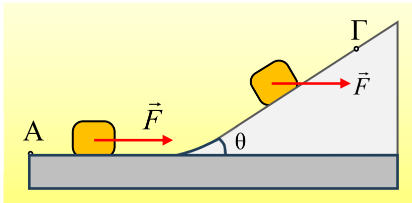
Το σώμα τραβά την ανηφόρα

Ένα σώμα μάζας m ηρεμεί στο σημείο Α ενός λείου οριζοντίου επιπέδου. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση μιας σταθερής οριζόντιας δύναμης μέτρου F=10N με αποτέλεσμα μετά από μετατόπιση x_1=1,6m να φτάνει στη βάση Ο ενός λείου κεκλιμένου επιπέδου, έχοντας ταχύτητα μέτρου $υ_o$=4m/s.



i) Να βρεθεί η μάζα του σώματος.

ii) Έχουμε διαμορφώσει την διαδρομή στην κορυφή Ο, με τέτοιο τρόπο, ώστε το σώμα να περάσει ομαλά στο κεκλιμένο επίπεδο, χωρίς καμιά δυσκολία, οπότε συνεχίζει την κίνησή του σε αυτό με την επίδραση της ίδιας δύναμης F. Το κεκλιμένο επίπεδο σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ, όπου ημθ=0,6 και συνθ=0,8.

α) Η κίνηση στο κεκλιμένο επίπεδο είναι επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη;

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος, τη στιγμή που περνά από το σημείο Γ, όπου (ΟΓ)=3m.

γ) Να υπολογιστεί η μηχανική ενέργεια του σώματος στη θέση Γ, θεωρώντας μηδενική την αρχική του ενέργεια στη θέση Α.

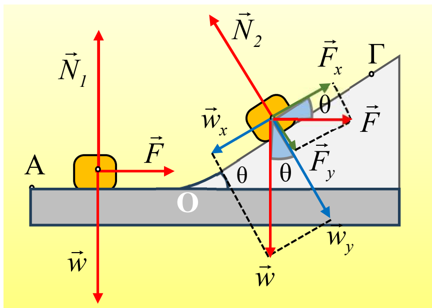
δ) Πόση ενέργεια έχει μεταφερθεί στο σώμα, μέσω του έργου της δύναμης F, στη διαδρομή από την θέση Α, μέχρι τη θέση Γ;

iii) Να υπολογισθεί η μέγιστη δυναμική ενέργεια που αποκτά το σώμα, στη συνέχεια της κίνησής του.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, τόσο στο οριζόντιο, όσο και στο κεκλιμένο επίπεδο.



i) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) για το σώμα από τη θέση Α, μέχρι την θέση Ο, λαμβάνοντας υπόψη ότι το βάρος και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου δεν παράγουν έργο, αφού είναι κάθετες στην μετατόπιση:

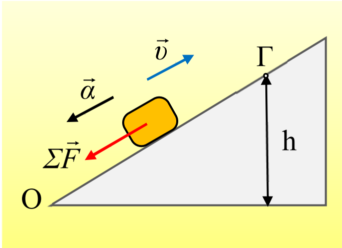
$$K_O - K_A = W_w + W_{N_1} + W_F \rightarrow \frac{1}{2}mυ_o^2 - 0 = 0 + 0 + Fx_1 \rightarrow$$

$$m = \frac{2Fx_1}{υ_o^2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 1{,}6}{4^2}kg = 2kg$$

ii) Το είδος της κίνησης στο κεκλιμένο επίπεδο θα την καθορίσουν οι συνιστώσες των δυνάμεων στη διεύθυνση της κίνησης (της παράλληλης στο επίπεδο). Για τις συνιστώσες αυτές έχουμε:

$$F_x = F \cdot συνθ = 10N \cdot 0{,}8 = 8N \text{ και}$$

$$B_x = w_x = mg \cdot \eta\mu\theta = 2 \cdot 10N \cdot 0{,}6 = 12N$$



α) Βλέπουμε ότι $B_x > F_x$ πράγμα που σημαίνει ότι η συνισταμένη δύναμη έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα, συνεπώς αντίθετη φορά θα έχει και η επιτάχυνση και η κίνηση θα είναι επιβραδυνόμενη.

β) Εφαρμόζουμε ξανά το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα από τη θέση Ο, μέχρι την θέση Γ, όπου x_2=(ΟΓ)=3m:

$$K_\Gamma - K_O = W_{w_x} + W_{w_y} + W_{N_2} + W_{F_x} + W_{F_y} \xrightarrow{W_{w_y}=W_{N_2}=W_{F_y}=0}$$
$$\frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = -w_x \cdot x_2 + F_x \cdot x_2 \xrightarrow{\alpha\nu\tau\iota\kappa.} (\mu ονάδες\ στο\ S.I.)$$
$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \upsilon_\Gamma^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4^2 = -12 \cdot 3 + 8 \cdot 3 \rightarrow \upsilon_\Gamma^2 = 16 - 36 + 24 = 4 \rightarrow$$
$$\upsilon_\Gamma = 2m/s$$

γ) Το σώμα περνώντας από την θέση Γ, σε ύψος h=x_2ημθ (βλέπε σχήμα), έχει μηχανική ενέργεια:

$$E_\mu = K + U = \frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2 + mg \cdot x_2\eta\mu\theta \rightarrow$$
$$E_\mu = \frac{1}{2} 2 \cdot 2^2 J + 2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 0{,}6 J = 40J$$

δ) Η ενέργεια που μεταφέρεται στο σώμα είναι ίση με το έργο της δύναμης από το Α στο Γ:

$$W_F = W_{A\to O} + W_{O\to\Gamma} = F \cdot x_1 + F_x \cdot x_2 \rightarrow$$
$$W_F = 10 \cdot 1{,}6J + 8 \cdot 3J = 40J$$

Αξίζει να προσέξουμε την ισότητα της μηχανικής ενέργεια στο Γ, με το έργο της F. Το σώμα στη θέση Γ έχει μηχανική ενέργεια 40J, αφού τόση ενέργεια πήρε μέσω του έργου της δύναμης F!

iii) Αφού η κίνηση του σώματος είναι επιβραδυνόμενη, κάποια στιγμή η ταχύτητά του θα μηδενιστεί, έστω σε ένα σημείο Δ, όπου (ΟΔ)=x_3, σε ύψος h_3=x_3ημθ, από το οριζόντιο επίπεδο. Στο σημείο Δ θα έχει την μέγιστη δυναμική ενέργεια, αφού στη συνέχεια θα κινηθεί προς τα κάτω. Παίρνουμε ξανά το Θ.Μ.Κ.Ε. από το Ο στο Δ και έχουμε:

$$K_\Delta - K_O = W_{w_x} + W_{w_y} + W_{N_2} + W_{F_x} + W_{F_y} \xrightarrow{W_{w_y}=W_{N_2}=W_{F_y}=0}$$
$$0 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = -w_x \cdot x_3 + F_x \cdot x_3 \rightarrow x_3 = \frac{m\upsilon_o^2}{2(w_x - F_x)} = \frac{2 \cdot 4^2}{2(12-8)} m = 4m \rightarrow$$
$$U_{max} = mgh_3 = mgx_3 \cdot \eta\mu\theta = 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 0{,}6J = 48J$$

dmargaris@gmail.com