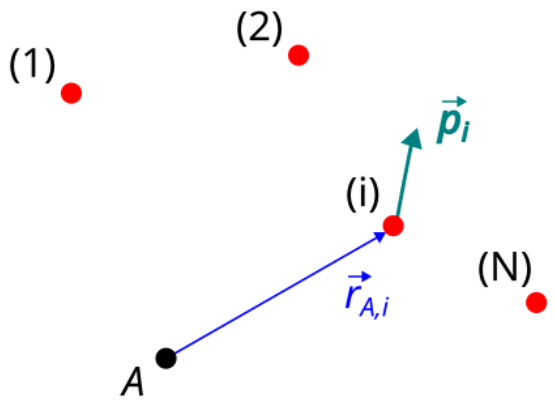
Η στροφορμή συστήματος μηδενικής ορμής

Να αποδείξετε ότι εάν η ορμή ενός συστήματος σωμάτων (υλικών σημείων) είναι μηδέν, τότε η στροφορμή του συστήματος αυτού είναι η ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο.

Απάντηση

Στο διπλανό σχήμα, φαίνεται ένα σύστημα N σημειακών σωματιδίων με μάζες $m_1, m_2, \dots, m_N$ και διανύσματα θέσης $\vec{r}_{A,1}, \vec{r}_{A,2}, \dots, \vec{r}_{A,N}$ αντίστοιχα, ως προς ένα (σταθερό) σημείο Α (σύστημα αναφοράς).



Η ορμή ενός τυχαίου σωματιδίου μάζας m_i και διανύσματος θέσης $\vec{r}_{A,i}$ (ως προς το Α) με $i = 1, 2, \dots, N$ δίνεται από τη σχέση

$$\vec{p}_{A,i} = m_i \frac{d\vec{r}_{A,i}}{dt}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα, η ορμή του συστήματος αυτού, είναι μηδέν[1]. Άρα,

$$\vec{p}_{o\lambda,A} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{A,i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_{A,i}}{dt} = \vec{0} \quad (1)$$

Η στροφορμή ενός τυχαίου σωματιδίου του συστήματος ως προς το Α, δίνεται από τη σχέση

$$\vec{L}_{A,i} = \vec{r}_{A,i} \times \vec{p}_{A,i}$$

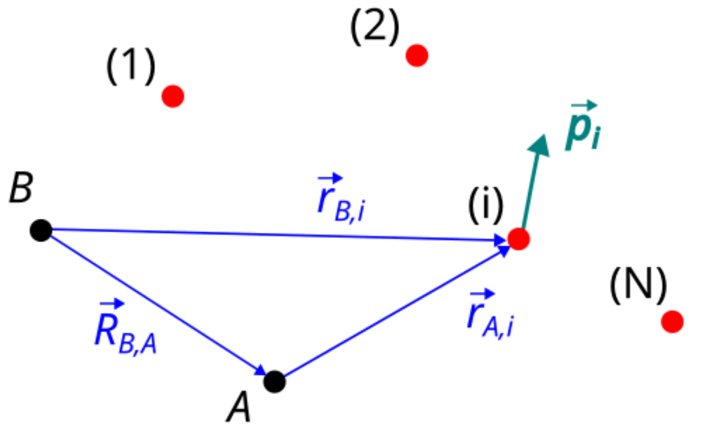
Επομένως, η στροφορμή του συστήματος αυτού ως προς το Α, θα ισούται με:

$$\vec{L}_{o\lambda,A} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{A,i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{A,i} \times \vec{p}_{A,i} \quad (2)$$

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να αποδείξουμε ότι και ως προς ένα άλλο τυχαίο (και σταθερό) σημείο Β η στροφορμή του συστήματος γράφεται όπως η σχέση (2). Δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{L}_{o\lambda,B} = \vec{L}_{o\lambda,A}$.

[1] Θα αποδείξουμε ότι η ορμή του συστήματος είναι μηδέν όχι μόνο ως προς το σύστημα αναφοράς που ορίζεται από το σημείο Α, αλλά και ως προς οποιοδήποτε άλλο σταθερό σημείο.

Έστω λοιπόν ένα άλλο σύστημα αναφοράς που ορίζεται από ένα τυχαίο (και διαφορετικό του Α) σταθερό σημείο Β. Τα σωματίδια του συστήματος, ως προς το Β, θα έχουν διανύσματα θέσης $\vec{r}_{B,1}, \vec{r}_{B,2}, \dots, \vec{r}_{B,N}$ αντίστοιχα, ενώ το (σταθερό) διάνυσμα θέσης του σημείου Α ως προς το Β ορίζεται ως $\vec{R}_{B,A}$.



Ένα τυχαίο σωματίδιο του συστήματος μάζας m_i θα έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{B,i}$ (ως προς το Β), όπου $i = 1, 2, \dots, N$. Επίσης, με τη βοήθεια και του σχήματος, φαίνεται ότι ισχύει η σχέση

$$\vec{r}_{B,i} = \vec{R}_{B,A} + \vec{r}_{A,i} \quad (3)$$

Για την ορμή του σωματιδίου αυτού (ως προς το Β) και καθώς $\vec{R}_{B,A} = σταθ.$ έχουμε ότι:

$$\vec{p}_{B,i} = m_i \frac{d\vec{r}_{B,i}}{dt} \overset{(3)}{\Rightarrow} \vec{p}_{B,i} = m_i \frac{d\left(\vec{R}_{B,A} + \vec{r}_{A,i}\right)}{dt} = m_i \frac{d\vec{r}_{A,i}}{dt} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \vec{p}_{B,i} = \vec{p}_{A,i} = \vec{p}_i$$

Επομένως, σύμφωνα και με τη σχέση (1), έχουμε ότι

$$\vec{p}_{ολ,B} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{B,i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{A,i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{p}_{ολ,A} = \vec{p}_{ολ} = \vec{0} \quad (4)$$

Η στροφορμή του τυχαίου σωματιδίου του συστήματος ως προς το Β είναι ίση με:

$$\vec{L}_{B,i} = \vec{r}_{B,i} \times \vec{p}_{B,i} \overset{(3)}{\Rightarrow} \vec{L}_{B,i} = \left(\vec{R}_{B,A} + \vec{r}_{A,i}\right) \times \vec{p}_{B,i} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \vec{L}_{B,i} = \vec{R}_{B,A} \times \vec{p}_{B,i} + \vec{r}_{A,i} \times \vec{p}_{B,i}$$

Οπότε, η στροφορμή του συστήματος ως προς το Β ισούται με

$$\vec{L}_{ολ,B} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{A,i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_{B,A} \times \vec{p}_{B,i} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{A,i} \times \vec{p}_{B,i}$$

Όμως, $\vec{R}_{B,A} = σταθ.$ με αποτέλεσμα η παραπάνω σχέση να παίρνει τη μορφή

$$\vec{L}_{ολ,B} = \vec{R}_{B,A} \times \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{A,i} \times \vec{p}_i \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\vec{L}_{ολ,B} = \vec{R}_{B,A} \times \vec{p}_{ολ} + \vec{L}_{ολ,A}} \quad (5)$$

Στην παραπάνω γενική σχέση μετασχηματισμού της στροφορμής του συστήματος εάν κάνουμε χρήση της σχέσης (4), προκύπτει ότι:

$$\vec{L}_{ολ,B} = \vec{L}_{ολ,A}$$

Και επειδή τα σημεία Α και Β είναι τυχαία, αντιλαμβανόμαστε ότι σε ένα σύστημα με μηδενική ορμή, η στροφορμή του συστήματος είναι ανεξάρτητη του σημείου υπολογισμού της.

Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com