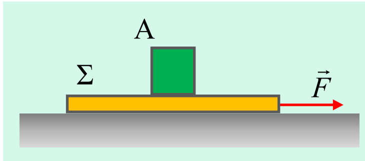
Παραβιάζεται η αρχή διατήρησης της ενέργειας;



Ένα σώμα Α μάζας m=5kg, ηρεμεί πάνω σε μια σανίδα Σ μάζας M=10kg, η οποία είναι ακίνητη πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή ασκούμε στην σανίδα μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F=20N, όπως στο σχήμα. Δίνεται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος Α και σανίδας μ=0,2 και ότι το μήκος της σανίδας είναι αρκετά μεγάλο ώστε το σώμα Α να μην την εγκαταλείπει στη διάρκεια του πειράματος, ενώ $g=10m/s^2$.

A) Ένας μαθητής προβλέπει ότι το σώμα Α θα ολισθήσει πάνω στη σανίδα. Για να εξετάσουμε αν η πρόβλεψή του αυτή, είναι σωστή, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η πρόβλεψη αυτή και ας απαντήσουμε στα παρακάτω ερωτήματα.

i) Ποια επιτάχυνση αποκτά κάθε σώμα;

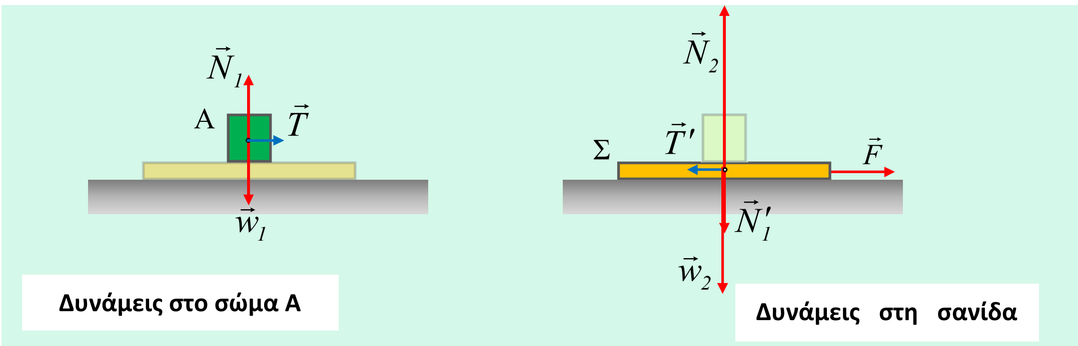
ii) Να υπολογιστούν οι ταχύτητες και οι μετατοπίσεις των σωμάτων σε χρονικό διάστημα Δt=t=1s.

iii) Μήπως παραβιάζεται η αρχή διατήρησης της ενέργειας με τα παραπάνω αποτελέσματα;

B) Να εξετάσετε ακόμη αν η πρόβλεψη του μαθητή είναι σωστή, αν η δύναμη είχε μέτρο F_1=60N, δίνοντας απαντήσεις στα παραπάνω υποερωτήματα.

Απάντηση:

A) Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα χωριστά.



Όπου για το σώμα Α έχουμε (μπορείτε να εξηγήσετε την κατεύθυνση της τριβής στο σώμα Α;) :

$$\Sigma F_{1,y} = 0 \to N_1 = w_1 = mg \to T = \mu mg = 0,2 \cdot 5 \cdot 10N = 10N$$

i) Για τις επιταχύνσεις των δύο σωμάτων Α και Σ, έχουμε:

$$\Sigma F_{1,x} = ma_1 \to a_1 = \frac{T}{m} = \mu g = 0,2 \cdot 10m/s^2 = 2m/s^2 .$$

$$\Sigma F_{2,x} = Ma_2 \to a_2 = \frac{F-T}{M} = \frac{20N - 10N}{10kg} = 1m/s^2 .$$

ii) Οι ταχύτητες και οι μετατοπίσεις των σωμάτων, μετά από χρονικό διάστημα Δt=t, είναι:

$$\upsilon_1 = \alpha_1 \cdot t = 2 \cdot 1m/s = 2m/s \quad \text{και} \quad x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2 = \frac{1}{2}2 \cdot 1^2 m = 1m$$

$$\upsilon_2 = \alpha_2 \cdot t = 1 \cdot 1m/s = 1m/s \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{1}{2}a_2t^2 = \frac{1}{2}1 \cdot 1^2 m = 0,5m$$

iii) Στο παραπάνω χρονικό διάστημα στη σανίδα (και συνολικά στο σύστημα των δύο σωμάτων) μεταφέρθηκε ενέργεια, ίση με το έργο της δύναμης $\vec{F}$:

$$E = W_F = F \cdot x_2 = 20 \cdot 0,5J = 10J$$

Στο τέλος αυτού του χρονικού διαστήματος, τα δυο σώματα έχουν κινητικές ενέργειες:

$$K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}5 \cdot 2^2 m = 10J \quad \text{και} \quad K_2 = \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}10 \cdot 1^2 m = 5J$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών που έχουν τα δυο σώματα:

$$K_1 + K_2 = 15J > W_F$$

είναι μεγαλύτερο από την συνολική ενέργεια που δόθηκε στο σύστημα. Άρα έχουμε μια φανερή παραβίαση της διατήρησης της ενέργειας, οπότε ο μαθητής κάνει λάθος! (και δεν εξετάσαμε και τι έγινε με την ενέργεια που εμφανίστηκε με την μορφή της θερμότητας, λόγω τριβής…).

