οποία είναι και η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που θα επακολουθήσει. Από τον 2^o νόμο του Νεύτωνα, για x=Δℓ έχουμε: $\Sigma F_x=(m_1+m_2).\alpha \rightarrow$

$$a=\frac{k\Delta\ell}{m_1+m_2}=\frac{400\cdot 0{,}4}{1+3}m/s^2=40m/s^2$$

Αλλά τότε για το σώμα Γ $F_{21}=m_2\cdot\alpha$=120Ν, με φορά προς τα δεξιά.



ii) Η δύναμη που επιταχύνει το σώμα Γ προς τα δεξιά, είναι η δύναμη F_{21} από το σώμα Β. Όταν το σύστημα φτάσει στην θέση ισορροπίας, μηδενίζεται η επιτάχυνση, συνεπώς και η παραπάνω δύναμη και τα σώματα θα χάσουν την επαφή. Από κει και πέρα, το σώμα Γ θα κινηθεί με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2=\upsilon_{max}=\omega_1\cdot A_1=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}A_1=\sqrt{\frac{400}{4}}0{,}4m=4\,m/s$, ενώ το Β θα ξεκινήσει μια νέα ταλάντωση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Τα δυο σώματα φτάνουν στην θέση ισορροπίας τη στιγμή:

$$t_1=\tfrac{1}{4}\,T_1=\frac{1}{4}2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1+3}{400}}s=\frac{\pi}{20}s$$

iii) Αφού τα σώματα αποχωριστούν, το Α εκτελεί μια νέα ταλάντωση, με περίοδο:

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{1}{400}}=\frac{\pi}{10}s$$

και πλάτος $\upsilon_{max}=\omega_2\cdot A_2 \rightarrow \quad A_2=\dfrac{\upsilon_{max}}{\sqrt{\dfrac{k}{m_1}}}=\dfrac{4}{20}=0{,}2m$

Αλλά τότε τη στιγμή $t_2=\dfrac{3\pi}{20}s=t_1+T_2$, το σώμα Β βρίσκεται στη θέση ισορροπίας (θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου) κινούμενο προς τα δεξιά με ταχύτητα υ_1=4m/s. Στο μεταξύ το Γ σώμα, έχει φτάσει στον τοίχο, ανακλάται, με ταχύτητα ίσου μέτρου (ελαστική κρούση σώματος με άλλο ακίνητο πολύ μεγάλης μάζας) και επιστρέφοντας συγκρούεται ελαστικά με το Β σώμα. Συνεπώς σε χρονικό διάστημα $t'=T_2$ έχει διανύσει απόσταση s=2d, κινούμενο με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2=\upsilon_{max}$=4 m/s. Αλλά τότε:

$$2d=\upsilon_2\cdot t' \rightarrow d=½\,\upsilon_2 t'=½\,4\cdot\frac{\pi}{10}m=0{,}2\pi\ m\approx 0{,}628\text{m}$$

iv) Από 0- $t_1=\dfrac{\pi}{20}s$ η ενέργεια ταλάντωσης του Β σώματος είναι σταθερή και ίση:

$$E_1=\frac{1}{2}D_1A_1^2=\frac{1}{2}m_1\omega_1^2A_1^2=\frac{1}{2}m_1\frac{k}{m_1+m_2}A_1^2=\frac{1}{2}1\cdot100\cdot0{,}4^2\,J=8J$$

Από $\dfrac{\pi}{20}s-\dfrac{3\pi}{20}s$ το Β σώμα έχει ενέργεια ταλάντωσης:

$$E_1=\frac{1}{2}kA_2^2=\frac{1}{2}400\cdot0{,}2^2\,J=8J$$

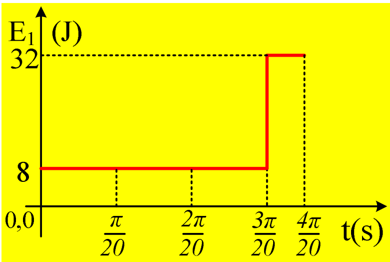
Εξάλλου η ταχύτητα του Β σώματος (με θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά), μετά την ελαστική του κρούση με το σώμα Γ είναι ίση:

$$\upsilon_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2=\frac{1-3}{1+3}4m/s+\frac{2\cdot3}{1+3}(-4)m/s=-8m/s.$$

Αλλά, επειδή αυτή είναι η θέση ισορροπίας της νέας ταλάντωσης που θα εκτελέσει, τότε η ενέργεια ταλάντωσης θα είναι:

$$E_1=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2=\frac{1}{2}1\cdot8^2\,J=32J$$

Συνεπώς η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



Σχόλιο.

Υπολογίζοντας την ταχύτητα του Γ σώματος μετά την κρούση του με το Β βρίσκουμε:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2 = \frac{2\cdot 1}{1+3}4m/s + \frac{3-1}{1+3}(-4) = 0$$

Το σώμα δηλαδή Γ θα σταματήσει στη θέση ισορροπίας.

Κατά συνέπεια το Β, εκτελώντας μισή ταλάντωση προς τα αριστερά, σε χρονικό διάστημα Δt= ½ $T_2=\frac{\pi}{20}s$,

θα ξανασυγκρουστεί με το Γ, τη στιγμή $t_3 = \frac{\pi}{5}s = \frac{4\pi}{20}s$.

Παρατηρείστε ότι, για να απομακρύνουμε το σύστημα αρχικά προς τα αριστερά προσφέραμε ενέργεια:

$$E = \frac{1}{2}k\left(\Delta\ell\right)^2 = \frac{1}{2}400\cdot 0{,}4^2\,J = 32J$$

Αυτή είναι η συνολική αρχική ενέργεια ταλάντωσης (και των δύο σωμάτων) και είναι επίσης η ενέργεια ταλάντωσης του πρώτου σώματος στο χρονικό διάστημα $\frac{3\pi}{20}$s έως $\frac{4\pi}{20}s$, όπου το δεύτερο σώμα είναι ακίνητο.

Η ενέργεια ταλάντωσης του Β σώματος κατά την αρχική ταλάντωση του συστήματος, δεν είναι ½ kA_1^2, αυτή είναι η ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος. Η ενέργεια του Β είναι ½ $D_1A_1^2$=8J, η οποία τη στιγμή που φτάνει στη θέση ισορροπίας, είναι μόνο κινητική. Αυτή η ενέργεια, είναι και η ενέργεια της νέας ταλάντωσης που θα επακολουθήσει, πράγμα που σημαίνει ότι ο παραπάνω υπολογισμός δεν ήταν και τόσο απαραίτητος….

dmargaris@sch.gr