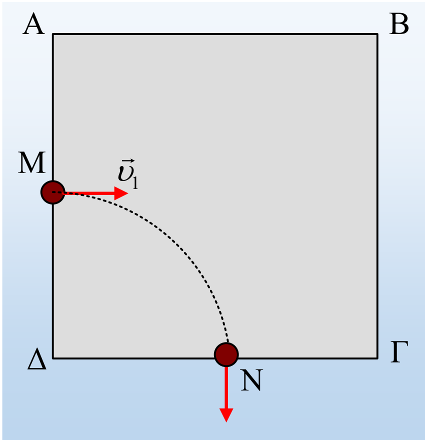
Είσοδος και έξοδος σε ομογενές μαγνητικό πεδίο

Στο σχήμα βλέπουμε την τετράγωνη τομή ΑΒΓΔ ενός κατακόρυφου ομογενούς μαγνητικού πεδίου, πλευράς α=0,4m. Ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας $m=10^{-12}$ kg και φορτίου q=0,01μC κινείται οριζόντια και εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο από το μέσον Μ της πλευράς ΑΔ, κάθετα στην ΑΔ.



i) Αν το σωματίδιο έχει ταχύτητα υ_1=40m/s και εξέρχεται από το πεδίο από ένα σημείο Ν της πλευράς ΓΔ, κάθετα στην ΓΔ, να βρεθεί:

α) Η απόσταση (ΔΝ)

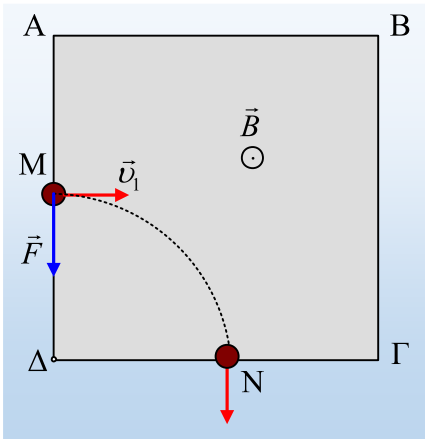
β) η ένταση του μαγνητικού πεδίου.

ii) Αν το σωματίδιο έμπαινε στο πεδίο με ταχύτητα υ_2=20m/s, να υπολογιστεί ο χρόνος κίνησής του μέσα στο πεδίο.

iii) Με ποια ταχύτητα θα πρέπει να κινείται το σωματίδιο, αν θέλουμε να εξέλθει από το πεδίο, από την κορυφή Γ του τετραγώνου;

iv) Να υπολογισθεί η μεταβολή της κινητικής ενέργειας και της ορμής του σωματιδίου στην τελευταία περίπτωση, κατά το πέρασμα του από το πεδίο.

Απάντηση:



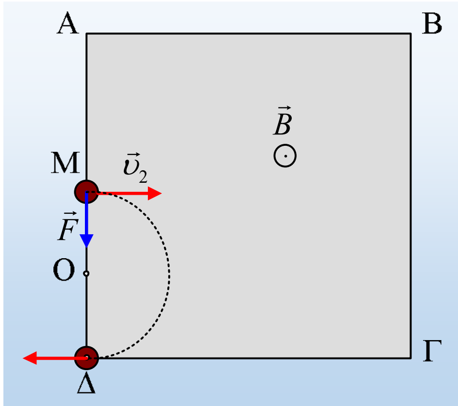
i) Στη διάρκεια της κίνησης μέσα στο πεδίο, το σωματίδιο διαγράφει κυκλική τροχιά. Αλλά τότε σε κάθε σημείο αυτής της τροχιάς η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη, συνεπώς κάθετη στην ακτίνα του κύκλου.

α) Αν φέρουμε λοιπόν κάθετες στην ταχύτητα στα σημεία Μ και Ν, θα έχουμε βρει τις ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται οι δυο ακτίνες και στο σημείο τομής τους θα βρίσκεται το κέντρο του κύκλου. Είναι φανερό, ότι το κοινό σημείο στην περίπτωσή μας είναι η κορυφή Δ, που είναι και το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Αλλά τότε (ΜΔ)=(ΔΝ)=R_1=0,2m.