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να εστιάσουμε στο πάρε δώσε μεταξύ των δύο σωμάτων. Η τριβή που ασκείται στη σανίδα, αφαιρεί από αυτήν ενέργεια, ίση με το έργο της:

$$W_{T'} = -T' \cdot x_2 \xrightarrow[\text{αντίδραση}]{\text{δράση}} W_{T'} = -T \cdot x_2 = -10 \cdot 0,5J = -5J$$

Ενώ μεταφέρεται ενέργεια από τη σανίδα στο Α σώμα, ίση με το έργο της τριβής που ασκείται στο σώμα Α:

$$W_T = +T \cdot x_1 \rightarrow W_{T'} = +10 \cdot 1J = 10J$$

Βλέπουμε δηλαδή η σανίδα να χάνει ενέργεια 5J, αλλά στο σώμα Α να μεταφέρεται μεγαλύτερο ποσό ενέργειας ίσο με 10J. Σαν να μπορεί να εμφανιστεί ενέργεια από το μηδέν…

Β) Αν η δύναμη είχε μέτρο F_1=60N, θα είχαμε τις εξής απαντήσεις:

i) Για τις επιταχύνσεις των δύο σωμάτων Α και Σ, έχουμε:

$$\Sigma F_{1,x} = ma_1' \rightarrow a_1' = \frac{T}{m} = \mu g = 0,2 \cdot 10m/s^2 = 2m/s^2 .$$

$$\Sigma F_{2,x} = Ma_2' \rightarrow a_2' = \frac{F - T}{M} = \frac{60N - 10N}{10kg} = 5m/s^2 .$$

ii) Οι ταχύτητες και οι μετατοπίσεις των σωμάτων, μετά από χρονικό διάστημα Δt=t, θα είναι:

$$\upsilon_1' = \alpha_1' \cdot t = 2 \cdot 1m/s = 2m/s \quad \text{και} \quad x_1 = \frac{1}{2}a_1't^2 = \frac{1}{2}2 \cdot 1^2 m = 1m$$

$$\upsilon_2' = \alpha_2' \cdot t = 5 \cdot 1m/s = 5m/s \quad \text{και} \quad x_2' = \frac{1}{2}a_2' t^2 = \frac{1}{2} 5 \cdot 1^2 m = 2{,}5m$$

iii) Στο παραπάνω χρονικό διάστημα στη σανίδα (και συνολικά στο σύστημα των δύο σωμάτων) μεταφέρθηκε ενέργεια, ίση με το έργο της δύναμης $\vec{F}$:

$$E' = W_{F_1} = F_1 \cdot x_2' = 60 \cdot 2{,}5J = 150J$$

Στο τέλος αυτού του χρονικού διαστήματος, τα δυο σώματα έχουν κινητικές ενέργειες:

$$K_1' = \frac{1}{2} m\upsilon_1'^2 = \frac{1}{2} 5 \cdot 2^2 m = 10J \quad \text{και} \quad K_2 = \frac{1}{2} M\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 5^2 m = 125J$$

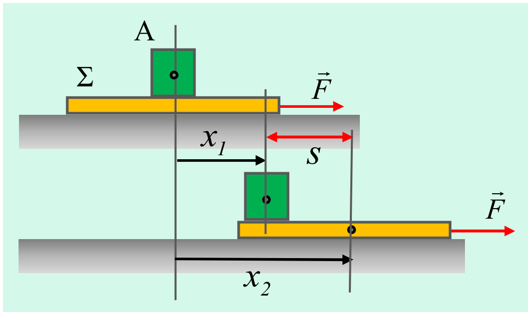
Αλλά τώρα το άθροισμα:

$$K_1 + K_2 = 10J + 125J = 135J$$

Είναι μικρότερο από τα 150J, που είναι το έργο της δύναμης, αποτέλεσμα συμβατό με την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Βέβαια υπονοείται ότι κάπου μπορούμε να ψάξουμε να βρούμε τα υπόλοιπα 150J-135J=15J που «χάθηκαν»!

Χάθηκαν; Ας το δούμε:

Με βάση και το διπλανό σχήμα, αν x_2 η μετατόπιση της σανίδας και x_1 η αντίστοιχη μετατόπιση του σώματος Α, τότε το σώμα Α γλίστρησε πάνω στη σανίδα κατά:



$$s = x_2' - x_1' = 2{,}5m - 1m = 1{,}5m$$

Αλλά τότε λόγω τριβής των δύο επιφανειών, εμφανίζεται θερμική ενέργεια (οι επιφάνειες θερμαίνονται και συνήθως γράφεται ότι παράγεται θερμότητα), ίση με:

$$Q_\theta = |W_T| = Ts = 10N \cdot 1{,}5m = 15J$$

Αυτά τα 15J ήταν που … μας έλειπαν!

dmargaris@gmail.com