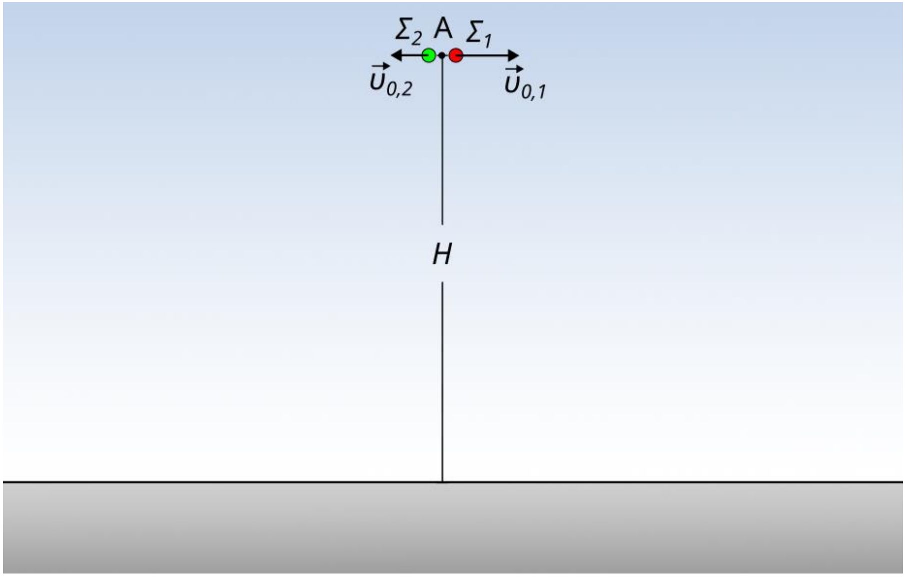
Οριζόντια βολή και κάθετες ορμές

Τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ του σχήματος έχουν μάζες $m_1 = 0,5kg$ και $m_2 = 2kg$ αντίστοιχα και αμελητέες διαστάσεις. Τη χρονική στιγμή που θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των χρόνων $t_0 = 0$ εκτοξεύουμε τα σώματα από το ίδιο σημείο Α με οριζόντιες και αντίρροπες ταχύτητες μέτρου $υ_{0,1} = 8m/s$ και $υ_{0,2} = 2m/s$ αντίστοιχα. Το σημείο Α βρίσκεται σε ύψος $H = 20m$ πάνω από το έδαφος, η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με $g = 10m/s^2$.



Α. Να υπολογίσετε την ορμή του συστήματος των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και την κινητική ενέργεια του συστήματος αυτού την ίδια χρονική στιγμή.

Β. Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή $t_κ$ κατά την οποία οι ορμές των δύο σωμάτων βρίσκονται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις (πριν από την πρόσκρουση τους στο έδαφος).

Γ. Να υπολογίσετε την ορμή του συστήματος και την απόσταση των δύο σωμάτων την παραπάνω χρονική στιγμή $t = t_κ$.

Δ. Αφού αιτιολογήσετε το γεγονός ότι τα δύο σώματα φθάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος, να υπολογίσετε τη μεταβολή της ορμής του συστήματος και τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως και τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν από την πρόσκρουσή τους σε αυτό.

Απάντηση

Α. Για την ορμή του συστήματος τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έχουμε ότι:

$$\vec{p}_{o\lambda,0} = \vec{p}_{1,0} + \vec{p}_{2,0}$$

και θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά, προκύπτει ότι (τα αντίστοιχα διανύσματα είναι αντίρροπα)

$$p_{o\lambda,0} = m_1 \upsilon_{0,1} - m_2 \upsilon_{0,2} \Longrightarrow p_{o\lambda,0} = 0{,}5kg \cdot 8m/s - 2 \cdot 2m/s \Longrightarrow$$

