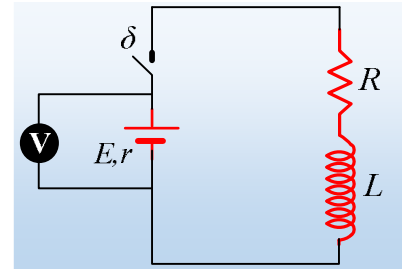


Η αυτεπαγωγή και η ισχύς

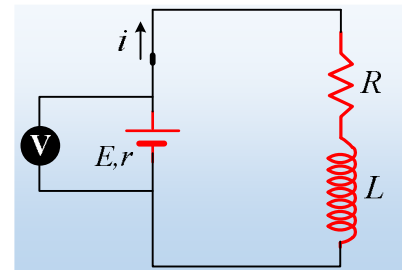
Δίνεται το διπλανό κύκλωμα όπου ο αντιστάτης έχει αντίσταση $R=3\Omega$ και το ιδανικό πηνίο αυτεπαγωγή $L=0,4H$. Με τον διακόπτη δ ανοικτό, το ιδανικό βολτόμετρο δείχνει ένδειξη $V_o=20V$. Κλείνουμε το διακόπτη με αποτέλεσμα η τελική ένδειξη του βολτομέτρου να σταθεροποιείται στην τιμή $V_\tau=12V$.



- i) Σε ποια τιμή σταθεροποιείται η τάση στα άκρα του αντιστάτη και στα άκρα του πηνίου;
- ii) Να υπολογιστεί η εσωτερική αντίσταση της πηγής και η ενέργεια που τελικά αποθηκεύεται στο πηνίο.
- iii) Να κάνετε ένα ποιοτικό διάγραμμα της ισχύος που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα, σε συνάρτηση με το χρόνο.
- iv) Σε μια στιγμή t_1 η πηγή μεταφέρει στο κύκλωμα ενέργεια με ρυθμό $40J/s$. Τι ποσοστό της παραπάνω ενέργειας αποθηκεύεται την στιγμή αυτή στο πηνίο;
- v) Να αποδείξετε ότι τη στιγμή t_1 η ισχύς που αποθηκεύεται στο πηνίο, είναι η μέγιστη δυνατή.

Απάντηση:

- i) Μόλις σταθεροποιηθεί η ένταση του ρεύματος, πράγμα που σημαίνει ότι δεν εμφανίζεται πια φαινόμενο αυτεπαγωγής, η τάση στα άκρα του πηνίου μηδενίζεται ($E_{\text{αυτ}}=0$), ενώ η τάση στα άκρα του αντιστάτη γίνεται ίση με την ένδειξη του βολτομέτρου, δηλαδή $V_R=12V$.
- ii) Από τον νόμο του Ohm για τον αντιστάτη, βρίσκουμε την ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει, μετά την σταθεροποίηση της έντασης:



$$I_o = \frac{V_R}{R} = \frac{12V}{3\Omega} = 4A$$

Ενώ την ίδια στιγμή για την **πολική τάση** της πηγής ισχύει:

$$V_\pi = V_v = E - I_o r \rightarrow r = \frac{E - V_v}{I_o} = \frac{20 - 12}{4} \Omega = 2\Omega$$

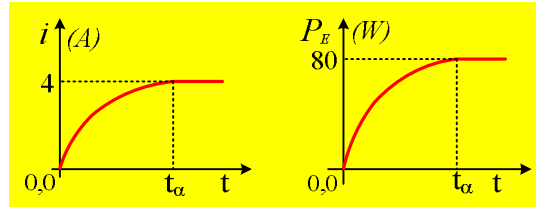
Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου που αποθηκεύεται τότε στο πηνίο είναι ίση:

$$U_{\text{max}} = \frac{1}{2} L I_o^2 = \frac{1}{2} 0,4 \cdot 4^2 J = 3,2J .$$

- iii) Η ισχύς της πηγής, δίνεται από την εξίσωση:

$$P_E = E \cdot i$$

Όπου i η ένταση του ρεύματος που την διαρρέει. Αλλά τότε η γραφική της παράσταση σε συνάρτηση με τον χρόνο, θα έχει την ίδια μορφή με το διάγραμμα $i=f(t)$, όπως φαίνεται στα διαγράμματα.



iv) Την στιγμή t_1 το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης i_1 , όπου:

$$P_{L,E} = E \cdot i_1 \rightarrow i_1 = \frac{P_{L,E}}{E} = \frac{40W}{20V} = 2A$$

Την ίδια στιγμή παράγεται θερμότητα στο κύκλωμα και η αντίστοιχη ισχύς είναι ίση:

$$P_Q = i_1^2 (R + r) = 2^2 (3 + 2)W = 20W$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το 50% της παρεχόμενης από την πηγή ισχύος, μετατρέπεται σε θερμότητα στον αντιστάτη και στην εσωτερική αντίσταση της πηγής, συνεπώς το υπόλοιπο 50% αποθηκεύεται στο πηνίο με την μορφή ενέργειας μαγνητικού πεδίου, αφού με βάση την διατήρησης της ενέργειας, η ισχύς που παρέχει η πηγή κατά ένα μέρος μετατρέπεται σε θερμότητα (φαινόμενο Joule) και το υπόλοιπο αποθηκεύεται στο πηνίο, δηλαδή:

$$P_E = P_Q + P_L \quad (1)$$

v) Η παραπάνω εξίσωση (1) γράφεται:

$$Ei = i^2 (R + r) + P_L \rightarrow$$

$$i^2 (R + r) - Ei + P_L = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού, με παράμετρο την ισχύ που αποθηκεύεται στο πηνίο, η οποία (εξίσωση) πρέπει να έχει πραγματικές ρίζες, συνεπώς διακρίνουσα μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν:

$$\Delta \geq 0 \rightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0 \rightarrow$$

$$E^2 - 4 \cdot (R + r) \cdot P_L \geq 0 \rightarrow$$

$$P_L \leq \frac{E^2}{4 \cdot (R + r)} \rightarrow P_L \leq \frac{20^2}{4 \cdot (3 + 2)} \rightarrow P_L \leq 20W$$

Άρα η μέγιστη ισχύς που αποθηκεύεται στο πηνίο είναι $P_{L,max} = 20W$ και η ισχύς αυτή εμφανίζεται όταν:

$$i = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-E}{2(R+r)} = \frac{E}{2(R+r)} = \frac{20}{2(3+2)} A = 2A = i_1$$