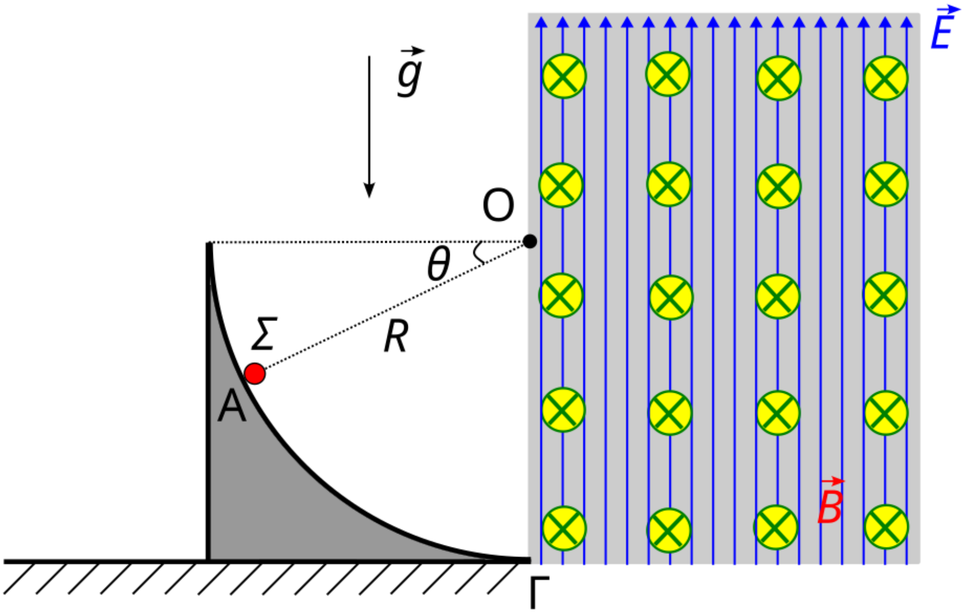
Από το τεταρτοκύκλιο στο σύνθετο πεδίο

Ένα φορτισμένο σφαιρίδιο Σ αμελητέων διαστάσεων έχει μάζα $m = 4mg$ και φορτίο $q = +20\mu C$. Το σφαιρίδιο τοποθετείται πάνω σε ένα λείο κατακόρυφο τεταρτοκύκλιο ακτίνας $R = 1{,}25m$ το οποίο είναι στερεωμένο στο έδαφος, όπως στο σχήμα. Κάποια στιγμή, το σφαιρίδιο απελευθερώνεται από ένα σημείο Α του τεταρτοκυκλίου, όπου η επιβατική ακτίνα ΟΑ σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια, τέτοια ώστε $\eta\mu\theta = 0{,}36$.

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10m/s^2$.



Α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σφαιριδίου στη βάση Γ του τεταρτοκυκλίου.

Στη συνέχεια, με την ταχύτητα που απέκτησε το σφαιρίδιο στο σημείο Γ, εισέρχεται σε περιοχή όπου συνυπάρχουν (μαζί και με το βαρυτικό) ένα κατακόρυφο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης μέτρου $E = 2N/C$ και φοράς προς τα πάνω, και ένα οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B = 1T$ και φοράς από τον αναγνώστη προς τη σελίδα. Το σύνθετο αυτό πεδίο περιορίζεται δεξιότερα της κατακορύφου ΟΓ.

Β. Να περιγράψετε το είδος της κίνησης που θα εκτελέσει το σφαιρίδιο εντός του σύνθετου πεδίου.

Γ. Να προσδιορίσετε το σημείο εξόδου του σωματιδίου από το σύνθετο αυτό πεδίο, καθώς και τον χρόνο παραμονής του εντός αυτού.

Δ. Να υπολογίσετε τη μεταβολή του μέτρου της ορμής και το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σωματιδίου, μεταξύ των σημείων εισόδου και εξόδου.

Ε. Να επαληθεύσετε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας στην κίνηση του σωματιδίου εντός του σύνθετου πεδίου και μεταξύ των σημείων εισόδου και εξόδου από αυτό.

Επαναλαμβάνουμε αρκετές φορές την προηγούμενη διαδικασία, απελευθερώνοντας το σφαιρίδιο από διαφορετικά σημεία του τεταρτοκυκλίου κάθε φορά, αλλάζοντας με τον τρόπο αυτό το μέτρο της γωνίας θ του σχήματος.