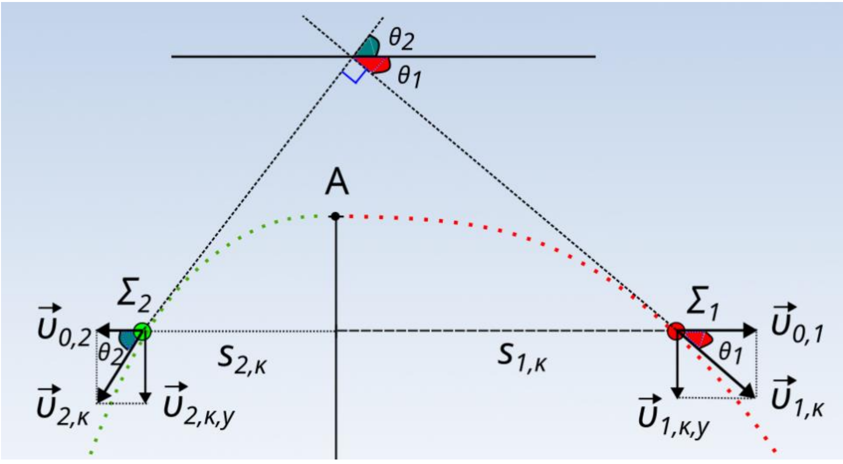
$$\Longrightarrow p_{o\lambda,0} = 4kg \cdot m/s - 4kg \cdot m/s \Longrightarrow \boxed{p_{o\lambda,0} = 0}$$

Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος προκύπτει ίση με:

$$K_{o\lambda,0} = K_{1,0} + K_{2,0} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_{0,1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_{0,2}^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow K_{o\lambda,0} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 8^2 J + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2 J = 16J + 4J \Longrightarrow \boxed{K_{o\lambda,0} = 20J}$$

Β. Επειδή η ταχύτητα ενός σώματος είναι ομόρροπο διάνυσμα με την ορμή του, συμπεραίνουμε ότι τη στιγμή που οι ορμές των δύο σωμάτων είναι κάθετες μεταξύ τους κάθετες θα είναι και οι ταχύτητές τους.



Έστω θ_1 η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα του Σ1 με την οριζόντια διεύθυνση τη στιγμή t_κ και θ_2 η αντίστοιχη γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα του Σ2 με την οριζόντια διεύθυνση την ίδια στιγμή. Τότε, με τη βοήθεια και του σχήματος, αντιλαμβανόμαστε ότι

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} rad$$

δηλαδή, οι δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές. Στο σχήμα φαίνεται ένα τμήμα της τροχιάς του κάθε σώματος και η θέση τους τη στιγμή $t = t_\kappa$. Επομένως, $\varepsilon\varphi\theta_1 = \sigma\varphi\theta_2$.

Με χρήση και του σχήματος, η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\varepsilon\varphi\theta_1 = \sigma\varphi\theta_2 \Longrightarrow \frac{\upsilon_{1,\kappa,y}}{\upsilon_{0,1}} = \frac{\upsilon_{0,2}}{\upsilon_{2,\kappa,y}} \Longrightarrow \frac{g t_\kappa}{\upsilon_{0,1}} = \frac{\upsilon_{0,2}}{g t_\kappa} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (gt_\kappa)^2 = \upsilon_{0,1} \cdot \upsilon_{0,2} \Longrightarrow \boxed{t_\kappa = \frac{\sqrt{\upsilon_{0,1} \cdot \upsilon_{0,2}}}{g}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow t_\kappa = \frac{\sqrt{8 \cdot 2}}{10} s \Longrightarrow t_\kappa = 0{,}4s$$

Γ. Για την ταχύτητα του Σ$_1$ τη στιγμή $t_\kappa = 0{,}4s$ έχουμε ότι:

$$\vec{\upsilon}_{1,\kappa} = \vec{\upsilon}_{0,1} + \vec{\upsilon}_{1,\kappa,y} \xrightarrow{\text{για το μέτρο}} \upsilon_{1,\kappa} = \sqrt{\upsilon_{0,1}^2 + (gt_\kappa)^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \upsilon_{1,\kappa} = \sqrt{8^2 + 4^2} m/s \Longrightarrow \upsilon_{1,\kappa} = \sqrt{64 + 16} m/s \Longrightarrow \upsilon_{1,\kappa} = \sqrt{80} m/s \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \upsilon_{1,\kappa} = 4\sqrt{5} m/s$$