β) Αν το σωματίδιο εκτρέπεται προς τα κάτω, όπως στο σχήμα, σημαίνει ότι το σωματίδιο δέχτηκε δύναμη Lorentz, κάθετη στην ταχύτητα, με κατεύθυνση προς την κορυφή Δ. Αλλά τότε με βάση τον κανόνα των τριών δακτύλων βρίσκουμε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι κατακόρυφο με φορά προς τα πάνω (προς τον αναγνώστη στο σχήμα σε κάτοψη). Για την παραπάνω ακτίνα έχουμε:

$$R_1 = \frac{m\upsilon_1}{qB} \rightarrow B = \frac{m\upsilon_1}{qR_1} = \frac{10^{-12}\cdot 40}{10^{-8}\cdot 0,2}T = 0,02T$$

ii) Αν το σωματίδιο έμπαινε στο πεδίο με ταχύτητα υ_2=20m/s= ½ υ_1, θα διέγραφε κύκλο με την μισή ακτίνα, σε σχέση με το i) ερώτημα. Πράγματι για την νέα ακτίνα θα έχουμε:

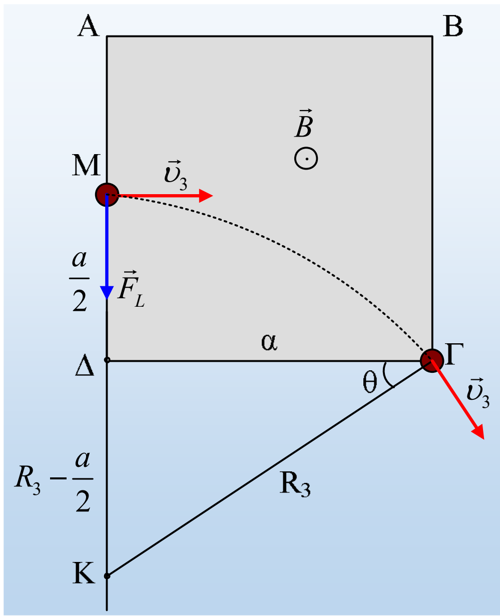


$$R_2 = \frac{m\upsilon_2}{qB} = \frac{10^{-12}\cdot 20}{10^{-8}\cdot 0,02}m = 0,1m$$

Ενώ το κέντρο της κυκλικής τροχιάς θα βρίσκεται πάνω στην ΜΔ, αφού προς το κέντρο κατευθύνεται η δύναμη Lorentz που δέχεται το σωματίδιο στο σημείο Μ. Δηλαδή αν Ο το κέντρο του κύκλου, τότε (ΜΟ)=R_2=0,1m. Αλλά τότε το Ο είναι το μέσον της ΜΔ και το σωματίδιο διαγράφει ημικύκλιο, όπως στο σχήμα. Συνεπώς ο χρόνος κίνησής του μέσα στο πεδίο είναι ίσος με μισή περίοδο:

$$t_2 = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi m}{qB} = \frac{\pi\cdot 10^{-12}}{10^{-8}\cdot 0,02}s = \frac{\pi}{200}s$$

iii) Με την ίδια λογική το κέντρο Κ του νέου κύκλου θα βρίσκεται στην προέκταση της ΜΔ, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε, αφού (ΜΚ)=(ΚΓ)=R_3, από το Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΔΓ θα πάρουμε:



$$R_3^2 = a^2 + \left(R_3 - \frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow$$

