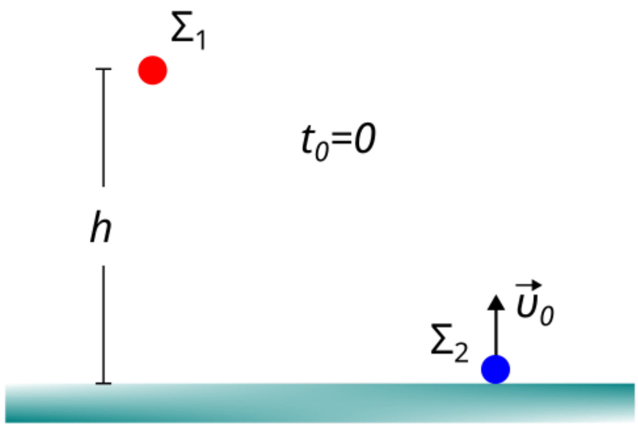
Στην ελεύθερη πτώση μέσω των τύπων Vieta

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνουμε από ύψος h πάνω από το έδαφος ένα σώμα Σ1 αμελητέων διαστάσεων να εκτελέσει ελεύθερη πτώση σε τόπο όπου το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας ισούται με g. Την ίδια στιγμή, εκτοξεύουμε κατακόρυφα προς τα επάνω ένα δεύτερο σώμα Σ2 αμελητέων διαστάσεων με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 2\sqrt{gh}$ και διεύθυνση διαφορετική από τη διεύθυνση κίνησης του σώματος Σ1. Το σώμα Σ1 φθάνει στο έδαφος τη χρονική στιγμή t_1, ενώ το σώμα Σ2 βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος τις χρονικές στιγμές t_2 και t_3. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και για τα δύο σώματα.



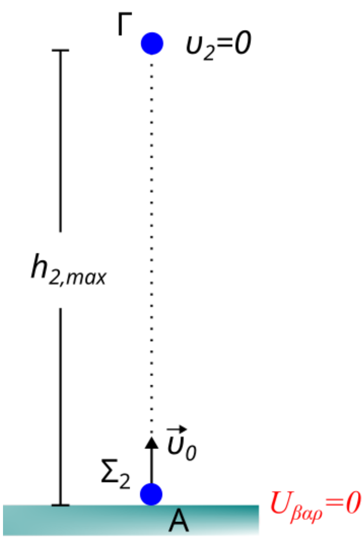
Α. Να προσδιορίσετε το μέγιστο ύψος από το έδαφος στο οποίο θα βρεθεί το σώμα Σ2.

Β. Να αποδείξετε ότι $t_1 = \sqrt{t_2 \cdot t_3}$.

Απάντηση

Α. Η κίνηση που θα εκτελέσει το σώμα Σ2 είναι μία κατακόρυφη βολή. Επειδή η μόνη δύναμη που του ασκείται τόσο κατά τη φάση της ανόδου όσο και κατά τη φάση της καθόδου είναι το βάρος του (συντηρητική δύναμη), συμπεραίνουμε ότι η μηχανική του ενέργεια διατηρείται.

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Μ.Ε μεταξύ της αρχικής του θέσης Α και της θέσης Γ στην οποία έχει μηδενίσει στιγμιαία την ταχύτητά του φθάνοντας στο μέγιστο ύψος, έχουμε (ορίζουμε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το έδαφος):



$$E_{\mu\eta\chi,A} = E_{\mu\eta\chi,\Gamma} \Rightarrow K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_2\upsilon_0^2 + 0 = 0 + m_2 g h_{2,max} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot gh = gh_{2,max} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h_{2,max} = 2h}$$

Β. Θεωρώντας ως $y_2 = 0$ την αρχική θέση του σώματος Σ2 τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και θετική φορά την προς τα επάνω, η εξίσωση κίνησής του (τόσο κατά την άνοδο, όσο και κατά την κάθοδο) είναι η:

$$y_2 = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

Επειδή το σώμα Σ_1 εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h, αντιλαμβανόμαστε ότι φθάνει στο έδαφος τη χρονική στιγμή

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2)$$

Το σώμα Σ_2 φθάνει σε μέγιστο ύψος $h_{2,max} = 2h > h$. Άρα, οι χρονικές στιγμές κατά τις οποίες βρίσκεται σε ύψος h πάνω από το έδαφος (μία κατά την άνοδο και μία κατά την κάθοδο), θα είναι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$y_2 = h \overset{(1)}{\Rightarrow} \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = h \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 - \upsilon_0 t + h = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - \frac{2\upsilon_0}{g}t + \frac{2h}{g} = 0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) έχει δύο ρίζες άνισες[1]. Αυτές είναι οι χρονικές στιγμές t_2 και t_3 αντίστοιχα.

Από τους τύπους Vieta, για το γινόμενο των ριζών αυτών θα έχουμε ότι

$$P = t_2 \cdot t_3 = \frac{2h}{g} \overset{(2)}{\Rightarrow} t_2 \cdot t_3 = t_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 = \sqrt{t_2 \cdot t_3}}$$

Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com

[1] Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα. Συγκεκριμένα ισχύει ότι

$$\varDelta = \frac{4\upsilon_0^2}{g^2} - 4 \cdot \frac{2h}{g} = \frac{4 \cdot 4gh}{g^2} - \frac{8h}{g} = \frac{16h}{g} - \frac{8h}{g} = \frac{8h}{g} > 0$$