Άρα, για το μέτρο της ορμής του Σ$_1$ την παραπάνω χρονική στιγμή έχουμε ότι:

$$p_{1,\kappa} = m_1 \upsilon_{1,\kappa} = 0{,}5kg \cdot 4\sqrt{5} m/s \Longrightarrow p_{1,\kappa} = 2\sqrt{5} kg \cdot m/s$$

Ομοίως, για την ταχύτητα του Σ$_2$ τη στιγμή $t_\kappa = 0{,}4s$ έχουμε ότι:

$$\vec{\upsilon}_{2,\kappa} = \vec{\upsilon}_{0,2} + \vec{\upsilon}_{2,\kappa,y} \xrightarrow{\text{για το μέτρο}} \upsilon_{2,\kappa} = \sqrt{\upsilon_{0,2}^2 + (gt_\kappa)^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \upsilon_{2,\kappa} = \sqrt{2^2 + 4^2} m/s \Longrightarrow \upsilon_{2,\kappa} = \sqrt{4 + 16} m/s \Longrightarrow \upsilon_{2,\kappa} = \sqrt{20} m/s \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \upsilon_{2,\kappa} = 2\sqrt{5} m/s$$

Άρα, για το μέτρο της ορμής του Σ$_2$ την παραπάνω χρονική στιγμή έχουμε ότι:

$$p_{2,\kappa} = m_2 \upsilon_{2,\kappa} = 2kg \cdot 2\sqrt{5} m/s \Longrightarrow p_{2,\kappa} = 4\sqrt{5} kg \cdot m/s$$

Επομένως, το μέτρο της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων τη στιγμή t_κ θα είναι ίσο με (κάθετα διανύσματα):

$$p_{o\lambda,\kappa} = \sqrt{p_{1,\kappa}^2 + p_{2,\kappa}^2} \Longrightarrow p_{o\lambda,\kappa} = \sqrt{4 \cdot 5 + 16 \cdot 5} kg \cdot m/s \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow p_{o\lambda,\kappa} = \sqrt{20 + 80} kg \cdot m/s \Longrightarrow \boxed{p_{o\lambda,\kappa} = 10 kg \cdot m/s}$$

<u>Το διάνυσμα αυτό, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι είναι κατακόρυφο και με φορά προς τα κάτω</u>. Συγκεκριμένα, μπορούμε να φτάσουμε τόσο στην κατεύθυνση, όσο και στο μέτρο της ολικής ορμής του συστήματος όπως παρακάτω:

$$\vec{p}_{o\lambda,\kappa} = \vec{p}_{o\lambda,x,\kappa} + \vec{p}_{o\lambda,y,\kappa}$$

Όμως, καθώς $\Sigma F_{\varepsilon\xi,x} = 0$, συμπεραίνουμε ότι $\vec{p}_{o\lambda,x} = \sigma\tau\alpha\theta.$ και καθώς (σύμφωνα και με το ερώτημα Α) $\vec{p}_{o\lambda,0} = \vec{0}$ αντιλαμβανόμαστε ότι και $\vec{p}_{o\lambda,x,\kappa} = \vec{0}$.

Άρα, $\vec{p}_{ολ,κ} = \vec{p}_{ολ,y,κ}$. Δηλαδή, η ολική ορμή είναι κατακόρυφη και με φορά προς τα κάτω. Επίσης, για το μέτρο της αντίστοιχης ορμής, θα έχουμε ότι:

$$p_{ολ,κ} = p_{1,κ,y} + p_{2,κ,y} = m_1 υ_{1,κ,y} + m_2 υ_{2,κ,y} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow p_{ολ,κ} = m_1 g t_κ + m_2 g t_κ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow p_{ολ,κ} = 0{,}5 \cdot 10 \cdot 0{,}4 kg \cdot m/s + 2 \cdot 10 \cdot 0{,}4 kg \cdot m/s = 10 kg \cdot m/s$$

Αναφορικά με τη ζητούμενη απόσταση των σωμάτων εκείνη τη στιγμή, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα δύο σώματα βρίσκονται διαρκώς στην ίδια οριζόντια. Αυτό συμβαίνει καθώς εκτελούν οριζόντια βολή από το ίδιο ύψος και βάλλονται ταυτόχρονα. Άρα στην κατακόρυφη διεύθυνση μετατοπίζονται διαρκώς το ίδιο $y = \frac{1}{2} g t^2$, με αποτέλεσμα να βρίσκονται διαρκώς στο ίδιο ύψος από το έδαφος ($h = H - y$).

