ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

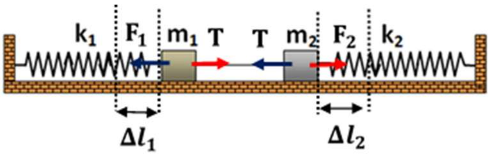
ΘΕΜΑ Α

Α1. (β) Α2. (α) Α3. (α) Α4. (β)

Α5. α. (Λ) β. (Σ) γ. (Λ) δ. (Σ) ε. (Σ)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση το: (α)



Από την ισορροπία:

(m_1): $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 = T \Rightarrow k_1 \Delta l_1 = T \Rightarrow k_1 A_1 = T$ (1)

(m_2): $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_2 = T \Rightarrow k_2 \Delta l_2 = T \Rightarrow k_2 A_2 = T$ (2)

Από τις (1) και (2) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{k_2}{k_1}$

Για τις ενέργειες ισχύει:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}k_1 A_1^2 = \frac{1}{2}k_2 A_2^2 \Rightarrow k_1 \frac{{k_2}^2}{{k_1}^2} A_2^2 = k_2 A_2^2 \Rightarrow k_1 = k_2$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}}} = \sqrt{\frac{m_1 k_2}{m_2 k_1}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2}$$

Αν (Δt) το χρονικό διάστημα των (N) ταλαντώσεων ισχύει:

$$N' = \frac{\Delta t}{T_1} = \frac{N T_2}{T_1} = \frac{2 N T_1}{T_1} \Rightarrow \boxed{N' = 2N}$$

Β2. Σωστή απάντηση το: (β)

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Μ.Ε. για τις κινήσεις των σωμάτων από την αρχική τους θέση μέχρι τα νήματα να γίνουν κατακόρυφα παίρνουμε:

$$|\upsilon_1| = |\upsilon_2| = \sqrt{2gL} \quad (1)$$

Τα σώματα εκτελούν κυκλική κίνηση οπότε από την κεντρομόλο δύναμη θα έχουμε:

$$T - mg = \frac{m\upsilon^2}{L} \Rightarrow T = mg + \frac{m\upsilon^2}{L} \quad (2)$$

επειδή οι τάσεις των νημάτων πριν και μετά την κρούση είναι ίσες, λόγω της σχέσης (2) θα είναι ίσα και τα μέτρα των ταχυτήτων πριν και μετά την κρούση, δηλαδή θα ισχύει:

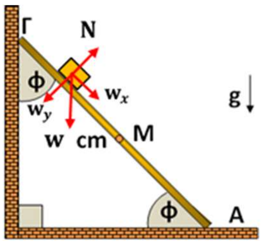
$$\vec{\upsilon}_1' = -\vec{\upsilon}_1 \text{ και } \vec{\upsilon}_2' = -\vec{\upsilon}_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \vec{\upsilon}_1' = \vec{\upsilon}_2 \text{ και } \vec{\upsilon}_2' = \vec{\upsilon}_1$$

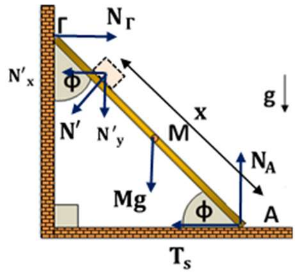
Παρατηρούμε ότι κατά την κεντρική ελαστική κρούση τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες με συνέπεια για τις μάζες των σωμάτων να ισχύει:

$$\boxed{m_1 = m_2}$$

Β3. Σωστή απάντηση το: (α)

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα μάζας (m) και στη ράβδο μάζας (M) φαίνονται στα διπλανά σχήματα.





Για το σώμα μάζας (m):

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w_y \Rightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Για την ράβδο μάζας (M) έχουμε για τα μέτρα των δυνάμεων:

$$N' = N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Για τις συνιστώσες θα έχουμε:

$$N'_x = N'\eta\mu\varphi = mg\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\eta\mu\varphi \Rightarrow N'_x = \frac{mg}{2} \quad \text{και}$$

$$N'_y = N'\sigma\upsilon\nu\varphi = mg\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow N'_y = \frac{mg}{2}$$

Από την ισορροπία της ράβδου:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_A = N'_y + Mg \Rightarrow N_A = \frac{mg}{2} + Mg \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_s + N'_x = N_Γ \Rightarrow T_s = N_Γ - \frac{mg}{2} \quad (2)$$

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow N'x + Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi - N_Γ L\eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow N_Γ L\eta\mu\varphi = mg\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot x + Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$$

$$N_Γ = mg\frac{x}{L} + \frac{Mg}{2} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$T_s = N_Γ - \frac{mg}{2} \Rightarrow T_s = mg\frac{x}{L} + \frac{Mg}{2} - \frac{mg}{2} \xRightarrow{x=L} T_{s,max} = \frac{mg}{2} + \frac{Mg}{2}$$

Για να μην έχουμε ολίσθηση θα πρέπει να ισχύει:

$$T_{s,max} \le \mu N_A \Rightarrow \frac{mg}{2} + \frac{Mg}{2} \le \frac{2}{3}\left(\frac{mg}{2} + Mg\right) \Rightarrow \frac{mg}{2} + \frac{Mg}{2} \le \frac{mg}{3} + \frac{2}{3}Mg \Rightarrow \frac{m}{6} \le \frac{M}{6} \Rightarrow m \le M \Rightarrow$$

$$\boxed{m_{max} = M}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για να συγκρουστούν τα δυο σώματα θα πρέπει η οριζόντια μετατόπιση τους να είναι ίση, αφού αρχικά βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο, με αποτέλεσμα οι ταχύτητες στον άξονα (x) να είναι ίσες, δηλαδή:

$$\upsilon_2 = \upsilon_1\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \upsilon_2 = 5\cdot 0{,}8 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\upsilon_2 = 4\ m/s}}$$

