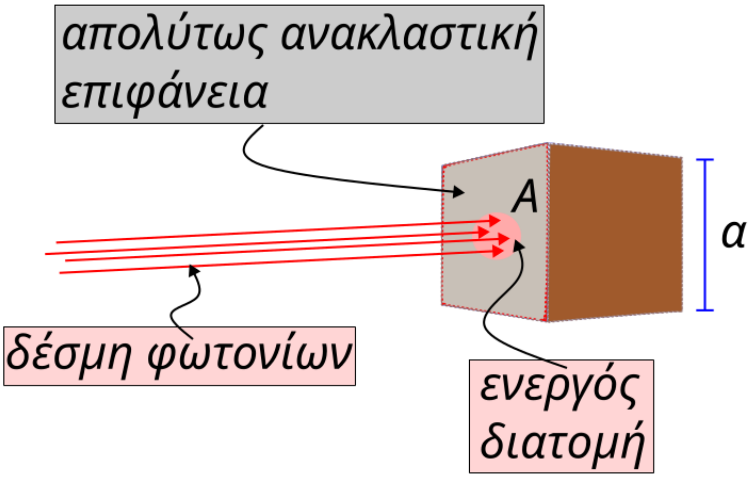
Η δύναμη και η πίεση της δέσμης

Διαθέτουμε μία πηγή δέσμης φωτονίων (ένα laser που θεωρούμε ότι εκπέμπει μονοχρωματική ακτινοβολία) η οποία εκπέμπει φωτόνια μήκους κύματος $\lambda = 663nm$. Η ισχύς της δέσμης είναι ίση με $3mW$, ενώ η (ενεργός) διατομή της ίση με $A = 3mm^2$.

Α. Να υπολογίσετε την ορμή του κάθε φωτονίου της δέσμης αυτής.

Β. Να υπολογίσετε τον αριθμό των φωτονίων που διέρχονται από κάποιο σημείο (μία διατομή) της δέσμης ανά δευτερόλεπτο.

Διαθέτουμε ένα ξύλινο κύβο ακμής $\alpha = 6cm$ του οποίου επικαλύπτουμε την μία έδρα με μία απολύτως ανακλαστική επιφάνεια και τον τοποθετούμε πάνω στον οριζόντιο εργαστηριακό πάγκο. Η έδρα που επικαλύψαμε είναι κατακόρυφη, όπως στο σχήμα και θεωρούμε ότι η επικάλυψη δεν αλλάζει τη μάζα του κύβου. Με το παραπάνω laser ακτινοβολούμε την έδρα του κύβου που επικαλύψαμε, με τέτοιο τρόπο ώστε ο άξονας της δέσμης να διέρχεται από το κέντρο του κύβου και τα φωτόνια να θεωρούμε ότι προσκρούουν κάθετα στην επιφάνειά του. Παρατηρούμε ότι ο κύβος παραμένει ακίνητος.



Γ. Να υπολογίσετε τη μάζα του κύβου.

Δ. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του συντελεστή οριακής τριβής μεταξύ του κύβου και του πάγκου, ώστε ο κύβος να παραμένει ακίνητος.

Ε. Να υπολογίσετε την πίεση «που ασκεί» η δέσμη των φωτονίων στην ανακλαστική επιφάνεια του κύβου.

Δίνεται η σταθερά του Plank $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34} Js$, το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10 m/s^2$, η ταχύτητα του φωτός $c = 3 \cdot 10^8 m/s$, και η πυκνότητα του ξύλου $\rho = 0{,}7 g/cm^3$.

Απάντηση

Α. Η ορμή του κάθε φωτονίου της δέσμης θα ισούται με:

$$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow p = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} Js}{663 \cdot 10^{-9} m} = \frac{10^{-36}}{10^{-9}} kg \cdot m/s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p = 10^{-27} kg \cdot m/s}$$

Β. Εάν $P = 3mW$ η ισχύς της δέσμης, τότε η ενέργεια που «περνά» από κάθε σημείο της δέσμης σε χρονικό διάστημα Δt είναι ίση με $E = P\Delta t$. Άρα, η ενέργεια που «περνά» από ένα σημείο της δέσμης κάθε δευτερόλεπτο, είναι ίση με $E = 3 \cdot 10^{-3} J$. Η ενέργεια του κάθε φωτονίου είναι ίση με

$$E_1 = hf = \frac{hc}{\lambda} = pc \Rightarrow E_1 = 10^{-27} kg \cdot m/s \cdot 3 \cdot 10^{8} m/s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_1 = 3 \cdot 10^{-19} J$$

Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός των φωτονίων που διέρχονται από ένα σημείο της δέσμης είναι ίσος με