ΣΤ. Να αναφέρετε ποιοτικά, πώς θα τροποποιηθούν οι απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα **Α.** έως και **Δ.**, τόσο στην περίπτωση που αυξάνουμε το μέτρο της γωνίας θ, όσο και στην περίπτωση που το μειώνουμε.

Απάντηση

Α. Επειδή το τεταρτοκύκλιο είναι λείο, η μηχανική ενέργεια του σφαιριδίου διατηρείται κατά την κίνησή του σε αυτό. Με εφαρμογή της Α.Δ.Μ.Ε. μεταξύ των θέσεων Α και Γ και με επίπεδο μηδενικής βαρυτική δυναμικής ενέργειας το έδαφος, έχουμε:

$$K_A + U_{\beta\alpha\rho,A} = K_\Gamma + U_{\beta\alpha\rho,\Gamma} \Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2 + 0 \Rightarrow$$

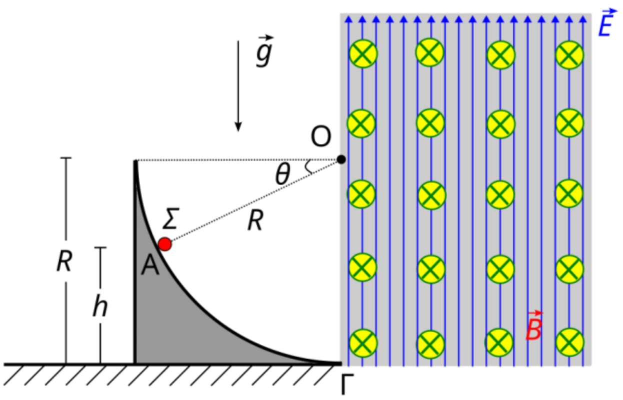
$$\Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

όπου με βάση και το σχήμα,

$$h = R - R\eta\mu\theta = R(1-\eta\mu\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 1{,}25 \cdot (1 - 0{,}36)m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 1{,}25 \cdot 0{,}64m = 0{,}8m.$$



Επομένως, η ζητούμενη ταχύτητα είναι οριζόντια και σύμφωνα με τη σχέση (1) έχει μέτρο

$$\upsilon_\Gamma = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}8}m/s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_\Gamma = 4m/s}$$

Β. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το φορτισμένο σφαιρίδιο εισέρχεται με ταχύτητα κάθετη τόσο στο ομογενές μαγνητικό πεδίο, όσο και στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο της διάταξης. Επομένως, εκτός από το βάρος, δέχεται μία δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο και μία δύναμη από το μαγνητικό πεδίο (δύναμη Lorentz).

Επειδή το σφαιρίδιο είναι θετικά φορτισμένο, η $\vec{F}_{\eta\lambda}$ είναι ομόρροπη της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου (δηλαδή κατακόρυφη και με φορά προς τα πάνω) και έχει μέτρο

$$F_{\eta\lambda} = Eq = 2N/C \cdot 20 \cdot 10^{-6}C = 4 \cdot 10^{-5}N$$

Όμως, το βάρος του σφαιριδίου ισούται με

$$w = mg = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 10N = 4 \cdot 10^{-5}N = F_{\eta\lambda}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι

$$\vec{F}_{\eta\lambda} = -\vec{w}$$

Δηλαδή, η δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο εξουδετερώνει το βάρος του σφαιριδίου.

Έτσι, η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σφαιρίδιο κατά την κίνησή του στο σύνθετο πεδίο ισούται με τη δύναμη Lorentz. Άρα,

$$\Sigma F = F_L = B\upsilon_\Gamma q = 1T \cdot 4m/s \cdot 20 \cdot 10^{-6}C = 8 \cdot 10^{-5}N$$