Γ2. Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. στον άξονα (x):

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Rightarrow \vec{p}_{1,x} + \vec{p_2} = \vec{p_\Sigma} \Rightarrow p_{1,x} + p_2 = p_\Sigma \Rightarrow m_1\upsilon_{1,x} + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)V$$

$$\Rightarrow 4m_1 + 4m_2 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = 4\ m/s$$

Για την μεταβολή της ορμής του σώματος μάζας (m_2) έχουμε:

$$\overrightarrow{\Delta p_2} = \overrightarrow{p'_{2,}} - \overrightarrow{p_2} \Rightarrow \Delta p_2 = m_2V - m_2\upsilon_2 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\Delta p_2 = 0}}$$

Γ3. Το σώμα μάζας (m_2) πριν και μετά την κρούση έχει την ίδια ταχύτητα με αποτέλεσμα να μην έχουμε μεταβολή της κινητικής του ενέργειας.
Επομένως η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος θα είναι:

$$\Delta K = \Delta K_1 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_{1,x}^2 - \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 = \frac{1}{2} 0{,}2 \cdot 4^2 - \frac{1}{2} 0{,}2 \cdot 5^2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{\Delta K = -0,9J}}$$

Γ4. Από την επιβραδυνόμενη κίνηση έχουμε:

$$\Delta x_{stop} = \frac{V^2}{2\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{V^2}{2\Delta x_{stop}} \Rightarrow \alpha = \frac{4^2}{2 \cdot 16} \Rightarrow \alpha = 0{,}5 \text{ m/s}^2 \ \text{ και}$$

$$0 = V - \alpha \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{V}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\mathbf{\Delta t = 8\ s}}$$

Γ5. Η κινητική του ενέργεια θα είναι:

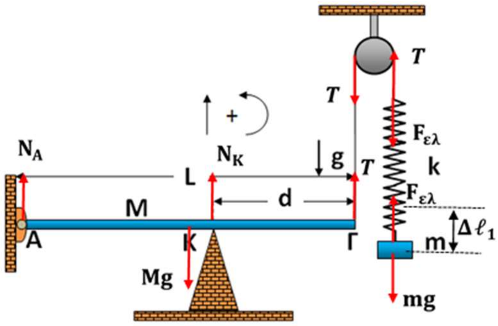
$$K_1' = \frac{1}{4} K_1$$

Θ.Μ.Κ.Ε. για τις δυο περιπτώσεις:

$$\Delta K_1 = W_T \Rightarrow -K_1 = -T\Delta x \ \text{ και}$$

$$\Delta K_1' = W_T \Rightarrow K_1' - K_1 = -T\Delta x' \Rightarrow -\frac{3}{4} K_1 = -T\Delta x' \Rightarrow \Delta x' = \frac{3}{4} \Delta x \Rightarrow \boxed{\mathbf{\Delta x' = 12m}}$$

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Από την ισορροπία του σώματος (m) είναι:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = mg \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 10N$$

Για τα μέτρα των δυνάμεων ισχύει:

$$T = F_{\varepsilon\lambda} = 10N$$

Ισορροπία της ράβδου:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_A + N_K + T = Mg \Rightarrow 2N_K = Mg - T \Rightarrow$$

$$N_K = 15N$$

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow N_K(L - d) + TL - Mg\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow 15(1{,}2 - d) + 10 \cdot 1{,}2 - 40\frac{1{,}2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{d = 0,4m}}$$

Δ2. Για την ενέργεια της α.α.τ. ισχύει:

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow 100A^2 = 100(0{,}05)^2 + \frac{1}{2}\left(0{,}5\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{A = 0,1m}}$$

Δ3. α) Στην θέση ισορροπίας του σώματος μάζας (m) έχουμε:

$$F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta l_1 \Rightarrow \Delta l_1 = 0{,}1\text{m}$$

Η ανώτερη θέση της ταλάντωσης του σώματος συμπίπτει με το φυσικό μήκος του ελατηρίου οπότε:

$$T = F_{\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{T = 0}}$$

β) Στην κατώτερη θέση είναι:

$$F_{\varepsilon\lambda} = k(\Delta l_1 + A) \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 20\text{N} \;\; \text{και} \; T = 20\text{N}$$

Από την ισορροπία της ράβδου:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow N_K(L - d) + TL - Mg\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow N_K(L - d) = Mg\frac{L}{2} - TL \Rightarrow$$

$$0{,}8N_K = 40 \cdot 0{,}6 - 24 \Rightarrow \boxed{\mathbf{N_K = 0}}$$

Δ4. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος θα είναι:

$$\left|\frac{dK}{dt}\right| = |\Sigma F||\upsilon| = k|x||\upsilon| \quad (1)$$

Από την ισορροπία της ράβδου:

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \Rightarrow T'd + Mg\left(\frac{L}{2} - d\right) - N_A(L - d) = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow T' = 4\text{N}$$

$$F'_{\varepsilon\lambda} = T' \Rightarrow k\Delta l_2 = T' \Rightarrow \Delta l_2 = 0{,}04\text{m}$$

το μέτρο της απομάκρυνσης θα είναι:

$$|x| = \Delta l_1 - \Delta l_2 = 0{,}06\text{m}$$

το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης είναι:

$$|\upsilon| = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2} = \sqrt{100}\sqrt{0{,}1^2 - 0{,}06^2} \Rightarrow |\upsilon| = 0{,}8 \text{ m/s}$$

Τελικά από τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$\left|\frac{dK}{dt}\right| = 100 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}8 \Rightarrow \boxed{\left|\frac{\mathbf{dK}}{\mathbf{dt}}\right| = \mathbf{4{,}8 \text{ J/s}}}$$