

Σώμα μάζας m εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση, χωρίς αρχική φάση, με σταθερά επαναφοράς D , περίοδο T και πλάτος A . Να βρεθεί το έργο της συνισταμένης δύναμης (ΣF) από την χρονική στιγμή $t_1 = 3T/8$ έως την χρονική στιγμή $t_2 = 5T/12$.

Λ Υ Σ Η

1^{ος} τρόπος

$$v_1 = \omega A \sin(\omega t_1) = \omega A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \frac{3T}{8}\right) = \omega A \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \omega A \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\oplus} -\omega A \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow v_1 = -\omega A \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_2 = \omega A \sin(\omega t_2) = \omega A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \frac{5T}{12}\right) = \omega A \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \omega A \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \xrightarrow{\oplus} -\omega A \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow v_2 = -\omega A \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ΘΜΚΕ: $\Delta K = W_{\Sigma F} \Rightarrow W_{\Sigma F} = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m (-\omega A \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - \frac{1}{2} m (-\omega A \frac{\sqrt{2}}{2})^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow W_{\Sigma F} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \frac{3}{4} - \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \frac{2}{4} \xrightarrow{D=m\omega^2} \frac{3}{8} DA^2 - \frac{2}{8} DA^2 \Rightarrow W_{\Sigma F} = \frac{1}{8} DA^2$$

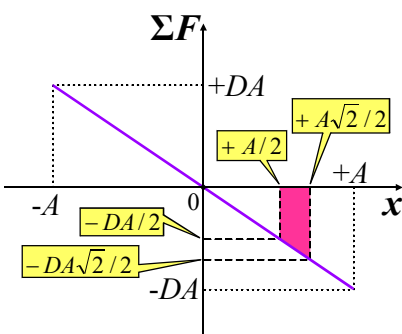
2^{ος} τρόπος

$$x_1 = A \eta\mu(\omega t_1) = A \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} \frac{3T}{8}\right) = A \eta\mu\left(\frac{3\pi}{4}\right) = A \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\oplus} A \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x_1 = A \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = A \eta\mu(\omega t_2) = A \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} \frac{5T}{12}\right) = A \eta\mu\left(\frac{5\pi}{6}\right) = A \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \xrightarrow{\oplus} A \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x_2 = A \frac{1}{2}$$

Αφού η συνισταμένη δύναμη ($\Sigma F = -Dx$) μεταβάλλεται με την απομάκρυνση x , θα βρούμε το έργο της από το εμβαδόν του διαγράμματος $\Sigma F(x)$:

$$x_1 = +A \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \Sigma F_1 = -Dx_1 = -DA \frac{\sqrt{2}}{2} \quad / \quad x_2 = +A \frac{1}{2} \Rightarrow \Sigma F_2 = -Dx_2 = -\frac{DA}{2}$$



$$W_{\Sigma F} = E\mu\beta = \frac{[\beta + B]Y}{2} = \frac{\left[(-\frac{DA}{2}) + (-\frac{DA\sqrt{2}}{2})\right] \left(\frac{A\sqrt{2}}{2} - \frac{A}{2}\right)}{2} =$$

$$= \frac{\left[-\frac{DA}{2} - \frac{DA\sqrt{2}}{2}\right] \frac{A}{2} (\sqrt{2} - 1)}{2} = \frac{-\frac{DA}{2} (1 + \sqrt{2}) \frac{A}{2} (\sqrt{2} - 1)}{2} =$$

$$= -\frac{DA^2}{8} (\sqrt{2}^2 - 1^2) = -\frac{DA^2}{8} (2 - 1) \Rightarrow W_{\Sigma F} = -\frac{1}{8} DA^2$$

● Παρατηρούμε ότι με τους δύο τρόπους, έχουμε την ίδια ποσότητα ($DA^2/8$) για το έργο, αλλά με διαφορετικό πρόσημο. Ποιο από τα δύο πρόσημα είναι το σωστό και που οφείλεται το λάθος;

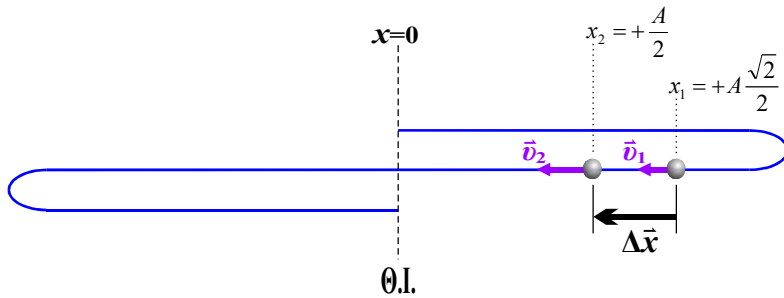
● Ας δούμε, αρχικά, ποιο είναι το σωστό πρόσημο:

- ▶ Όπως φαίνεται από το διπλανό σχήμα, η μετατόπιση του σώματος είναι προς τ' αριστερά, δηλαδή δείχνει προς τη Θ.Ι.
- ▶ Η συνισταμένη δύναμη ($\Sigma\vec{F}$) δείχνει πάντα προς την Θ.Ι.
- ▶ Επομένως:

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 : \text{προς την } \Theta.I.$$

$$\Sigma\vec{F} : \text{πάντα προς την } \Theta.I.$$

$$\Sigma\vec{F} \uparrow \uparrow \Delta\vec{x} \Rightarrow W_{\Sigma F} > 0$$



● Άρα το σωστό πρόσημο για το έργο είναι το θετικό, δηλαδή ο πρώτος τρόπος είναι ο σωστός και το έργο είναι:

$$W_{\Sigma F} = +\frac{1}{8} DA^2$$

▶ Που έγινε, λοιπόν, το λάθος στον δεύτερο τρόπο:

Αυτό που παραλείψαμε ήταν ότι και το ύψος του τραπεζιού (όπως και οι δύο του βάσεις) είναι αρνητικό, αφού εκφράζει την μετατόπιση του σώματος:

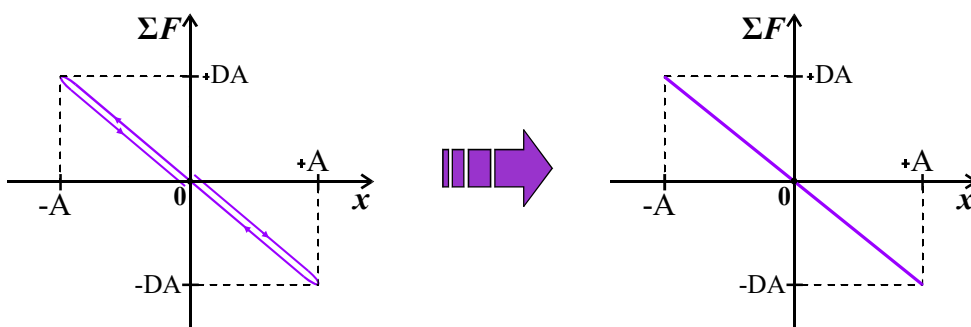
$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{A}{2} - \frac{A\sqrt{2}}{2} = \frac{A}{2}(1 - \sqrt{2}) < 0$$

$$\begin{aligned} W_{\Sigma F} &= E\mu\beta = \frac{[\beta + B]Y}{2} = \frac{\left[-\frac{DA}{2} - \frac{DA\sqrt{2}}{2}\right] \frac{A}{2}(1 - \sqrt{2})}{2} = \\ &= \frac{-\frac{DA}{2}(1 + \sqrt{2}) \frac{A}{2}(1 - \sqrt{2})}{2} = -\frac{DA^2}{8}(1^2 - \sqrt{2}^2) = \\ &= -\frac{DA^2}{8}(1 - 2) \Rightarrow W_{\Sigma F} = +\frac{1}{8} DA^2 \end{aligned}$$

$Y : \frac{A}{2}(1 - \sqrt{2})$
 $\beta : -\frac{DA}{2}$
 $B : -\frac{DA\sqrt{2}}{2}$



ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η γραφική παράσταση $\Sigma F(x)$ αποτελείται από δύο διαγώνιες γραμμές, η μια πάνω στην άλλη, που διαγράφονται με αντίθετες φορές. Η φορά διαγραφής των γραμμών ακολουθεί τη φορά κίνησης του σώματος, χωρίς αρχική φάση, δηλαδή: $0 \rightarrow +A \rightarrow 0 \rightarrow -A \rightarrow 0$



Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μια μετατόπιση Δx να είναι θετική ή αρνητική, είτε βρίσκεται στο $0 \dots +A$, είτε στο $-A \dots 0$.

Για καλύτερη κατανόηση της διπλής γραμμής της $\Sigma F(x)$ κάντε κλικ στον παρακάτω σύνδεσμο:

https://static.wixstatic.com/media/2f1a14_1ab11f04caa24eeca5d010406f7999d-mv2.gif



Επιμέλεια: Αναστάσιος Νέζης
<http://nezistasos.wixsite.com/nezistasos>
nezistasos@gmail.com