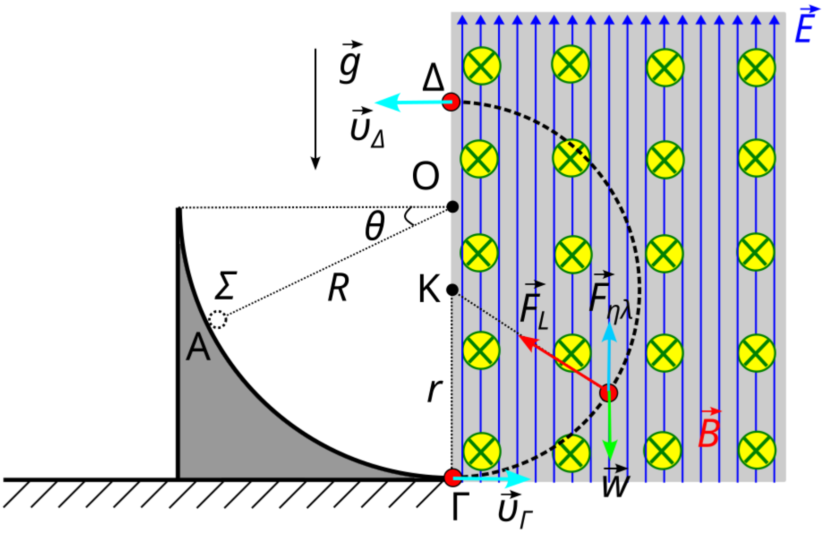
Η δύναμη αυτή είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα του σφαιριδίου και με φορά που προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Έτσι, το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου δεν αλλάζει κατά την κίνησή του στο σύνθετο πεδίο και <u>το σώμα Σ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση εντός αυτού</u> με τη δύναμη Lorentz να έχει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

Γ. Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που θα διαγράψει το σφαιρίδιο, είναι ίση με:

$$r = \frac{m\upsilon_\Gamma}{Bq} \Rightarrow r = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 4}{1 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} m \Rightarrow r = 0{,}8m$$

Και η περίοδος της ομαλής κυκλικής κίνησης θα ισούται με:

$$T = \frac{2\pi m}{Bq} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} s \Rightarrow T = 0{,}4\pi s$$



Σύμφωνα με τα παραπάνω, και με τη βοήθεια του σχήματος, το σφαιρίδιο θα εξέλθει από ένα σημείο Δ του σύνθετου πεδίου στην κατακόρυφο ΟΓ (το κέντρο Κ της κυκλικής του τροχιάς βρίσκεται στην κατακόρυφο ΟΓ), το οποίο θα απέχει

$$d = (\Delta\Gamma) = 2r = 1{,}6m$$

από το Γ και θα κινηθεί εντός αυτού για χρονικό διάστημα

$$\boxed{\Delta t = \frac{T}{2} = 0{,}2\pi s = \frac{\pi}{5} s}$$

διαγράφοντας ημικύκλιο.

Δ. Επειδή το σφαιρίδιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση εντός του σύνθετου πεδίου, το μέτρο της ταχύτητάς εξόδου του από αυτό είναι ίσο με το αντίστοιχο μέτρο της ταχύτητας εισόδου σε αυτό και το σφαιρίδιο εξέρχεται με αντίθετη ταχύτητα από αυτή στην είσοδο ($\vec{v}_\Delta = -\vec{v}_\Gamma$). Επομένως

Μεταβολή του μέτρου της ορμής

$$\Delta|\vec{p}| = |\vec{p}_\Delta| - |\vec{p}_\Gamma| = |\vec{p}_\Gamma| - |\vec{p}_\Gamma| \Longrightarrow \boxed{\Delta|\vec{p}| = 0}$$

Μέτρο της μεταβολής της ορμής

$$|\Delta\vec{p}| = |\vec{p}_\Delta - \vec{p}_\Gamma| = |-\vec{p}_\Gamma - \vec{p}_\Gamma| = |-2\vec{p}_\Gamma| = 2mv_\Gamma \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |\Delta\vec{p}| = 2 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 4kg \cdot m/s \Longrightarrow \boxed{|\Delta\vec{p}| = 32 \cdot 10^{-6} kg \cdot m/s}$$

Ε. Το σφαιρίδιο εντός του σύνθετου πεδίου δέχεται τρεις δυνάμεις (το βάρος, τη δύναμη Lorentz και τη δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο). Για να επαληθεύσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σφαιρίδιο μεταξύ των θέσεων Γ και Δ, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\Delta K = \Sigma W \Longrightarrow K_\Delta - K_\Gamma = W_{\vec{w}} + W_{\vec{F}_L} + W_{\vec{F}_{\eta\lambda}} \quad (2)$$

Επειδή το σφαιρίδιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, ισχύει ότι $K_\Delta = K_\Gamma$ (διατηρεί σταθερή την κινητική του ενέργεια). Δηλαδή, αρκεί να αποδείξουμε ότι το δεξιό μέλος της σχέσης (2) ισούται με μηδέν.

Η δύναμη Lorentz είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα του σφαιριδίου, επομένως δεν παράγει έργο. Δηλαδή, $W_{\vec{F}_L} = 0$.