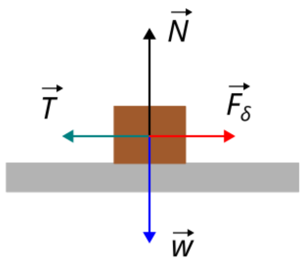
$$n = \frac{3 \cdot 10^{-3} J/s}{3 \cdot 10^{-19} J/\varphi\omega\tau\acute{o}\nu\iota o} \Rightarrow \boxed{n = 10^{16} \varphi\omega\tau\acute{o}\nu\iota\alpha/s}$$

Γ. Η ζητούμενη μάζα του κύβου, μέσω του ορισμού της πυκνότητας του ξύλου, προκύπτει ίση με:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V \Rightarrow m = \rho \alpha^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 0{,}7 g/cm^3 \cdot 216 cm^3 \Rightarrow \boxed{m = 151{,}2 g}$$

Δ. Εάν F_δ η δύναμη που ασκεί η δέσμη στον κύβο, τότε οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτόν φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Επειδή ο κύβος ισορροπεί, η δύναμη τριβής από τον πάγκο πρέπει να είναι στατική. Δηλαδή,



$$T = T_{\sigma\tau} \le T_{o\rho}$$

Από την ισορροπία του κύβου στην κατακόρυφη διεύθυνση, αντιλαμβανόμαστε ότι το μέτρο της κάθετης αντίδρασης N είναι ίσο με:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w = mg \Rightarrow N = 1{,}512 N$$

Επειδή η επιφάνεια του κύβου είναι απολύτως ανακλαστική, συμπεραίνουμε ότι τα φωτόνια ανακλώνται με ορμή ίδιου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης με αυτή που προσπίπτουν. Δηλαδή, $\vec{p}' = -\vec{p}$. Έτσι, η μεταβολή της ορμής κάθε φωτονίου της δέσμης κατά την ανάκλαση είναι ίση με $\Delta\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} = -2\vec{p}$. Οπότε, το μέτρο της μεταβολής της ορμής κάθε φωτονίου θα είναι ίσο με

$$\Delta p = 2p = 2 \cdot 10^{-27} kg \cdot m/s$$

Η δύναμη από τον κύβο που είναι υπεύθυνη για τη μεταβολή αυτή της ορμής, άρα και η δύναμη που ασκεί το κάθε φωτόνιο στην επιφάνεια (3^{ος} νόμος Νεύτωνα) έχει μέτρο

$$F_1 = \frac{\Delta p}{\Delta t_\kappa}$$

όπου Δt_κ η διάρκεια της κρούσης.

Όπως είδαμε στο ερώτημα (Β), ο αριθμός των φωτονίων που διέρχονται από κάθε σημείο της δέσμης είναι ίσος με $n = 10^{16} \varphi\omega\tau \acute{o}\nu\iota\alpha/s$. Επομένως, ο αριθμός των φωτονίων που προσπίπτει στην επιφάνεια του κύβου σε χρόνο Δt_κ είναι ίσος με

$$N = n\Delta t_\kappa$$

Έτσι, το μέτρο της συνολικής δύναμης που η δέσμη θα ασκεί στον κύβο θα είναι ίση με

$$F_\delta = NF_1 = n\Delta t_\kappa \cdot \frac{\Delta p}{\Delta t_\kappa} \Rightarrow F_\delta = 2np \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_\delta = 2 \cdot 10^{16} \cdot 10^{-27} N \Rightarrow F_\delta = 2 \cdot 10^{-11} N$$

Για να ισορροπεί ο κύβος, πρέπει

$$F_\delta \leq T_{o\rho} \Rightarrow F_\delta \leq \mu N \Rightarrow \mu \geq \frac{F_\delta}{N} \Rightarrow \mu \geq \frac{2 \cdot 10^{-11} N}{1{,}512 N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_{min} \approx 1{,}32 \cdot 10^{-11}}$$

Παρατηρούμε ότι και σε ένα «πρακτικά» λείο δάπεδο, η συγκεκριμένη δέσμη δεν θα μπορούσε να μετακινήσει τον κύβο. Θα χρειαστεί να αυξήσουμε αρκετά την ισχύ της δέσμης (αντίστοιχα τον αριθμό των φωτονίων ανά δευτερόλεπτο που εκπέμπονται από την πηγή).

Ε. Για την πίεση στην επιφάνεια που οφείλεται στη δέσμη, ισχύει ότι:

$$p_\delta = \frac{F_\delta}{A} = \frac{2 \cdot 10^{-11} N}{3 \cdot 10^{-6} m^2} \Rightarrow \boxed{p_\delta = \frac{2}{3} \cdot 10^{-5} N/m^2}$$

Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com