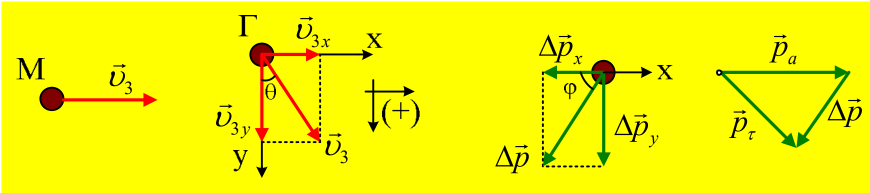
$$R_3^2 = a^2 + R_3^2 - aR_3 + \frac{a^2}{4} \rightarrow$$

$$R_3 = \frac{5}{4}a = 0,5m$$

Έτσι για την αντίστοιχη ταχύτητα υ_3 θα έχουμε:

$$R_3 = \frac{m\upsilon_3}{qB} \rightarrow \upsilon_3 = \frac{R_3 qB}{m} = \frac{0,5\cdot 10^{-8}\cdot 0,02}{10^{-12}}m/s = 100m/s$$

iv) Κατά την κίνηση του σωματιδίου από το Μ στην κορυφή Γ, η δύναμη από το μαγνητικό πεδίο, είναι κάθετη στην ταχύτητα, **σε κάθε θέση**, συνεπώς δεν παράγει έργο και η κινητική ενέργεια δεν μεταβάλλεται. Αντίθετα η ορμή, σαν διάνυσμα που είναι μεταβάλλεται, αφού μεταβάλλεται η διεύθυνση της ταχύτητας. Μπορούμε λοιπόν να δουλέψουμε με δύο ορθογώνιους άξονες x και y, όπου ο x να ταυτίζεται με την ορμή στο σημείο εισόδου Μ και με προσανατολισμό όπως δείχνεται στο σχήμα, λαμβάνοντας υπόψη ότι η γωνία θ που σχηματίζει η ταχύτητα εξόδου με τον άξονα y, είναι ίση με την γωνία ΔΓΚ, στο προηγούμενο σχήμα (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές).



Αλλά τότε με βάση τα τρία πρώτα από τα παραπάνω σχήματα, θα έχουμε:

$$\Delta p_x = p_{\Gamma x} - p_{Mx} = m\upsilon_3 \cdot \eta\mu\theta - m\upsilon_3 = m\upsilon_3 \cdot (\eta\mu\theta - 1) \quad (1)$$
$$\Delta p_y = p_{\Gamma y} - p_{My} = m\upsilon_3 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - 0 \quad (2)$$

Όμως από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΔΓ παίρνουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{R_3 - \frac{a}{2}}{R_3} = \frac{0,5 - 0,2}{0,5} = 0,6 \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu\theta = \frac{\alpha}{R_3} = \frac{0,4}{0,5} = 0,8$$

Και με αντικατάσταση στις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\Delta p_x = m\upsilon_3 \cdot (\eta\mu\theta - 1) = 10^{-12} \cdot 100 \cdot (0,6 - 1) kgm/s = -4 \times 10^{-11} kgm/s$$
$$\Delta p_y = m\upsilon_3 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 10^{-12} \cdot 100 \cdot 0,8 kgm/s = 8 \times 10^{-11} kgm/s.$$

Οπότε για την συνολική μεταβολή της ορμής του σωματιδίου, με βάση το τρίτο σχήμα, θα έχουμε:

$$\Delta p = \sqrt{(\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2} = \sqrt{(4 \times 10^{-11})^2 + (8 \times 10^{-11})^2} kgm/s = \sqrt{80 \times 10^{-22}} kgm/s \rightarrow$$
$$\Delta p \approx 9 \times 10^{-11} kgm/s$$

Ενώ η διεύθυνση του διανύσματος $\Delta\vec{p}$ σχηματίζει με την αρχική διεύθυνση της ταχύτητας υ_3 γωνία π-φ, όπου:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{|\Delta p_y|}{|\Delta p_x|} = \frac{8 \times 10^{-11}}{4 \times 10^{-11}} = 2$$

Σχόλιο:

Κάποιος θα μπορούσε να υπολογίσει την μεταβολή της ορμής, με βάση το τελευταίο από τα παραπάνω σχήματα, δουλεύοντας διανυσματικά, αφού $\Delta\vec{p} = \vec{p}_\tau - \vec{p}_\alpha$ …

dmargaris@gmail.com