Τόσο το βάρος, όσο και η δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο είναι σταθερές δυνάμεις. Επομένως, για το παραγόμενο από αυτές τις δυνάμεις έργο θα χρειαστούμε τη μετατόπιση του σφαιριδίου στη διεύθυνσή τους. Επειδή αυτές οι δυνάμεις είναι κατακόρυφες οι μετατόπιση που θέλουμε ισούται με $\Delta y = d = 2r = 1{,}6m$.

Επομένως

$$W_{\vec{w}} = mg \cdot d \cdot \sigma\upsilon\nu 180° = -4 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 1{,}6J = -64 \cdot 10^{-6} J$$

Και

$$W_{\vec{F}_{\eta\lambda}} = F_{\eta\lambda} \cdot d \cdot \sigma\upsilon\nu 0° = 4 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}6J = 64 \cdot 10^{-6} J$$

Παρατηρούμε ότι $W_{\vec{w}} + W_{\vec{F}_{\eta\lambda}} = 0$. Επομένως, το δεξί μέλος της (2) ισούται με μηδέν. Έτσι, επαληθεύσαμε το Θ.Μ.Κ.Ε. στην κίνηση αυτή.

Σχόλιο: Η επαλήθευση θα μπορούσε να γίνει και με τη σχέση

$$\Delta K = \Sigma W = W_{\Sigma F}$$

Όπου εδώ $\Sigma F = F_L$, η οποία δεν παράγει έργο.

ΣΤ. Αλλάζοντας το μέτρο της γωνίας θ, αλλάζει το ύψος από το οποίο απελευθερώνεται το σφαιρίδιο, με αποτέλεσμα (σύμφωνα και με την Α.Δ.Μ.Ε.) να αλλάζει και η ταχύτητα που αποκτά το σφαιρίδιο στο σημείο Γ.

Αυξάνοντας το μέτρο της γωνίας θ

1. Η ταχύτητα με την οποία το σφαιρίδιο φθάνει στο Γ θα είναι μικρότερη.
2. Επειδή πάλι το βάρος και η δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι αντίθετες δυνάμεις, το σφαιρίδιο θα εκτελέσει ομαλή κυκλική κίνηση στο σύνθετο πεδίο.
3. Επειδή η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι ανάλογη της ταχύτητας, το σφαιρίδιο θα εξέλθει του πεδίου από χαμηλότερο σημείο.
4. Επειδή η περίοδος της κυκλικής κίνησης είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας του σφαιριδίου, συμπεραίνουμε ότι ο χρόνος κίνησης του σφαιριδίου θα παραμείνει ο ίδιος.
5. Η μεταβολή του μέτρου της ορμής θα παραμείνει μηδενική.
6. Επειδή το μέτρο της ορμής του σφαιριδίου θα μειωθεί, συμπεραίνουμε ότι θα μειωθεί και το μέτρο της μεταβολής της ορμής του.

Μειώνοντας το μέτρο της γωνίας θ

1. Η ταχύτητα με την οποία το σφαιρίδιο φθάνει στο Γ θα είναι μεγαλύτερη.
2. Επειδή πάλι το βάρος και η δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι αντίθετες δυνάμεις, το σφαιρίδιο θα εκτελέσει ομαλή κυκλική κίνηση στο σύνθετο πεδίο.
3. Επειδή η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι ανάλογη της ταχύτητας, το σφαιρίδιο θα εξέλθει του πεδίου από υψηλότερο σημείο.
4. Επειδή η περίοδος της κυκλικής κίνησης είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας του σφαιριδίου, συμπεραίνουμε ότι ο χρόνος κίνησης του σφαιριδίου θα παραμείνει ο ίδιος.
5. Η μεταβολή του μέτρου της ορμής θα παραμείνει μηδενική.
6. Επειδή το μέτρο της ορμής του σφαιριδίου θα αυξηθεί, συμπεραίνουμε ότι θα αυξηθεί και το μέτρο της μεταβολής της ορμής του.

Παρατήρηση: *Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων εισόδου και εξόδου είναι ίση με* $V_{\Gamma\Delta} = Ed = 2 \cdot 1{,}6V = 3{,}2V$.

Επομένως, το έργο της δύναμης του ηλεκτρικού πεδίου μέχρι την έξοδο του σφαιριδίου είναι ίσο με $W_{\vec{F}_{\eta\lambda}} = qV_{\Gamma\Delta} = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}2J = 64 \cdot 10^{-6}J$

Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com