Έτσι, τη χρονική στιγμή $t = t_κ$, η απόσταση των δύο σωμάτων θα είναι ίση με:

$$d = s_{1,κ} + s_{2,κ} = υ_{0,1} t_κ + υ_{0,2} t_κ \Longrightarrow \boxed{d = (υ_{0,1} + υ_{0,2}) t_κ} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d = (8 + 2) \cdot 0{,}4 m \Longrightarrow d = 4m$$

Δ. Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο ερώτημα, τα σώματα βρίσκονται διαρκώς στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Επομένως, φθάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος και συγκεκριμένα τη χρονική στιγμή

$$t_{ολ} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} s \Longrightarrow t_{ολ} = 2s$$

Η ορμή ενός συστήματος σωμάτων αλλάζει όταν στο σύστημα ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι

$$Σ\vec{F}_{εξ} = \frac{Δ\vec{p}_{ολ}}{Δt}$$

Και για την περίπτωση του συστήματός μας

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \frac{Δ\vec{p}_{ολ}}{Δt} \Longrightarrow m_1 \vec{g} + m_2 \vec{g} = \frac{Δ\vec{p}_{ολ}}{Δt}$$

Επειδή η δύναμη του βάρους είναι κατακόρυφη και σταθερή, η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή στην οριζόντια διεύθυνση, αλλά αλλάζει με σταθερό ρυθμό στην κατακόρυφη διεύθυνση. Δηλαδή,

$$m_1 g + m_2 g = \frac{Δp_{ολ,y}}{Δt} \Longrightarrow Δp_{ολ,y} = Δp_{ολ} = (m_1 g + m_2 g) Δt \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Δp_{ολ} = (m_1 g + m_2 g) \cdot (t_{ολ} - t_0) \Longrightarrow Δp_{ολ} = (5 + 20) \cdot 2 kg \cdot m/s \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta p_{o\lambda} = 50kg \cdot m/s}$$

Πρόκειται για ένα κατακόρυφο διάνυσμα, με φορά προς τα κάτω.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος, είναι ίση κάθε χρονική στιγμή με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των σωμάτων του συστήματος. Δηλαδή,

$$K_{o\lambda} = K_1 + K_2$$

Επομένως, η αντίστοιχη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος θα ισούται με το άθροισμα των επιμέρους μεταβολών των κινητικών ενεργειών των σωμάτων του συστήματος. Δηλαδή

$$\Delta K_{o\lambda} = \Delta K_1 + \Delta K_2$$

Με εφαρμογή του Θεωρήματος Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας για κάθε σώμα ξεχωριστά και μεταξύ του σημείου Α και του σημείου που το κάθε σώμα συναντά το έδαφος, έχουμε (η μόνη δύναμη που ασκείται στα σώματα είναι το βάρος):

$$\Delta K_1 = \Sigma W_1 = W_{\vec{w}_1} \Longrightarrow \Delta K_1 = m_1 g H \Longrightarrow \Delta K_1 = 0{,}5 \cdot 10 \cdot 20J \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Delta K_1 = 100J$$

Και

$$\Delta K_2 = \Sigma W_2 = W_{\vec{w}_2} \Longrightarrow \Delta K_2 = m_2 g H \Longrightarrow \Delta K_2 = 2 \cdot 10 \cdot 20J \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Delta K_2 = 400J$$

Οπότε

$$\Delta K_{o\lambda} = \Delta K_1 + \Delta K_2 = 100J + 400J \Longrightarrow \boxed{\Delta K_{o\lambda} = 500J}$$

Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com